

有限元畸变单元离散模型中的SH波动*

刘晶波 姚玲

(哈尔滨工业大学力学系, 哈尔滨 150080)

摘要 本文采用晶格动力学分析方法,研究了有限元畸变单元离散模型中的SH波的传播规律。结果表明单元畸变对波动规律影响显著,当单元畸变较小时,单元畸变对波动传播并不产生明显的不利影响,当单元畸变较大时,这一影响不可忽略。通过详细分析和对比集中质量、混合质量和一致质量模型中的波动规律,评价了不同有限元模型的抗畸变能力。文中还讨论了时域离散化与单元畸变联合作用对波动传播的影响。

关键词 有限元 离散模型 单元畸变 波动

有限元法因其良好的适应性和高度的灵活性而在广泛的科学研究领域和工程问题中得到使用,其中包括复杂介质中波动问题的研究。当用有限元离散模型代替连续介质时将会产生离散化误差,对这一误差的研究是指导正确实现波动有限元模拟的基础,对于建立波动问题有限元离散化准则和建立从有限元分析结果中提取正确信息的原则均有意义^[1-6]。同时也是无限介质内波动有限元分析中采用的人工边界的误差分析及稳定性分析的基础^[7]。波动问题有限元分析中的离散化误差是由于波在有限元离散模型中的传播规律与连续介质中的传播规律不同引起的。目前,对一维离散模型中的波动规律已进行了系统而深入的研究,一维弹性问题基本解决,波在二维离散模型中的传播规律也做了较深入的研究,Mullen和Belytschko^[8]采用晶格动力学分析方法研究了集中和一致质量有限元模型中SH波传播规律,Celep^[9]应用晶格动力学分析方法研究了多种质量模型中P、SV波传播的频散特性,Celep和Turhand^[10]也分析过P、SV波在弹性半空间自由表面上反射时的一些特征,本文作者^{[11],[12]}也曾采用分离变量法及推广的晶格动力学分析方法较系统地研究了多种质量有限元模型中出平面和平面内波动的频散、截止频率、寄生振荡、偏振漂移和各向异性等性质。这些研究结果对理解离散模型中的波动规律是极为重要的,基于这些研究成果已提出了一些有效的有限元离散化准则,并用于指导波动问题有限元分析中。然而,在以往的研究中均局限于分析单元尺寸变化,即单元大小对波动规律的影响,而未分析单元形状变化的影响。例如,在四边形单元模型中,仅局限于采用矩型单元。之所以如此,是因为考虑单元形状变化会使问题变得更复杂。在复杂介质内的波动有限元分析中为模拟不规则的边界形状,单元形状的畸变一般不可避免,因此,分析波在离散模型中的传播规律时,应该研究单元畸变的影响。另外,在波动问题分析的时域直接法中需要采用逐步积分法,时域离散化对波动规律也将产生影响,时域离散化和单元畸变联合作用的影

* 地震科学联合基金资助。

1992年6月3日收到原稿,9月15日收到修改稿。

响也是一个值得研究的问题。本文采用出平面波动问题的混合质量模型,分析了单元畸变对波动规律的影响,同时也分析了时域离散化和单元畸变联合作用对波传播规律的影响。

1 节点运动方程

分析任意形状单元构成的有限元离散模型中的波动规律是困难的,为了对这一问题获得一个基本的认识,本文限于讨论矩形单元畸变的结果。为此,采用图1所示离散模型,单元的一边与坐标轴 x 平行,另一边与 y 轴夹角为 φ ,设沿 x 轴向的空间离散步距为 Δx ,沿单元另一边的空间步距为 $\sqrt{\beta} \Delta x$, β 为正的实数。采用四节点等参单元,单元刚度阵为

