

# 球形扁壳在冲击载荷作用下的超临界变形

宁建国 杨桂通

(太原工业大学 太原 030024)

**摘 要** 本文利用 Pogorelov 提出的薄壳稳定性几何学理论,研究了球形扁壳在冲击作用下的超临界变形行为。这种方法是建立在实验观察中,壳结构的大变形是以近似于一种等距变换的方式产生的。首先,给出了壳体变形的近似表达式,在此基础上,考虑了两种不同的在扁球壳顶部的冲击方式,利用能量原理,得到了描述运动的控制方程,从而给出扁球壳中心最大凹陷半径随冲击载荷变化的近似表达式,并将此结果与实验进行了比较,二者吻合的还是比较好的。

**关键词** 冲击 等距变形 棱区

## 一、引 言

在冲击载荷作用下结构的非线性动力响应是重要的研究课题。这类问题是很复杂的,它包括了几何非线性,材料非线性及时间效应,而这类问题又有很重要的实际意义,如在航空航天及深水工程中等许多领域均可碰到。目前,关于这类问题的研究文献虽已很多,但大多集中在梁、板方面<sup>[1-5]</sup>。壳结构是一种比梁、板构件更为复杂的元件,这不仅仅在几何上,从力学的角度来讲,其薄膜变形是不可忽略的,这就给求解带来更为复杂的困难。鉴于上述情况,为了简化计算的复杂性,文中设材料是线弹性的,利用 Pogorelov 的几何方法,研究了球形扁壳在冲击载荷作用下的超临界行为,以能量平衡为基础,求得运动的控制方程。最后给出了扁球壳中心最大凹陷半径关于冲击载荷的近似表达式,并给出了一些数值结果,它们与实验数据的吻合还是较好的。

## 二、变形机理

考虑图1所示的扁球壳,其中  $R$  为曲率半径,  $a$  为底圆半径,  $H$  为天高,  $\rho$  为壳的密度。此球壳在其顶部受局部冲击作用。注意到壳体的大变形是在载荷作用点周围形成一近似于等距变形的凹陷,这意味着在扁球壳的变形过程中,几何弯曲起着主要的作用,而中面的薄膜变形是次要的。因此,对于这样一类壳结构,可忽略其中面度量的改变。于是,可通过寻找适当的等距变换,来给出壳的变形。对于球形扁壳,最简单的等距变换是镜面反射(图2)。那么,我们做如下假定:球壳在冲击载荷的作用下,其变形可用这样一个构形来近似,这个构形由两部分组成:一部分是由镜面反射描述的凹陷;另一部分是在凹陷的边缘的“隆起部”,在这里壳开始突然弯曲,我们简称“隆起部”为“棱区”。

下面就来计算变形成能  $U$ 。将球壳分成三个部分: I 中心区域; II 隆起部分; III 外部区域

(图 2), 则总变形能  $U$  为

$$U = U^I + U^II + U^III \quad (1)$$

为了方便起见, 以下用下标“1”表示薄膜变形能, 而用“2”表示弯曲变形能。

对于外部区域 III, 根据变形假定, 主曲率  $k_1, k_2$  的改变等于零, 则有  $U_2^{III} = 0$ ; 而且, 中面的应变很小, 所以  $U_1^{III}$  可以忽略不计。于是, 在外部区域 III, 应变能  $U^III$  等于零。

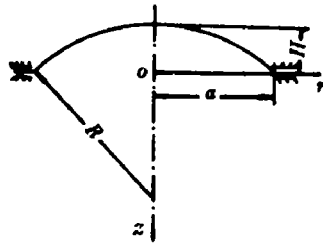


图 1 扁球壳的几何尺寸

Fig. 1 Geometrical sizes of shallow spherical shell

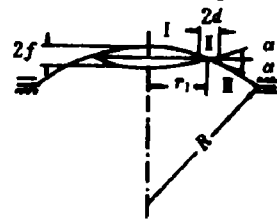


图 2 扁球壳的等距变换

Fig. 2 Isometric transformation of shallow spherical shell

在中心区域 I, 壳体的变形近似于镜面反射, 因而这部分的应变能  $U^I$  主要是主曲率的改变,  $k_1 = -2/R, k_2 = -2/R$  造成的, 所以

$$\begin{aligned} U^I &\approx U_2^I = \frac{D}{2} \iint_{S_1} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) dS \\ &= \frac{4D}{R^2} (1 + \nu) S_1 \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $D$  为抗弯刚度,  $S_1$  为中心区域 I 的面积, 而且, 忽略了薄膜变形  $U_1^I$ 。

