

载荷作用区域对刚塑性简支梁 动力响应的影响

赵亚溥

(北京大学力学系 北京 100871)

摘 要 本文研究了载荷作用区域大小对刚塑性简(固)支梁塑性动力响应的影响,得到了中、高载界限值的表达式,并对它进行了详细的讨论.文中还给出了中载和高载情况时各相的具体解答.

关键词 载荷作用区域 梁 塑性动力响应

1. 引 言

全梁承受均布冲击外载作用的弹塑性或刚塑性简支梁的动力响应问题已得到了较广泛且深入的研究^[1].在工程实际中,简(固)支梁可能某一部分受均布冲击载荷作用,因而研究载荷作用区域大小对梁塑性动力响应的影响不但具有一定的理论价值,且具有实际意义.

承受均布载荷作用的刚塑性简支梁的动力响应问题分为两种载荷情况:当 $q_0 \leq q \leq 3q_0$ 时为中载,当 $q > 3q_0$ 时为高载.为了讨论载荷作用区域的影响,本文研究了如图1所示的中部区域承受均布冲击载荷作用刚塑性简(固)支梁的动力响应问题,并就载荷区域的大小对中、高载界限值的影响进行了详细的讨论.

2. 中载情况

所谓“中载”是指 $q_0/a(2-\alpha) \leq q \leq q_0/[a(2-\alpha)-(2/3)]$.如图1所示刚塑性简支梁,由极限分析知其静态极限载荷为

$$q^* = \frac{q_0}{a(2-\alpha)} \quad (1)$$

式中: $q_0 = 2M_0/l^2$, $\alpha = a/l$.

当 $q \geq q^*$ 时梁开始运动;而当载荷不太大时其运动模式如图2(a)所示.由问题的对称性,只需考虑 AC 段,对 A 点取动量矩定理得

$$\int_0^l qx dx - M_0 = \frac{1}{3} ml^3 \dot{\omega}$$

上式整理得

$$ml\dot{\omega} = \frac{3}{2} \alpha(2-\alpha)(q - q^*) \quad (2)$$

全梁在 $x=l$ 处弯矩取最大值,要求

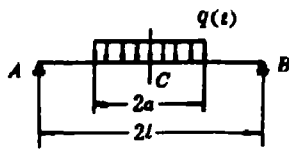


图 1
Fig. 1

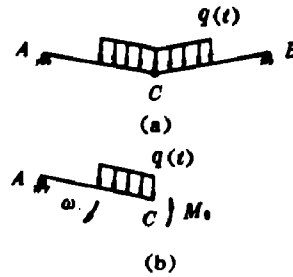


图 2
Fig. 2

$$\frac{d^2 M}{dx^2} \Big|_{x=l} = -(q - m\dot{\omega}l) \leq 0$$

由(2)式 $\dot{\omega} \geq 0$ 和上式综合得

$$\frac{q_0}{\alpha(2-a)} \leq q \leq \frac{q_0}{\alpha(2-a) - \frac{2}{3}} \quad (3)$$

若设梁中点的挠度为 $W_0(t)$, 则有:

$$W_0(t) = \frac{3}{2m}\alpha(2-a) \left(\int_0^t q dt - q^* t \right) \quad (4)$$

$$W_0(t) = \frac{3}{2m}\alpha(2-a) \left(\int_0^t dt \int q dt - \frac{q^*}{2} t^2 \right) \quad (5)$$

$$\int_0^{t_f} q dt - q^* t_f = 0 \quad (6)$$

$$W_0(t_f) = \frac{3}{2m}\alpha(2-a) \left[\int_0^{t_f} dt \int q dt - \frac{1}{2q^*} \left(\int_0^{t_f} q dt \right)^2 \right] \quad (7)$$

上面诸式中 t_f 为响应终止时间, m 为单位长度梁质量。当 q 的具体形式给定时, (6) 和 (7) 式即可随之确定。

3. 高载情况

所谓高载是指 $q > q_0 / [\alpha(2-a) - (2/3)]$ 。此时梁的运动模式如图 3 所示, 首先在梁中心附近形成一个塑性区段 CD , 而 C 和 D 为两个移行塑性铰。由于对称性, 研究时只需考虑梁之半。对于平台区, 有关系式

$$\dot{\omega}_2 = \frac{q(t)}{m}, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{1}{m} \int q dt \quad (8)$$

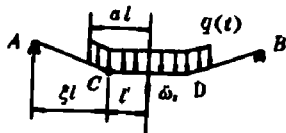


图 3
Fig. 3

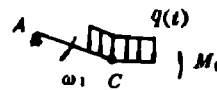


图 4
Fig. 4

设刚性区段角速度为 ω_1 , 由移行铰处速度连续条件可得

$$\xi l \omega_1 = \dot{\omega}_2 = \frac{1}{m} \int q dt \quad (9)$$

如图4所示半梁对A点应用动量矩定理, 可得下式

$$m \left[\int_0^a \omega_1 x^2 dx + \int_{\xi l}^l \dot{\omega}_2 x dx \right] = \frac{l^2}{2} \alpha (2 - \alpha) \int_0^t q(t) dt - M_0 t$$

上式可进一步化简为

$$\xi^2 = 6M_0 t / \left[l^2 \int_0^t q(t) dt \right] + 3[1 - \alpha(2 - \alpha)] \quad (10)$$