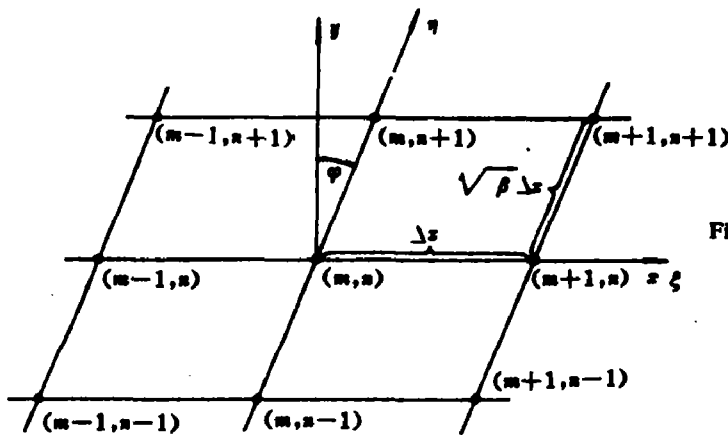


图1 有限元离散模型及坐标系
Fig. 1 Finite element discrete model and the coordinate system

$$G = \frac{\rho c_0^2}{6 \sqrt{\beta} \cos \varphi} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 $A_1 = 2\beta + 2 - 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $A_2 = -2\beta + 1$, $A_3 = -\beta - 1 + 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $A_4 = \beta - 2$, $B_1 = -2\beta + 1$, $B_2 = 2\beta + 2 + 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $B_3 = \beta - 2$, $B_4 = -\beta - 1 - 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $C_1 = -\beta - 1 + 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $C_2 = \beta - 2$, $C_3 = 2\beta + 2 - 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $C_4 = -2\beta + 1$, $D_1 = \beta - 2$, $D_2 = -\beta - 1 - 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, $D_3 = -2\beta + 1$, $D_4 = 2\beta + 2 + 3\sqrt{\beta} \sin \varphi$, ρ 为质量密度, c_0 为均匀弹性介质的剪切波速。在波动问题分析中,常采用集中质量和一致质量有限元模型。一般认为波在集中质量模型中的传播速度低于连续介质情形,而在一致质量模型中的速度高于连续介质,因此,为了提高有限元法的模拟精度,有时也采用混合质量模型。采用混合质量模型,单元质量阵为

$$M = rM_c + (1-r)M_L \quad (2)$$

其中 r 为质量分配系数, $0 \leq r \leq 1$, 当 $r=0, 1$ 时,有限元模型分别为集中质量和一致质量模型。而一致质量阵 M_c 和集中质量阵 M_L 分别为

$$M_c = \frac{\rho \Delta x^2 \sqrt{\beta} \cos \varphi}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$M_L = \frac{\rho \Delta x^2 \sqrt{\beta} \cos \varphi}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

对于图 1 所示均匀离散模型,任一节点可以用一对整数 (m, n) 表示,由单元刚度阵和质量阵可以得到节点的运动方程为

$$\begin{aligned} & (1-r)\ddot{u}(m, n, t) - \left(\frac{r}{36}\right) \{ [\ddot{u}(m+1, n+1, t) + \ddot{u}(m+1, n-1, t) + \ddot{u}(m-1, n+1, t) \\ & + \ddot{u}(m-1, n-1, t) - 4\ddot{u}(m, n, t)] + 4[\ddot{u}(m, n+1, t) + \ddot{u}(m, n-1, t) + \ddot{u}(m+1, n, t) \\ & + \ddot{u}(m-1, n, t) - 4\ddot{u}(m, n, t)] + 36\ddot{u}(m, n, t) \} - \frac{c_0^2}{6\beta\Delta x^2 \cos^2 \varphi} \{ (1+\beta)[u(m+1, n+1, t) \\ & + u(m+1, n-1, t) + u(m-1, n+1, t) + u(m-1, n-1, t) - 4u(m, n, t)] \\ & - 3\sqrt{\beta} \sin \varphi [u(m+1, n+1, t) + u(m-1, n-1, t) - u(m+1, n-1, t) \\ & - u(m-1, n+1, t)] + 2(2-\beta)[u(m, n+1, t) - 2u(m, n, t) + u(m, n-1, t)] \\ & - 2(1-2\beta)[u(m+1, n, t) - 2u(m, n, t) + u(m-1, n, t)] \} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $u(m, n, t)$ 和 $\ddot{u}(m, n, t)$ 分别为节点 (m, n) 在 t 时刻的位移和加速度。当 $\Delta x \rightarrow 0$ 和 $\sqrt{\beta} \Delta x \rightarrow 0$ 时,式(5)成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \sin \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

上式即是 $\xi-\eta$ 坐标系中(见图 1)连续介质的出平面波动方程。根据 $\xi-\eta$ 坐标系与 $x-y$ 直角坐标系之间的转换关系,上式可以转换为直角坐标系中的出平面波动方程。