这样, 以下的主要目的是来求棱区附近, 也就是第二部分的变形能。在这里, 弯曲应变能和薄膜变形能都是不可忽略的。设棱区的宽度相对很窄, 于是环向应变

$$\epsilon_2 = u/r_1$$

其中,  $u$  为棱区径向位移。由于沿着子午线方向的应变  $\epsilon_1$  很小, 可忽略不计, 则棱区的薄膜变形能  $U_1^II$  为

$$U_1^II = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{S_1} \left(\frac{u}{r}\right)^2 dS \quad (3)$$

弯曲应变能  $U_2^II$  依赖于棱区中面变形后的形状。在这里, 弯曲应变能分成两部分来计算: 一部分为棱区靠近 I 区的内半部分  $U_{2a}^II$ ; 另一部分为靠近 III 区的外半部分  $U_{2b}^II$ 。

首先来计算  $U_{2b}^II$ , 即外半部分的弯曲能。对于扁球壳来讲, 外半部分的主曲率改变

$$k_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = \omega'' \quad (4)$$

其中,  $\omega(r)$  表示在棱区壳的挠度, 以下令  $(\cdot)' \equiv \frac{\partial}{\partial r}(\cdot)$ , 则  $(\cdot)'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\cdot)$ 。于是另一主曲率的改变为(见图 2)  $k_2 = \omega' / aR$ , 得到外半部分的弯曲应变能为

$$U_{\frac{1}{2}} = \pi r_1 D \int_0^{\bar{d}} \left[ \omega'^2 + \left( \frac{\omega'}{aR} \right)^2 + 2\nu \omega' \frac{\omega'}{aR} \right] dS \quad (5)$$

其中,  $2\bar{d}$  为棱区的宽度。由于式(5)中的第二项远小于其余的两项, 可以忽略。第三项是可积的, 利用

$$\omega'(0) = -\alpha, \quad \omega'(\bar{d}) = 0$$

则有

$$U_{\frac{1}{2}} = \pi r_1 D \int_0^{\bar{d}} \omega'^2 dS - \pi r_1 D \frac{\nu \alpha}{R}$$

这样棱区外半部分的全应变能为

$$U_s^1 = \pi r_1 D \int_0^{\bar{d}} \omega'^2 dS + \pi r_1 \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^{\bar{d}} \frac{u^2}{r_1^2} dS - \pi r_1 D \nu \frac{\alpha}{R}$$

对于棱区的内半部分, 可同样计算其完全变形能, 得到

$$U_s^2 = \pi r_1 D \int_0^{\bar{d}} \omega'^2 dS + \pi r_1 \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^{\bar{d}} \frac{u^2}{r_1^2} dS - 4(1+\nu)\pi r_1 D \frac{\alpha}{R} + \pi r_1 D \nu \frac{\alpha}{R} \quad (7)$$

由式(6)和式(7), 棱区的总变形能  $U^1$  为

$$\begin{aligned} U^1 &= U_s^1 + U_s^2 \\ &= 2\pi r_1 \int_0^{\bar{d}} \left[ D\omega'^2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u^2}{r_1^2} \right] dS - \frac{4(1+\nu)\alpha\pi r_1 D}{R} \end{aligned} \quad (8)$$

