

高速钢球在水中贯穿过程的数值计算

王肖钧

赵新

(中国科学技术大学 合肥 230026) (合肥炮兵学院 合肥 230017)

摘要 本文采用二维有限元数值计算方法对水中高速钢球的侵彻贯穿作用及贯穿通道的形成和发展进行了数值模拟计算,给出了钢球侵彻速度水中压力波和空腔发展,这些结果与实验观察较为吻合。本文的工作说明,数值方法可以作为研究创伤力学的重要手段,有着广阔的应用前景。

关键词 数值模拟 有限元 弹道学

一、引言

随着科学技术的发展,尤其是传感器中技术和高速摄影、闪光 X 照相术的应用,创伤弹道学在这几年有了迅速发展。实验室里人们通常用生物组织,例如猪、狗后肢作为靶标,观察高速弹丸贯穿过程中对它的伤害。从力学观点看,生物组织不适宜作定量研究。因此在创伤力学中常用物性较易于描述和控制的物质,例如水、肥皂、明胶等来取代和模拟生物肢体,积累了不少实验资料。但是有关这一领域的工作主要还停留在经验半经验分析上,理论研究跟不上实际问题的需要。B. Janzon^[1]曾用数值模拟方法计算了直径6mm的钢球,以初速 $v_0 = 1000\text{m/s}$ 入射水中时的早期图象,讨论了水中冲击波的生成及其运动规律。但是 Janzon 的计算时间过于短暂,未能就创伤力学中最为关心的致伤因素,如空腔的出现及扩张作出分析。他的工作可以被看成为运用数值方法研究创伤力学的尝试。

本文从连续介质力学的基本方程出发,基于二维有限元数值离散方法,对高速钢球(初速为700~1000m/s)在水中的侵彻贯穿及贯穿通道的生成和发展进行数值模拟计算,所得结果与实验观察基本相符。这表明本文的方法是有效的。本文的工作为在创伤力学中采用数值模拟方法提供了有益的经验。

二、基本方程与计算方法

Lagrange 坐标下绝热运动的动量守恒和能量守恒方程可以分别写成

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$dE = \sigma_{ij} de_{ij} \quad (2)$$

式中: ρ 为密度; u_i 为速度分量; σ_{ij}, e_{ij} 表示应力分量和应变分量; E 是单位体积变形能。

假定钢球为流体弹塑性体。状态方程为如下形式的 Grüneisen 方程

$$p(V, E) = p_r(V) + \Gamma E(1 + \mu) \quad (3)$$

式中, V 为比容, Γ 为 Grüneisen 参数; $\mu = (\rho/\rho_0) - 1$. 设钢球为 Mises 理想弹塑性体, 则屈服条件是

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}\right)^{1/2} = \sigma_y \quad (4)$$

式中, σ_y 表示简单拉伸条件下的屈服应力; S_{ij} 为应力偏量; $\bar{\sigma}$ 为等效应力. 数值计算里增量型弹塑性本构关系可以统一地表示成

$$(\dot{S}_{ij})_e = 2G(\dot{\epsilon}_{ij}) + \omega_\alpha S_{ij} + \omega_\beta S_{ik} \quad (\text{弹性}) \quad (5.1)$$

$$(\dot{S}_{ij})_p = \frac{\sqrt{2/3} \sigma_y}{\sqrt{1/2 S_{ik} S_{ik}}} (\dot{S}_{ij})_e \quad (\text{塑性}) \quad (5.2)$$

式中: “ \cdot ” 表示对时间的微商; $\dot{\epsilon}_{ij}$ 是偏应变率, 它与应变率 $\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)[(\partial u_i/\partial x_j) + (\partial u_j/\partial x_i)]$ 之间的关系为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_v \delta_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}$$

上式: $\dot{\epsilon}_v = (1/3)(\dot{V}/V)$ 表示体积应变率. (5.1) 式右端后两项是二维运动中出现的旋转修正项, 其中 ω_{ij} 为

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

靶标水作为 Stokes 粘性流体处理. 压力 p 服从正压型的弹性流体方程

$$\frac{p+B}{1+B} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \quad (6)$$

式中, B, n 为材料常数. 应力偏量 S_{ij} 服从 Stokes 流体的本构关系

$$S_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (7)$$

式中, η 是与温度 T 有关的粘性系数, $\eta = A/(T - T_0)^r$.