2 单元畸变对波动的影响

下面采用经典物理学中晶格动力学分析方法,用此方法能直接得到平面波解,将这一方法进行合适的推广,也可以得到离散模型中的非均匀波、寄生振荡形式的解^[12],但本文仅限于讨论平面波情形。在直角坐标系中节点 (m, n) 的坐标为

$$\begin{aligned} x &= m\Delta x + n\sqrt{\beta}\Delta x \sin \varphi \\ y &= n\sqrt{\beta}\Delta x \cos \varphi \end{aligned}$$

因此用晶格动力学分析方法,可设节点 (m, n) 的运动形式如下

$$u(m, n, t) = u_0 \exp\{i[\omega t - k_1(m\Delta x + n\sqrt{\beta}\Delta x \sin \varphi) - k_2 n\sqrt{\beta}\Delta x \cos \varphi]\} \quad (6)$$

其中 u_0 为节点 $(0, 0)$ 的振幅; ω 为圆频率;实数 k_1 和 k_2 分别为水平与竖直向视波数,它们满足

$$\left. \begin{aligned} |k_1 \Delta x| &\leq \pi \\ |(k_1 \sin \varphi + k_2 \cos \varphi) \sqrt{\beta} \Delta x| &\leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

当 k_1 和 k_2 超出式(7)定义范围时,对应的名义上的高波数波动实际上以低波数的波动出现^[6]。

式(6)代入式(5)得到平面波的频散方程

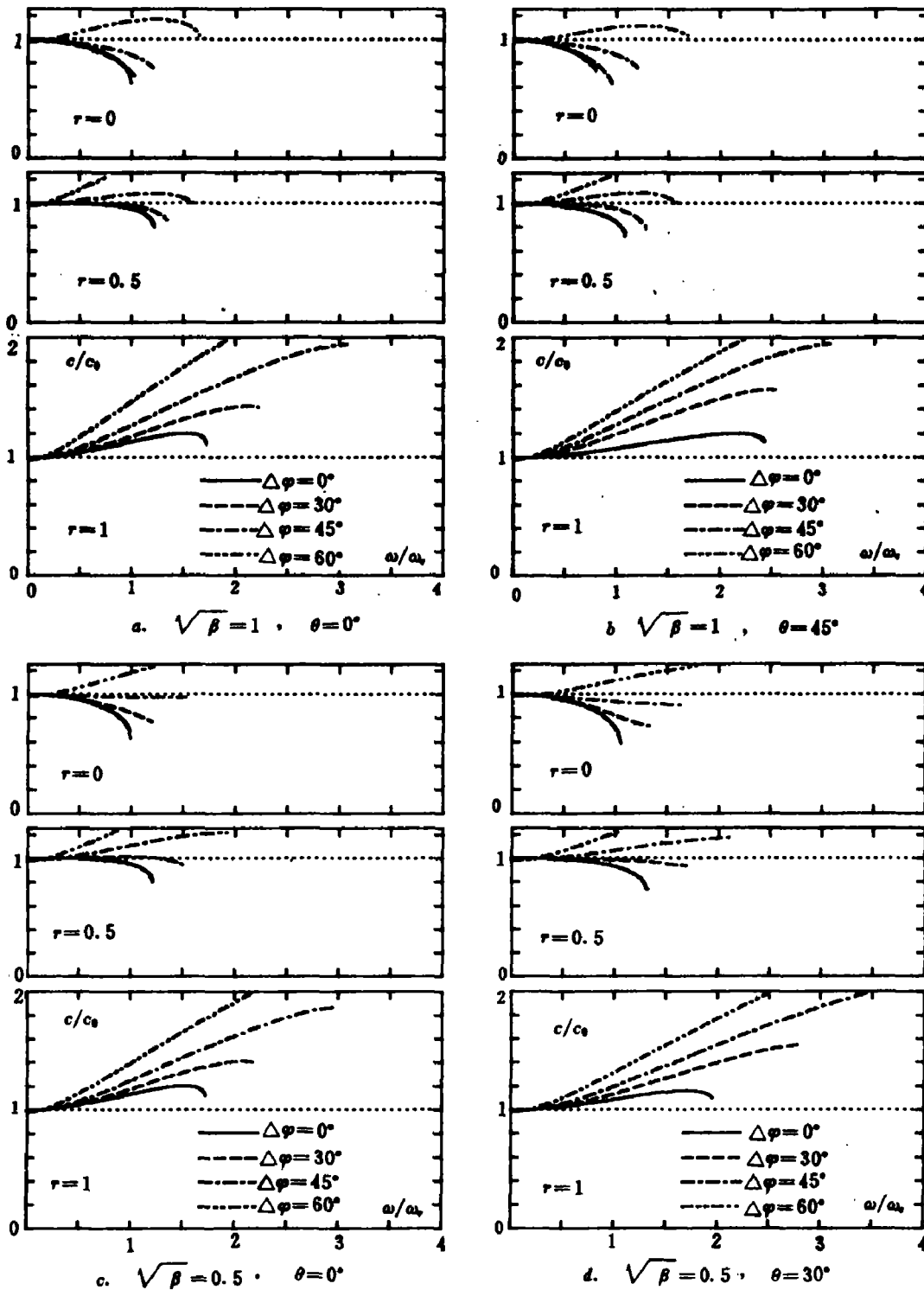


图2 离散模型中波沿不同方向传播的速度

Fig. 2 Velocity of waves traveling at different directions in discrete model

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{s_1^2 + \frac{1}{\beta}s_2^2 - \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{\beta})s_1^2s_2^2 - \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{\beta}}s_1c_1s_2c_2}{1 - \frac{2}{3}r(s_1^2 + s_2^2 - \frac{2}{3}s_1^2s_2^2)}} \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sin\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \\ c_1 &= \cos\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \\ s_2 &= \sin\left[\frac{(k_1\sin\varphi + k_2\cos\varphi\sqrt{\beta}\Delta x)}{2}\right] \\ c_2 &= \cos\left[\frac{(k_1\sin\varphi + k_2\cos\varphi\sqrt{\beta}\Delta x)}{2}\right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

而 $\omega_c = 2c_0/\Delta x$ 为一维集中质量模型中剪切波传播的截止频率^[4]。如果令

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k\cos\theta \\ k_2 &= k\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

代入式(6)和式(8)即得到沿 θ 向传播的波数为 k 的平面 SH 波及其频散方程, θ 是平面波传播方向与 x 轴的夹角。给定传播方向 θ , 由频散方程式(8)可得 $\omega-k$ 之间的关系, 由公式 $c=\omega/k$ 即得到平面波沿 θ 向传播的相速度 c 。

为了分析单元畸变对波动传播的影响, 图 2 给出了 $\varphi=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 时弹性波在有限元离散模型中沿 θ 向传播的相速度 c , 图中注明了模型的参数。分析图 2 可以看出, 集中质量模型具有较强的抗畸变能力, 当单元的内角在 $45^\circ\sim 135^\circ$ 之间变化时(相当于 $\varphi\leq 45^\circ$), 单元的畸变对波的传播并没有不利的影响; 单元畸变对一致质量模型的影响极大, 即使当 φ 接近 30° 时, 一致质量模型单元畸变的影响已不可忽视, 采用一致质量模型时, 应保证 $\varphi<30^\circ$; 混合质量模型($r=0.5$)具有一定的抗畸变能力, 当 $\varphi<30^\circ$ 时, 单元畸变对混合质量模型的影响不大。从图 2 中看到, 单元畸变过大时(例如, $\varphi>60^\circ$), 这种畸变对不同有限元模型均产生不利的影响, 过大的畸变使不同有限元模型中波的传播速度明显高于连续介质, 即产生较大的频散, 这将导致波动有限元模拟完全失真。此外, 长期以来, 在波动有限元理论中存在一个基本概念, 集中质量模型中弹性波传播的速度低于原连续介质情形, 而以上结果表明, 实际情况并非总是如此。单元畸变过大的集中质量模型中波动的传播速度有时也会高于连续介质情形, 这一点已通过算例得到验证。

3 单元畸变和时域离散对波动的联合影响

以上讨论了空间离散化时单元畸变对波动规律的影响, 在波动问题有限元分析中, 常常采用时域直接方法, 时域的离散会对波动规律产生进一步的影响。下面讨论单元畸变和时域离散的联合影响。

