

端头带有质量块的悬臂梁 在冲击载荷下的剪切失效

余同希

(北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 以飞射物撞击构件引起破坏为工程背景, 研究端头带有质量块的悬臂梁受到冲击载荷作用后发生剪切失效的可能性。分析表明: 在初始速度间断面上是否发生失效取决于无量纲初始动能和质量块尺寸与梁厚之比, 而与梁的长度无关; 质量块的转动惯量对于剪切失效具有不可忽略的影响。

关键词 动力失效 横向剪切 悬臂梁 冲击载荷

1 引言

如所周知, 横向剪力对于结构的准静态弹塑性变形一般不产生显著影响; 只有对深梁、厚板和开口薄壁元件, 剪力效应才是重要的。但是, 当梁、板等结构元件受到冲击、爆炸等强动载荷作用时, 剪力的量值会比相应的静态情形大很多。这一点, 已为大量理论分析和实验测定所证实。Symonds^[1]首先分析了无限长梁和固支梁中部受到冲击载荷时的动力响应, 按照理想刚塑性模型计算了剪切变形并给出了剪切失效条件。Menkes 和 Opat^[2]对固支铝梁进行了爆炸加载试验, 发现了三种破坏模式, 其中一种是当冲量很大时梁在支承处发生横向剪切破坏。这一实验结果已由 Jones^[3,4]作了理论解释。对于固支梁在跨度内不同位置受到刚性物撞击的变形和失效问题, 刘建辉和 Jones^[5,6]也进行了实验和理论研究。当撞击点靠近支承点时, 梁的失效模式由拉伸撕裂转换为横向剪切断裂。这些研究都表明, 剪切失效是强动载荷作用下结构失效的重要模式, 其研究具有明显的工程意义。

为了研究飞射物撞击到构件上产生剪切破坏的准则, 首先可以近似地假定: 飞射物(质量为 m) 以初速度 v_0 撞击到构件上之后, 始终附着在构件上与之一起运动, 直到构件运动终止或破坏为止。这样, 就可以不去追究撞击过程的细节, 而认为质量 m 是原已附着在构件上的; 在 $t=0$ 时, 有一冲击载荷(即作用时间无限短, 但具有有限冲量 $I=mv_0$) 突然作用到质量 m 上, 使它获得一个初速 v_0 。按照这样的问题提法, 本文将研究端头带有集中质量的悬臂梁受到冲击载荷作用后, 在该质量块与梁端的界面上产生剪切失效的可能性。以往的理论分析基本上都把撞击物简化成一个不具几何尺度的质点; 本文则着重分析把撞击物看成一个具有几何尺度的质量块时, 其尺寸和转动惯量对于剪切失效的影响。

问题的初始构形如图1。假定: (i) 梁的材料是刚塑性、率无关的; (ii) 梁具有均匀的密

* 国家自然科学基金重点项目资助。

1992年5月26日收到原稿。

度和截面；(iii)梁端附着有质量为 m 的质点或质量块，它在初始时刻 ($t=0$) 受冲击载荷作用而获得横向初速度 v_0 ；(iv)在变形过程中梁的挠度远小于梁长 L 。

2 把撞击物看成质点时界面的剪切滑移

在本节的分析中暂时把撞击物(即梁端附着的质量)看成一个不具几何尺度的质点，因而不计它的转动惯量。如果不考虑剪切对屈服的影响，这正是著名的 Parkes 问题^[7]。Parkes 的解表明，受到冲击载荷作用后，弯曲扰动以移行塑性铰的形式由梁端向梁根部传播。由于初始速度场具有间断性，初始时刻梁端点 ($x=0$ ，见图 1 中的坐标) 处的剪切力 Q

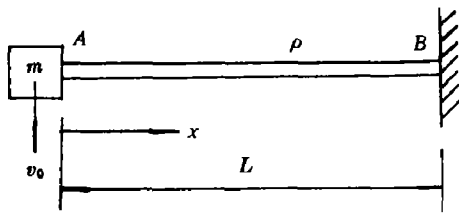


图 1
Fig. 1

为无穷大^[8]。为了消除剪力的奇异性，使问题的解在物理上较为合理，下面规定任何截面上的剪力 Q 不能超过塑性极限剪力 $Q_p = (1/2)Ybh$ ，其中 Y 是材料的屈服应力， b 和 h 分别为梁的宽度和厚度。同时，我们将认为弯矩和剪力对于截面的屈服是独立作用的，于是屈服面为

$$\begin{cases} |Q|/Q_p = 1, |M|/M_p \leq 1 \\ |M|/M_p = 1, |Q|/Q_p \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $M_p = (1/4)Ybh^2$ 是截面的塑性极限弯矩。在剪力-弯矩平面上，这个独立作用屈服面表现为一个正方形(图 2)。下面将看到，剪力和弯矩在运动方程中仍是相互耦合的。