从上式可知, 只要知道棱区附近描述壳体变形的函数  $u$  和  $\omega$ , 就可以计算壳的总变形能。通过简单的分析可以知道, 在棱区对壳体变形能起主要贡献的是环向的薄膜变形能和子午线方向的弯曲应变能, 而子午线方向的薄膜变形能和环向的弯曲应变能是可以忽略不计的。即我们可以设在宽为  $2\bar{d}$  的棱区, 壳体沿着子午线方向的中面应变  $\epsilon_1 = 0$ , 从而有

$$u' + \alpha\omega' + \frac{1}{2}\omega'^2 = 0 \quad (9)$$

为了求得  $u$  和  $\omega$ , 我们做如下假定:  $u$  和  $\omega$  的选取应使变形能  $U^1$  在条件(9)之下取最小值。这样做是可行的, 因为在棱区这样一个带宽很窄的区域内, 其对壳体整体变形的影响是非常小的。令

$$J = \int_0^{\bar{d}} \left[ D\omega'^2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u^2}{r_1^2} \right] dS \quad (10)$$

则问题变为在约束条件(9)之下, 求  $J$  的最小值, 引入无量纲变量

$$\bar{u} = \frac{u}{dr_1\alpha^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega'}{\alpha}, \quad \bar{S} = \frac{S}{r_1\bar{d}}, \quad \bar{d}^4 = \frac{h^2}{12r_1^2\alpha^2} \quad (11)$$

于是有

$$U^1 = \frac{2\pi r_1^{1/2} E h^{5/2} \alpha^{5/2}}{12^{3/4} (1-\nu^2)} J - \frac{4(1+\nu)\alpha\pi r_1 D}{R} \quad (12)$$

式中

$$J = \int_0^{\bar{d}^*} \left[ \bar{\omega}'^2 + \bar{u}^2 \right] d\bar{S}, \quad \bar{d}^* = \frac{12^{1/4} \alpha^{1/2} \bar{d}}{r_1^{1/2} h^{1/2}} \quad (13)$$

函数  $u, \omega$  的边界条件可设为

$$\omega'(0) = -\alpha, \quad u(0) = 0$$

则  $\bar{\omega}, \bar{u}$  的边界条件为

$$\bar{\omega}(0) = -1, \quad \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{\omega}(d^*) = 0, \quad \bar{u}(d^*) = 0 \quad (14)$$

值得注意的是,这些条件意味着位移  $\bar{u}, \bar{\omega}$  只具有局部意义,而在棱区之外,均等于零。

我们略去推导计算泛函  $J$  的最小值的过程<sup>[6]</sup>,而直接给出算的结果:  $J_0 = \min J \approx 1.15$ 。这样,由式(2)、(8)壳体的总变形能为

$$U = \frac{2\pi r_1^{1/2} E h^{5/2} \alpha^{5/2}}{12^{3/4} (1-\nu^2)} J_0 - \frac{4(1+\nu) \alpha \pi r_1 D}{R} + \frac{4D}{R^2} (1+\nu) S_1 \quad (15)$$

对于扁球壳,有如下关系

$$a \approx r_1/R, \quad 2f \approx r_1^2/R$$

而且  $S_1 = 2\pi R f \approx \pi r_1^2$ 。这里,  $2f$  为壳顶的横向位移。将这些量代入式(15),有

$$U = 2\pi C E (2f)^{3/2} h^{5/2} \frac{1}{R} \quad (16)$$

其中,  $C = J_0 / [12^{3/4} (1-\nu^2)]$ 。式(16)就是所要求的应变能的近似表达式。值得指出的是,在计算  $\min J$  的过程中,用到了棱区宽度  $2\bar{d}$  渐近趋于零这一条件,即  $2\bar{d}$  是无限小的,但不为零。

### 三、扁球壳在其顶部受撞击体的作用

考虑图1所示的扁球壳,其顶部有一质量为  $M$  的圆柱体,它的截面半径  $b$  远小于底圆半径  $a$ ,这样可认为壳体在其顶部受集中冲击荷载作用。设圆柱体突然以速度  $v_0$ , 向下运动。