对时间域进行离散化 $t=p\Delta t, \Delta t$ 为时间步长, $p=0, 1, \dots$, 节点运动可以表示为

$$u(m, n, t) = u(m, n)\exp(i\omega p\Delta t) \quad (11)$$

采用中心差分法时, 节点加速度为

$$\bar{u}(m, n, t) = \frac{u(m, n, t + \Delta t) - 2u(m, n, t) + u(m, n, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (12)$$

式(11)代入式(12)得

$$\bar{u}(m, n, t) = - \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)}{\frac{\Delta t}{2}} \right]^2 u(m, n) \exp(i\omega \Delta t) \quad (13)$$

将式(11)和式(13)代入运动方程式(5)可以得到时域离散后的频散方程

$$\frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{(\omega_c \Delta t) / 2} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{s_1^2 + \frac{1}{\beta} s_2^2 - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) s_1^2 s_2^2 - \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{\beta}} s_1 c_1 s_2 c_2}{1 - \frac{2}{3} r \left(s_1^2 + s_2^2 - \frac{2}{3} s_1^2 s_2^2\right)}} \quad (14)$$

其中: s_1, c_1, s_2, c_2 见式(9)。

3.1 逐步积分稳定性条件

中心差分算法是有条件稳定的, 稳定性条件可表示为^[6]

$$\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \leq 1$$

将式(14)代入上式, 经分析后得

$$\frac{\Delta t c_0}{\Delta x} \leq \min \left\{ \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{2r}{3}}, \cos \varphi \sqrt{\beta \left(1 - \frac{2r}{3}\right)}, \cos \varphi \sqrt{\frac{\beta(9 - 8r)}{3(1 + \beta)}} \right\} \quad (15)$$

式(15)即是时域逐步积分稳定性条件。分析式(15)可知, 单元发生畸变和单元不畸变($\varphi = 0$ 时)模型的时域逐步积分稳定性条件仅相差一因子 $\cos \varphi$, 当单元发生畸变时, 为保证逐步积分稳定性条件, 时间步长 Δt 需要取更小的值。表1给出 $\beta=1, 2$ 时, 集中质量($r=0$)、混合质量($r=0.5$)和一致质量($r=1$)有限元法的逐步积分稳定性条件。

由表1可以看出, 当单元的两边长之比接近(即 $\beta \rightarrow 1$), 集中质量、混合质量和一致质量有限元法可取的最大时间步长的比值近似为 $1 : 0.8 : 0.4$ 。

表1 逐步积分稳定性条件

Table 1 Stability Condition of Step-by-Step Integration

β	有限元模型	集中质量	混合质量	一致质量
	稳定性参数	($r=0$)	($r=0.5$)	($r=1$)
$\beta=1$	$\frac{\Delta t c_0}{\Delta x} \leq$	$\cos \varphi$	$\frac{2 \cos \varphi}{\sqrt{6}}$	$\frac{\cos \varphi}{\sqrt{6}}$
$\beta=2$	$\frac{\Delta t c_0}{\Delta x} \leq$	$\cos \varphi$	$\frac{\sqrt{6} \cos \varphi}{3}$	$\frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{3}$