则任一时刻 t 塑性铰的位置可由下式来确定

$$(\xi l)^2 = \frac{6M_0 t}{\int_0^t q(t) dt} + 3[1 - \alpha(2 - \alpha)] l^2 \quad (11)$$

当 $dq(t)/dt \leq 0$ 时, 塑性铰的初始位置为

$$(\xi_0 l) = \frac{6M_0}{q(0)} + 3[1 - \alpha(2 - \alpha)] \quad (12)$$

第一相运动至塑性区收缩到梁中点时为止, 设时间为 t_* , 由 $\xi=1$ 时, $t=t_*$, 则有

$$\frac{6M_0 t_*}{l^2 \int_0^{t_*} q(t) dt} + 3[1 - \alpha(2 - \alpha)] = 1 \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1)_* &= \frac{1}{ml} \int_0^{t_*} q(t) dt \\ \omega_0(t_*) &= \frac{1}{m} \int_0^{t_*} dt \int_0^t q(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)为第一相末梁的角速度和梁中点的挠度。在第二相运动中, 梁只在中点有一个固定塑性铰, 因此梁的角加速度仍取(2)式, 即

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2ml} \left[\alpha(2 - \alpha)q(t) - \frac{2M_0}{l^2} \right] \quad (15)$$

积分上式可得第二相梁的角速度为

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1)_* + \int_{t_*}^t \dot{\omega} dt \\ &= \frac{1}{ml} \left[\int_0^{t_*} q dt + \frac{3\alpha(2 - \alpha)}{2} \int_{t_*}^t q dt - 3 \frac{M_0}{l^2} (t - t_*) \right] \end{aligned}$$

响应终止时间 t_f 由 $\omega=0$ 确定, 有

$$\int_0^{t_*} q dt + \frac{3\alpha(2 - \alpha)}{2} \int_{t_*}^{t_f} q dt - \frac{3}{2} q_0 (t_f - t_*) = 0 \quad (16)$$

梁中点残余挠度为

$$\begin{aligned} \omega_0(t_f) &= \omega_0(t_*) + l \int_{t_*}^{t_f} \omega dt \\ &= \frac{1}{m} \left[\int_0^{t_*} dt \int_0^t q dt + (t_f - t_*) \int_0^{t_*} q dt + \frac{3\alpha(2 - \alpha)}{2} \int_{t_*}^{t_f} dt \int_{t_*}^t q dt - \frac{3}{4} q_0 (t_f - t_*)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

4. 讨 论

1. 关于中、高载界限值 $q_{\#} = q_0 / [\alpha(2-\alpha) - (2/3)]$

(1) 当 $\alpha=1$ 即全梁均布外载时, $q_{\#} = 3q_0$

(2) 当 $\alpha = (3 - \sqrt{3})/3 (\approx 0.423)$ 时, 有 $q_{\#} \rightarrow \infty$, 此值为 α 的界限值, 此时说明中载的上限为无限大。

(3) 当 $(3 - \sqrt{3})/3 < \alpha \leq 1$ 时, $q_{\#}$ 为有限值, 其变化范围为 $3q_0 \leq q_{\#} < \infty$, 此时本文所得结果适用。

$q_{\#}/q_0$ 随 α 的变化关系由下表所示。

α	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
$q_{\#}/q_0$	32.43	12.00	5.77	4.11	3.41	3.09	3.02

(4) 当 $0 \leq \alpha < (3 - \sqrt{3})/3$ 时, $q_{\#}$ 已为负值, 这和实际情况不符, 说明上述所设变形机构已不再成立。此时因为载荷作用尺寸较小, 冲击载荷的局部效应较为显著。

2. 本文详细讨论了载荷作用区域对中、高载界限值、移行塑性铰的位置以及响应时间和残余变形的影响。如果 $\alpha=1$, 则本文所得结果完全退化为已经熟知的结果^[1]。

3. 上述关于简支梁动力响应的结果, 可直接移用到两端固支梁^[1], 只需将所有公式内的 M_0 代换为 $2M_0$ (亦即将 q_0 代换为 $2q_0$) 即可。

4. 应用本文的思路还可以研究载荷作用区域对各种形状的板以及壳体动力响应的影响, 关于简支圆板中心圆域受均布冲击载荷时的塑性动力响应问题将另文发表。

参 考 文 献

- [1] 杨桂通, 熊祝华. 塑性动力学. 北京: 清华大学出版社, 1984, 81~136
 [2] Symonds P S, Mental T J. J Mech Phys Solids, 1958, 6, 186~202
 [3] 王仁等. 塑性力学基础. 北京: 科学出版社, 1982, 57~68, 493~496

THE INFLUENCE OF LOADING AREA ON THE DYNAMIC PLASTIC BEHAVIOR OF SIMPLY SUPPORTED RIGID-PLASTIC BEAMS

Zhao Yapu

(Dept. of Mechanics, Beijing Univ., Beijing 100871)

ABSTRACT The influence of the size of loading area on the dynamic plastic response of simply supported (or clamped) rigid-plastic beams is studied and the expressions of the value of medium load and high load are obtained and also discussed in detail. The specific solutions of each moving phase in both medium load and high load are presented

KEY WORDS loading area, beams, dynamic plastic behavior