变形和撞击体速度  $v_0$  之间的关系可由能量平衡

$$U + T_1 + T_2 = T_0 \quad (17)$$

得到。其中:  $U$  为壳的变形能;  $T_0$  为撞击体的初动能;  $T_1$  为冲击过程中撞击体的动能;  $T_2$  为壳的动能。

对于图2所假定的变形,显然壳的位移场为

$$\omega = 2\left(f - \frac{r^2}{2R}\right) \quad (0 \leq r \leq \sqrt{2Rf})$$

$$\omega = 0 \quad (\sqrt{2Rf} \leq r \leq a)$$

这里已忽略棱区的横向位移  $\omega$  和子午线方向位移  $u$  对壳的位移的影响。因为棱区的宽度是无限小的,于是速度场为

$$v = \frac{d\omega}{dt} = 2\dot{f} \quad (0 \leq r \leq \sqrt{2Rf})$$

$$v = 0 \quad (\sqrt{2Rf} \leq r \leq a)$$

则可得到

$$T_1 = M(2\dot{f})^2/2 \quad (18.a)$$

$$T_2 = \pi h \rho R (2\dot{f})^2 f \quad (18.b)$$

$$T_0 = M v_0^2/2 \quad (18.c)$$

将式(18)和式(16)代入式(17)有

$$\frac{2\pi CEh^{5/2}}{R}(2f)^{3/2} + \frac{1}{2}M(2\dot{f})^2 + \pi h\rho R(2\dot{f})^2 f = \frac{1}{2}Mv_0^2 \quad (19)$$

式(19)就是运动的控制方程,它是一阶非线性常微分方程,初值条件为

$$2f|_{t=0} = 0 \quad (20)$$

可采用 Runge-Kutta 方法来求解。

在许多工程实际问题中,往往最关心的是壳的最大位移  $2f^*$  与撞击体的初速度  $v_0$  之间的关系,而对于其运动过程往往是不太关心的。这一点只需在(19)式中令  $2\dot{f}=0$  就可得到。

$$2f^* = \frac{R^{2/3}M^{2/3}v_0^{4/3}}{4^{2/3}\pi^{2/3}C^{2/3}E^{2/3}h^{5/3}} \quad (21)$$

窝陷的最大半径  $r^*$  为

$$r^* = \sqrt{2Rf^*} \quad (22)$$

下面来考虑文献[8、9]中所做实验用的铝合金扁球壳:曲率半径  $R=221.2\text{mm}$ ,底圆半径  $a=160\text{mm}$ ,弹性模量  $E=66.76 \times 10^3\text{N/mm}^2$ ,泊松系数  $\nu=0.3$ ,密度  $\rho=2.9\text{g/cm}^3$ ,圆柱体质量  $M=40\text{g}$ 。图3给出不同冲击速度下,壳最大窝陷半径的理论值与实验值的关系曲线。表1给出不同初速下,  $2f^*$  和  $r^*$  的值。表2给出  $r^*$  的理论值和实验值。

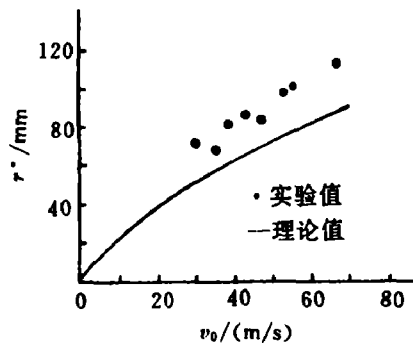


图3  $r^*$  的理论值与实验值的比较

Fig. 3 Comparison of experiments in references [8,9] with present theory

• Experimental value, — Theoretical value

表1 不同的  $v_0$  之下,  $2f^*$  和  $r^*$  的值

Table 1 The values of  $2f^*$  and  $r^*$  in different values of  $v_0$

$v_0/(m/s)$	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$2f^*/(mm)$	1.17	2.93	5.00	7.30	9.80	12.47	15.29	18.23	21.30
$r^*/(mm)$	15.75	24.92	32.56	39.34	45.58	51.42	56.93	62.17	67.20

表2 不同的  $v_0$  之下,  $r^*$  的理论和实验值Table 2 Comparison of theoretic and experimental values of  $r^*$  in different values of  $v_0$ 

$v_0/(m/s)$	32	34.75	38	43.5	45.9	53.4	55.05	67	备注
$r_i^*$	53.65	56.65	60.10	65.70	68.07	75.23	76.76	87.38	理论
$r_e^*$	73	68	79.5	89	87.5	98	101	114	实验