3.2 单元畸变和时间步长对弹性波传播的联合影响

利用 $c = \omega/k$, 由式(14)可得弹性波传播的相速度 c 为

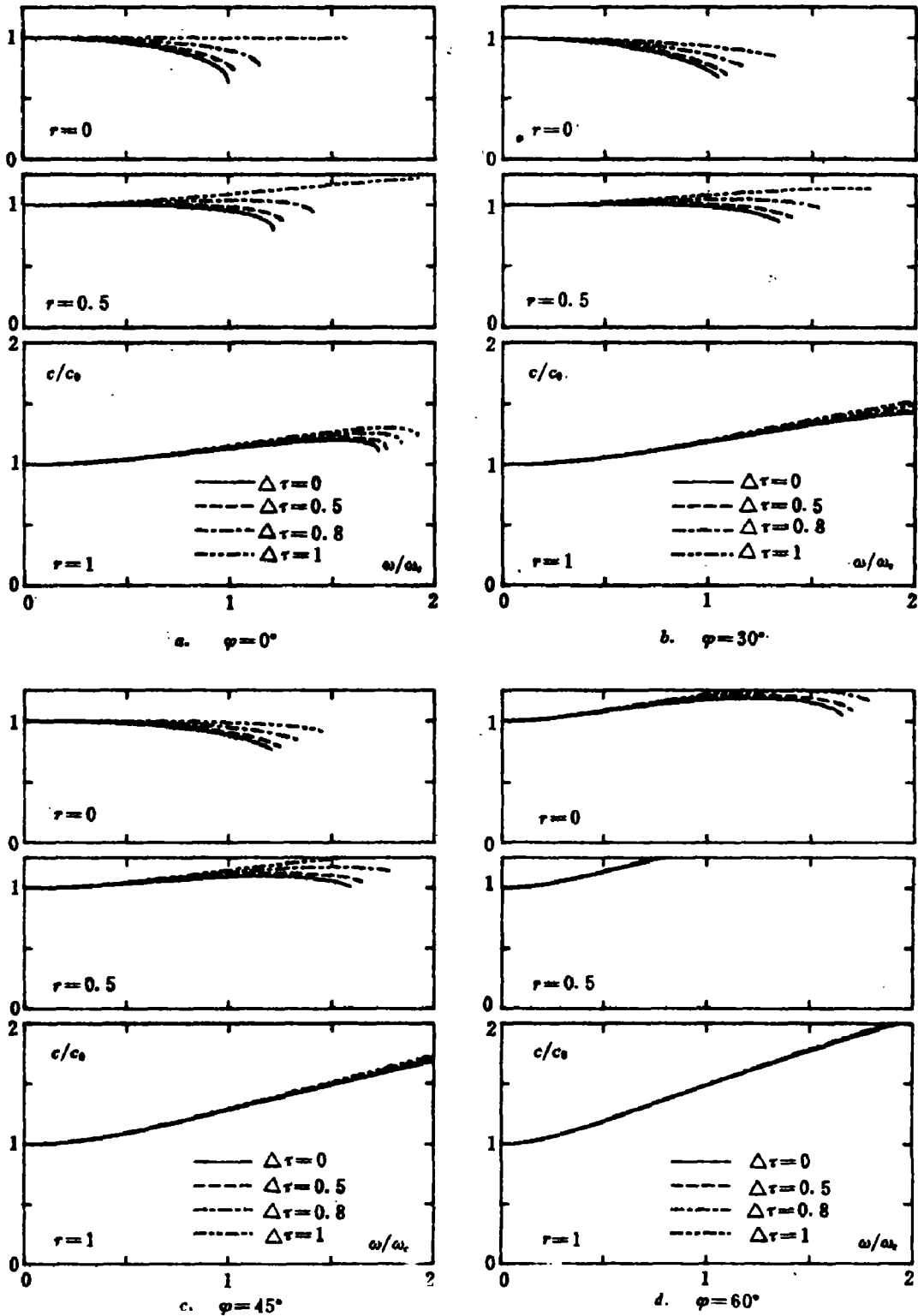


图 3 时间步长对波动规律的影响($\beta=1, \theta=0^\circ$)

Fig. 3 Effect of time step on wave motion ($\beta=1, \theta=0^\circ$)

$$\frac{c}{c_0} = \frac{2}{k\Delta c_0} \arcsin \left[\frac{\Delta c_0}{\Delta c_0 \cos \varphi} \sqrt{\frac{s_1^2 + \frac{1}{\beta} s_2^2 - \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{\beta}) s_1^2 s_2^2 - \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{\beta}} s_1 c_1 s_2 c_2}{1 - \frac{2}{3} r (s_1^2 + s_2^2 - \frac{2}{3} s_1^2 s_2^2)}} \right] \quad (16)$$

以 Δ_m 表示各种有限元法所能采用的最大时间步长, $\Delta\tau$ 为无量纲时间步长, $\Delta\tau = \Delta t / \Delta_m$ 。图 3 示出当 $\beta=1; \varphi=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ; \Delta\tau=0, 0.5, 0.8, 1$ 时波传播的相速度。

分析图 3 可知, 时域离散化使一致质量模型中波动的频散增大, 且时间步长越大, 波的频散也越大, 因此, 时域离散化不利于保持一致质量模型的模拟精度。当单元畸变不很大时 (例如, $\varphi \leq 45^\circ$), 时间步长的增大使集中质量模型中波动的频散降低, 即时间步长的增大有利于提高集中质量法的精度; 但是, 当单元畸变过大时 (例如, $\varphi > 60^\circ$), 时域离散化对集中质量模型产生不利影响。混合质量模型中, 当单元畸变较小时 ($\varphi \leq 30^\circ$), 适中的时间步长有利于取得较好的模拟精度; 当 $\varphi > 45^\circ$ 时, 即使是较小的时间步长也会产生不利影响。