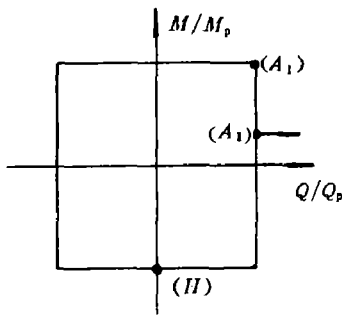


图 2
Fig. 2

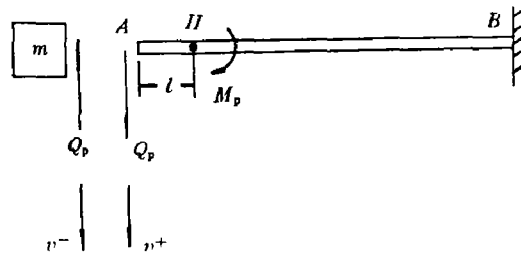


图 3
Fig. 3

当质量块 m 和梁端之间的界面 A 上存在剪力 $Q=Q_p$ 时，梁的变形机构如图 3 所示。 H 是一个塑性铰，它距端点 A 的距离 l 取决于突加载荷 $Q=Q_p$ 的大小。由于塑性铰 H 处弯矩应达到极大 ($M_H=M_p$)，因此该点剪力应为零，即 $Q_H=0$ 。

在界面 A 上，由于存在剪切滑移，界面左侧(即质点)的速度 v^- 一般不等于界面右侧(即梁端)的速度 v^+ 。 AH 段的运动是绕 H 点的一个刚性转动，因此速度分布为 $v^+(1-x/l)$ ，加速度分布为 $\dot{v}^+(1-x/l)$ ，这里字符上方的圆点代表对时间 t 的微商。加速度乘以 ρ (单位长度的梁的质量)就得出分布惯性力。于是我们可以列出 AH 段的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho l \dot{v}^+ = Q_p \\ \frac{1}{6}\rho l \dot{v}^+ = M_p \end{cases} \quad (2)$$

由方程(2)立即解出

$$l = \frac{3M_p}{Q_p} = \frac{3 \cdot \frac{1}{4}Ybh^2}{\frac{1}{2}Ybh} = \frac{3}{2}h \quad (3)$$

$$\dot{v}^+ = \frac{2Q_p}{\rho l} = \frac{2Yb}{3\rho} \quad (4)$$

由于加速度 \dot{v}^+ 是一个常数,而初始时界面右侧 $v^+(0)=0$,从(4)式对时间积分一次便得到

$$v^+ = \frac{2Yb}{3\rho}t \quad (5)$$

另一方面,对质点应用牛顿第二定律得到

$$m\dot{v}^- = -Q_p \quad (6)$$

注意到初始时刻质点具有初速度 $v^-(0)=v_0$,由(6)式积分可得

$$v^- = v_0 - \frac{Q_p}{m}t = v_0 - \frac{Ybh}{2m}t \quad (7)$$

将(5)式和(7)式结合起来,就知道界面 A 上的剪切滑移速度为

$$[v] \equiv v^- - v^+ = v_0 - Yb\left(\frac{h}{2m} + \frac{2}{3\rho}\right)t \quad (8)$$

这表明,滑移速度随时间增长而线性衰减,也就是说这个滑移是一个匀减速运动。当

$$t = t_0 \equiv (v_0/Yb)\left(\frac{h}{2m} + \frac{2}{3\rho}\right)^{-1} \quad (9)$$

时, $[v]=0$,即滑移停止。总滑移距离为

$$s = \frac{1}{2}v_0t_0 = (v_0^2/2Yb)\left(\frac{h}{2m} + \frac{2}{3\rho}\right)^{-1} \quad (10)$$

冲击载荷带来的初始动能是

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (11)$$

因此(10)式表明总滑移距离 s 同初始动能 E_{k0} 成正比,即

$$s = \frac{E_{k0}}{Yb}\left(\frac{h}{2} + \frac{2m}{3\rho}\right)^{-1} \quad (12)$$