#### 四、球形扁壳在其顶部受局部初速度的作用

在图1所给的扁球壳,设在其顶部半径为  $b$  的球面区域上,分布有大小为  $v_0$  的初速度,这里  $b$  远小于  $a$ 。从能量的观点来讲,壳体在初始时刻,具有  $E_0 = \pi \rho b^2 h v_0^2 / 2$  的动能。于是,与前一节的讨论一样,可得壳顶最大位移  $2f^*$  与  $v_0$  的关系

$$2f^* = \frac{R^{2/3}}{4^{2/3} \pi^{2/3} C^{2/3} E^{2/3} h^{5/3}} (M v_0^2)^{2/3} \quad (23)$$

其中,  $M = (1/2) \pi \rho h b^2$ , 窝陷的最大半径  $r^*$  为

$$r^* = \sqrt{2Rf^*} \quad (24)$$

在表3中,给出在不同  $v_0$  之下,壳的最大位移和最大窝陷半径的值,这里壳体的几何尺寸,弹性常数与“三”、中一样。

表3 不同的  $v_0$  之下,  $2f^*$  和  $r^*$  的值Table 3 The values of  $2f^*$  and  $r^*$  in different values of  $v_0$ 

$v_0/(m/s)$	5	25	50	75	100	125	150	175	200
$2f^*/(mm)$	0.06	0.49	1.23	2.12	3.09	4.16	5.27	6.48	7.73
$r^*/(mm)$	3.57	10.19	16.15	21.20	25.59	29.70	33.11	37.06	40.48

#### 五、结束语

结构在冲击载荷作用下的动力响应是一个非常复杂的课题。文中针对扁球壳,采用几何研究的方法,并假定材料为弹性的,将问题简化为单自由度问题,较简便地给出了壳受冲击后,窝陷最大半径与冲击速度之间的关系,且与实验结果吻合的较好。另外,在冲击载荷下,中心窝陷和棱区将产生塑性变形,对于这种情形,我们仅指出,采用文中的几何研究方法,亦可给出解答,这里就不讨论了。

武际可教授给本工作以很多帮助,在此表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Goldsmith W. Impact, Edward Arnold Ltd, 1960
- [2] Zhang T G, Yu T X. The Large Rigid-plastic Deformation of a Circular Cantilever beam Subjected to Impulsive Loading. Int. J. Impact Engng. 1986, 4(4): 229-241

- [3] 赵隆茂, 杨桂通. 刚粘塑性圆板有限变形动力响应分析. 固体力学学报, 1986, 3, 207-215
- [4] 邓梁波, 叶天麒. 圆板在物体撞击下的非线性动力响应. 力学学报, 1990, 3, 420-428
- [5] Ashwini Kumar. Dynamic Plastic Response of Circular Plates in A Damping Medium. *Int J Impact Engng*, 1987, 6(4), 285-290
- [6] Pogorelov A V. *Geometric Shell Stability Theory*. Izd. Nauka. Moscow (1966). English Translation U. S Air Force FTD-ID(RS)T-2219-78
- [7] Lukaszewicz S. Geometrical Elements Method for the Solution of Non-linear Shell Problems. *J Aeronaut Soc India*, 1985, 37, 297-312
- [8] 杨桂通. 结构在冲击载荷作用下的实验研究. 力学学报, 1990, 22(3), 374-379
- [9] 穆建春. 扁球壳在撞击作用下动态行为的实验研究与理论分析. [硕士论文]. 太原: 太原工业大学, 1988

## SUPERCritical DEFORMATIONS OF SHALLOW SPHERICAL SHELLS UNDER IMPACT

Ning Jianguo Yang Guitong

(Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024)

**ABSTRACT** This paper discusses the supercritical deformation of shallow spherical shells under impact by using the geometrical theory of thin-shell stability proposed by A. V. Pogorelov. This method is based on the experimental observations, that the large deformation of shell takes a form resembling one of the forms of its isometric transformation. First of all, the approximate formulae of deformation energy of shell are derived. Secondly, two different ways of impact on apex of shallow spherical shell are considered and the governing equation is derived by using the energy balance. Finally, an approximate formulae of maximal hollow radius depending on impact velocities are derived. The present analysis is shown to agree with some available experimental results.

**KEY WORDS** impact, isometric deformation, ridge