4 结 语

本文研究了单元形状的畸变及单元畸变和时域离散化联合作用对波动传播规律的影响, 得到了一些有意义的结论。

1. 单元形状的畸形变化对有限元离散模型中的波动规律产生显著影响。集中质量模型具有较强的抗畸变能力, 混合质量模型有一定的抗畸变能力, 而一致质量模型的抗畸变能力最差。

2. 集中质量模型中弹性波的传播速度并不总是低于相应的连续介质, 当单元的形状畸变较大时, 弹性波的传播速度也会超过连续介质情形。

3. 与单元不畸变的离散模型相比, 当有限元离散模型的单元发生畸变时, 为保证时域逐步积分的稳定性, 需要取更小的时间离散步长。

4. 在单元形状畸变不太大时, 时域离散化使集中质量和混合质量模型的波动模拟效果变好, 而使一致质量模型的效果变差; 当单元畸变太大时, 时域离散化对所有模型均产生不利影响。

上述后两条结论是在时域逐步积分中采用中心差分法时得到的, 因而它也仅适用于采用中心差分法进行时域离散化情况。

参 考 文 献

- 1 Belytschko T, Mullen R. On dispersive properties of finite element solutions. *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*, ed J Miklowitz, Achenbach D, Wiley, 67-82, 1978
- 2 Bazant Z P. Spurious reflection of elastic waves in nonuniform finite element grids. *Comp Math Appl Mech Eng*, 1978, 16:91-100
- 3 Celep Z, Bazant Z P. Spurious reflection of elastic waves due to gradually changing finite element size. *Int J Numer Meth Eng*, 1983, 19:631-646
- 4 廖振鹏, 刘晶波, 离散网格中的弹性波动(1). *地震工程与工程振动*, 1986, 6(2):1-16

- 5 刘晶波, 廖振鹏, 离散网格中的弹性波动(I)——几种有限元离散模型的对比分析. 地震工程与工程振动, 1989, 9(2):1-11
- 6 刘晶波, 廖振鹏, 离散网格中的弹性波动(II)——时域离散化对波传播规律的影响. 地震工程与工程振动, 1990, 10(2):1-10
- 7 Liao Z P, Liu J B. Numerical instabilities of a local transmitting boundary. Earthq Eng Struct Dyn, 1992, 21:65-77
- 8 Mullen R, Belytschko T. Dispersion analysis of finite element semidiscretization of the two-dimensional wave equation. Int J Numer Meth Eng, 1982, 18:11-29
- 9 Celep Z. Plane elastic waves in meshes of bilinear finite elements. J Sound and Vibration, 1985, 101:23-32
- 10 Celep Z, Turhan D. Finite element solution for reflection of plane harmonic waves from the free surface of a half-space. Comput Struct, 1987, 27:593-599
- 11 刘晶波, 廖振鹏, 有限元离散模型中的出平面波动. 力学学报, 1992, 24(2):207-215
- 12 Liu J B, Liao Z P. In-Plane wave motion in finite element model. Acta Mechanica Sinica, 1992, 8(1):80-87

SH WAVE MOTION IN DISTORTIONAL FINITE ELEMENT DISCRETE MODELS

Liu Jingbo Yao Ling

(Department of Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080)

ABSTRACT Characteristics of SH wave propagation in finite element discrete models whose element shapes are distorted are studied by making use of the lattice dynamics analysis method in this paper. It is shown that the effects of the distortion of finite elements on wave motion are significant, great distortions of the element shapes will cause a complete distortion in the simulation of wave motion, the velocity of wave propagation in lumped-mass finite element discrete models is not always less than that in continuous models. The abilities of resisting distortion of different finite element models are evaluated by comparing the characteristics of wave motion in lumped-mass, hybrid-mass and consistent-mass models. The joint effects of time domain discretization and the element shape distortion on wave propagation are also discussed.

KEY WORDS finite element, discrete model, distortion, wave motion