不考虑体力和表面力作用时, 运动方程的有限元离散可直接用变分 δu_i 乘(1)式两端, 并在解域 Ω 内积分得到. 于是

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho \dot{u}_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (8)$$

式中 $\sigma_{ij,j}$ 表示 $\partial \sigma_{ij}/\partial x_j$. 上式右端项作分部积分, 利用 Gauss 定理和表面力 $\tau_i = \sigma_{ij} n_j$ 为零的假定, (8) 式成为

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho \dot{u}_i d\Omega = - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (9)$$

将解域 Ω 作有限元划分

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i \quad (10)$$

式中, Ω_i 为有限单元体积, n 表示单元个数. 于是(9)式成为

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \delta u_i \rho \dot{u}_i d\Omega = - \sum_i \int_{\Omega_i} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (11)$$

对单元 Ω_i 引入插值函数 $N_l(x_i)$ (l 表示单元节点). 于是单元内速度场 $u_i(x_j, t)$ 可通过半离散化方法表示成

$$u_i(x_j, t) = N_l(x_j) u_{li}(t) \quad (12)$$

上式中 u_{li} 表示单元节点 l 上速度分量, 它只是 t 的函数. 于是应变率

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (B_{ij}U_{ii} + B_{ji}U_{jj}) \quad (13)$$

式中 $B_{ij} = \partial N_i / \partial x_j = N_{i,j}$ 。将(12)、(13)式代入(11)式, 对单个单元 Ω 而言, 有

$$\delta u_{ii}(t) \int_{\Omega} N_i \rho N_j d\Omega \dot{u}_{jj}(t) = - \delta u_{ii}(t) \int_{\Omega} B_{ij} \sigma_{ij} d\Omega \quad (14)$$

记

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i \rho N_j d\Omega, \quad f_{ij}^m = - \int_{\Omega} B_{ij} \sigma_{ij} d\Omega \quad (15)$$

由变分 $\delta u_{ii}(t)$ 的任意性可得

$$M_{ij} \dot{u}_{jj}(t) = f_{ij}^m \quad (16)$$

我们再次指出, $\dot{u}_{jj}(t)$ 表示单元节点 J 上的加速度分量。 f_{ij}^m 是与单元 Ω 相关的节点 I 上的内力分量。为计算方便, 我们常用集中质量法来取代(15)式中的 M_{ij} 。此时有 $M_{ij} = m \delta_{ij}$, m 表示将 Ω 的总质量平均分配到节点上。于是(16)式可进一步写作

$$\dot{u}_{ii}(t) = \frac{1}{m} f_{ii}^m \quad (17)$$

将全部单元总装起来, 最后得到计算节点加速度的半离散化运动方程

$$\dot{u}_{ii}(t) = \frac{1}{\bar{m}_i} F_{ii}^m \quad (18)$$

式中, \bar{m}_i 表示与节点 I 有关的所有单元对节点 I 的质量贡献; F_{ii}^m 则为相应的内力贡献。(18)式是独立的方程式。已知节点集中质量 \bar{m}_i , 并求出节点总内力 F_{ii}^m 后, 我们立即可以求得该节点的加速度 $\dot{u}_{ii}(t)$, 而不需要去解一个线性代数方程组。这给数值计算带来极大方便。

在时间域内对(18)式进行数值积分, 可得节点速度 u_{ii} 。再借(13)式和相应的本构方程可求出单元应变场 ϵ_{ij} 和应力场 σ_{ij} 。

本文模拟计算中用了线性三角形单元, 插值函数 $N_i(x_j)$ 为

$$N_i(x_1, x_2) = a_i + b_i x_1 + c_i x_2 \quad (19)$$

式中, a_i, b_i, c_i 是由单元节点位置确定的常数。显然此时 $B_{ij} = N_{i,j}$ 为常数 ($B_{i1} = b_i, B_{i2} = c_i$)。因此应变率 $\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)(B_{ij}u_{ii} + B_{ji}u_{jj})$ 也是常数, 这种单元就是常应力常应变单元。

为了克服 Lagrange 方法计算物质界面相对运动的困难, 我们在钢球表面和水介质的部分单元上设置了若干条滑移线。有关滑移线的设置及滑移计算方法请参阅文献^[2]。

为了防止钢球射入水中后冲击波引起的数值振荡, 引入混合型体积人工粘性来加以控制,

$$Q = \begin{cases} C_L \rho C_0 h |\dot{\epsilon}_v| + C_0^2 \rho h^2 (\dot{\epsilon}_v)^2 & (\dot{\epsilon}_v < 0) \\ 0 & (\dot{\epsilon}_v > 0) \end{cases} \quad (20)$$

式中, C_L, C_0 是无量纲常数; C_0 表示声速; h 是三角形单元的特征尺度。

当用中心显式格式在时间域里对(18)式进行数值积分时, 时间步长受 Courant 稳定性条件控制。

三、模拟计算和结果讨论

直径为 1cm 的钢球以初速 v_0 垂直射入一直径为 34cm、深 40cm 的柱形水面。设水的

上下表面为自由面,四周为刚性固壁。整个计算域被划分成 3472 个三角形单元,节点 1826 个。计算中采用的主要材料参数如下:

钢球: $\rho_0=7.8\text{g/cm}^3, G=80\text{GPa}, \sigma_r=1.43\text{GPa}, \Gamma=1.2$ 。

水: $\rho_0=1.0\text{g/cm}^3, n=7.0, \gamma=1.54, A=0.5985, B=0.3\text{GPa}, T_s=230\text{K}$ 。

图 1 表示 $v_0=1000\text{m/s}$ 时的计算结果。当 $t=1.6\text{ms}$, 钢球抵达下表面。此时水的上表面边缘隆起呈弹坑状,形成所谓激溅。同时留下一条锥形贯穿通道(或称空腔)。这些现象与高速摄影观察到的实验结果相一致^[3]。钢球飞离水柱后,通道四周介质在其惯性作用下继续对外扩展(图 1b, 1c),这就是空腔的形成与发展。图中出口附近呈喇叭状,这是由于将下表面取为自由面的结果。空腔的剧烈运动造成周围生物组织的撕裂,是致伤的重要因素。

图 2 是两种弹速下空腔某剖面上腔径随时间发展的早期计算结果。实验观察到^[4]直径为 6.35mm 的钢球在以 $v_0=1365\text{m/s}$ 射入水柱时,约在 10ms 出现最大空腔,最大腔径约为弹径的 20 倍。之后,弹性流体在容器壁面的反射作用下使得空腔回缩,空腔经过数次脉动而塌陷,直至消失。整个过程历时约 60~70ms。数值计算难以模拟空腔发展至消失的

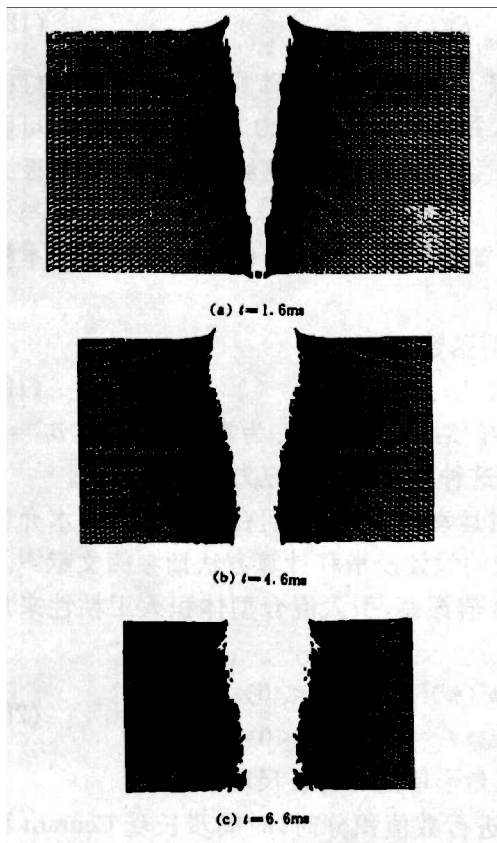


图 1 贯穿通道的形成与发展
Fig. 1 Formation and development of penetrating passage

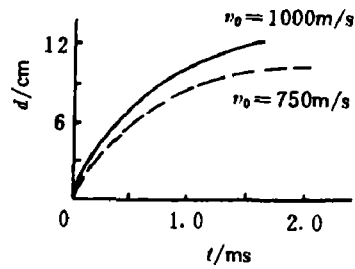


图 2 空腔早期发展
Fig. 2 Early stage of the cavity

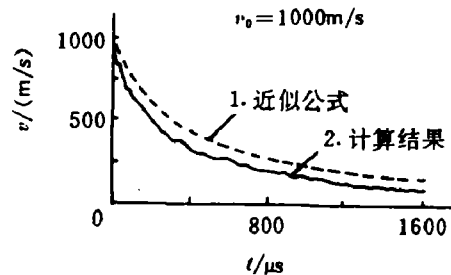


图 3 钢球侵彻速度随时间的变化
Fig. 3 Penetrating velocity of steel ball versus time
1. Approximate solution, 2. Numerical results

全过程。这不但因为机时可观,并且瞬态力学程序的数万次循环计算引起的积累误差也是不容忽视的。我们的模拟计算给出,当 $t=6.6\text{ms}$ 时空腔最大剖面处的腔径达 19cm ,约为钢球直径的 19 倍。由于未对该剖面腔径进行存储,故无法给出其发展曲线。

弹丸在靶体中的侵彻运动规律是弹道力学的重要研究内容。基于刚体力学给出的弹丸侵彻过程所受的总阻力 F 为

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho S v^2 \quad (21)$$

式中: C_D 是阻力系数; ρ 是靶材密度; S 表示弹体受阻有效面积; v 是弹丸侵彻速度。实验指出, C_D 在一定速度范围内可取成常数。于是从牛顿第二定律立即可以得到侵彻速度 v ,

$$v = v_0 e^{-\alpha t} \quad \text{或者} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \alpha t \quad (22)$$

式中: $\alpha = (1/2) C_D \rho S / m$, m 为弹丸质量。如取实验值 $C_D = 0.35$, 则 $\alpha = 3.365$ 。图 3 是钢球侵彻速度随时间的变化曲线。图中虚线表示按 (22) 式计算的结果。可见在侵彻早期,数值计算与经验公式相差不大。但在后期,当侵彻速度较低时,尽管两条曲线趋势接近,量值上相差仍然不小。这与 (22) 式假定了 C_D 为常数有关。事实上随着侵彻速度的降低, C_D 应该增大。如果能通过实验测出与 v 相关的 C_D 来导出 (22) 式,那末两者一定会吻合得更好。

弹丸入射靶体引起的冲击波效应是早期致伤的重要因素。模拟计算指出,当 $v_0 = 1000\text{m/s}$ 时初始冲击波峰值可达上万个大气压。但传播过程中因几何扩散而迅速衰减。图 4 是 $r = 6.4\text{cm}$, $z = 4.7\text{cm}$ 点上的压力时程曲线。虽然此时击波峰值已经很低 ($< 4 \times 10^6\text{Pa}$),并且波阵面也被抹平成连续波,但击波在容器壁面反射回来的二次压缩效应依然

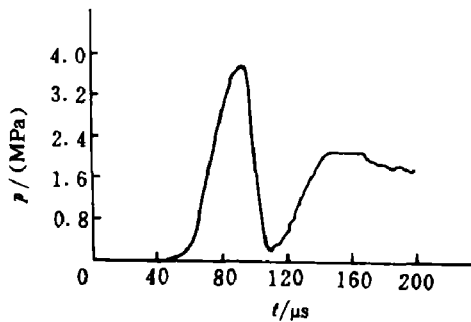


图 4 $r = 6.4\text{cm}$, $z = 4.7\text{cm}$ 处的压力波形

Fig. 4 Pressure history at $r = 6.4\text{cm}$, $z = 4.7\text{cm}$

十分明显,这与实验记录到的波形十分相似。此外我们还应清楚,虽然冲击波在传播过程中衰减很快,但对生物组织说来,几十个大气压的超压仍然是无法承受的,足以引起远离贯穿通道生物组织的损伤。

综上所述,模拟计算较全面地讨论了高速钢球入射水柱引起的力学效应。计算给出的弹丸侵彻运动、空腔的生成和发展、水中压力波的传播等,与实验观察或经验公式基本相符。这说明本文的方法是有效的。如果在后期计算里(例如钢球穿离水柱后),能通过重布网格法来减少单元数,增大时间步长 Δt ,那末数值模拟空腔脉动直至塌陷的全过程都是可能的。

参 考 文 献

- [1] Janson B, Persson J. Simulation and Visualization of Wound Ballistic Phenomena. *J of Trauma*, 1990, 6 (2), 3-12
- [2] 王肖钧, 胡秀章, 李永池, 张晓武. EPIC-2 对高速撞击的数值模拟. *中国科技大学学报*, 1990, 20(71), 25-32
- [3] 陈先富. 弹丸入水空穴的试验研究. *爆炸与冲击*, 1985, 5(4), 70-73
- [4] 刘蔚秋. 不同投射物水中弹后空腔的特征. *中国兵工学会论文选编*, 1986, (14), 189-192

NUMERICAL STUDY OF A STEEL BALL PENETRATING IN WATER WITH HIGH SPEED

Wang Xiaojun Zhao Xin*

(*University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

(* *Hefei Artillery Academy, Hefei 230017*)

ABSTRACT The penetrating process of a steel ball with high speed in the water and the development of a penetrating passage (namely cavity) are simulated by a two dimensional finite element program. The results of the penetrating velocity of steel ball, the pressure waves in water and the development of cavity are obtained and they are coincident with that observed in the experiment. It is shown that the numerical simulations can be considered as an important method in the study of Wound Ballistics and has a bright future in the practical problem.

KEY WORDS numerical simulation, finite element, ballistics