当 $t > t_0$,滑移停止,界面上的剪力消失,之后的动力响应过程同 Parkes 解^[7]相类似,塑性铰将向根部移行。这不是本文研究的重点,故而略去。

3 把撞击物看成质量块时界面的剪切滑移

当梁端的质量块具有一定转动惯量时,受冲击后将产生一定的转动惯性力矩,因而在质量块与梁端的界面上弯矩不再为零。这一弯矩记为 M_A ,它的大小同质量块的转动惯

量有关,所以下面分两种情形讨论。

情形 I: 质量块转动惯量较大, $|M_A| = M_p$ 。

这时,梁的受力和运动机构如图 4 所示。H 点仍是纯粹承受弯矩的塑性铰,而界面 A

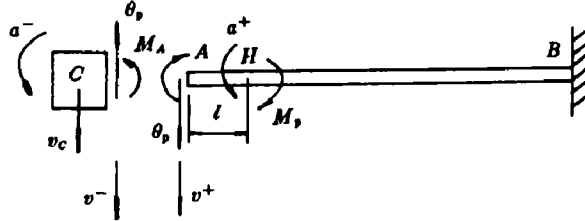


图 4

Fig. 4

是同时承受弯、剪的广义塑性铰。它们分别对应于图 2 中的(H)和(A₁)点。AH 段的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho l \dot{v}^+ = Q_p \\ \frac{1}{6} \rho l^2 \dot{v}^+ = 2M_p \end{cases} \quad (13)$$

由此解出

$$l = \frac{6M_p}{Q_p} = 3h \quad (14)$$

$$\dot{v}^+ = \frac{2Q_p}{\rho l} = \frac{Yb}{3\rho} \quad (15)$$

与(3)、(4)式相比, l 和 \dot{v}^+ 分别增大和减小了一倍。AH 段绕 H 的角加速度为

$$a^+ = \frac{\dot{v}^+}{l} = \frac{Yb}{9\rho h} \quad (16)$$

另一方面,考虑质量块作为刚性体的平动和转动,分别写出

$$m\dot{v}_c = -Q_p \quad (17)$$

$$mr^2 a^- = M_p + Q_p \cdot \overline{AC} \quad (18)$$

其中, C 表示质量块的质心, v_c 是质心的横向速度(向下), \overline{AC} 是 C 到界面 A 的距离, mr^2 是转动惯量, r 称为回转半径。

只要将方程(15)~(18)式联立起来,就可以求解任意形状质量块的撞击问题。为了得出明晰的结果,下面我们仅考虑一个具体例子,如图 5 所示。假定质量块是一个长方体,体积密度与梁相同,宽度也与梁的宽度 b 相同,另两个尺度构成边长为 d 的正方形。于是,

$$r^2 = d^2/6, \quad \overline{AC} = d/2$$

代入(18)式解出质量块的角加速度为

$$a^- = \frac{6}{md^2} \left(\frac{1}{4} Ybh^2 + \frac{1}{4} Ybhd \right) = 3Ybh(h+d)/(2md^2) \quad (19)$$

进而求出界面 A 左侧的横向加速度(向下为正)

$$\dot{v}^- = \dot{v}_c - a^- d/2 = -\frac{Ybh}{2m} - \frac{3Ybh(h+d)}{4md} = -\frac{Ybh}{4m} \left(5 + 3\frac{h}{d} \right) \quad (20)$$

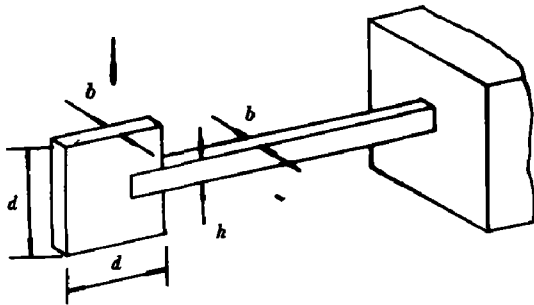


图 5
Fig. 5

积分一次，得到界面左侧的横向速度(向下)

$$v^- = v_0 - \frac{Ybh}{4m} \left(5 + 3 \frac{h}{d}\right)t \quad (21)$$

由于假定质量块与梁的密度相同，就有

$$m/d^2b = \rho/bh$$

即 $\rho = mh/d^2 \quad (22)$

由(15)、(21)式并应用(22)式可求出界面 A 两侧的剪切滑移速度为

$$[v] \equiv v^- - v^+ = v_0 - \frac{Ybh}{4m} \left[5 + 3 \frac{h}{d} + 4 \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]t \quad (23)$$

这也是一个匀减速过程，因此总滑移量为

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} v_0^2 \cdot \frac{4m}{Ybh} \left[5 + 3 \frac{h}{d} + \frac{4}{3} \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]^{-1} \\ &= \frac{4E_{k0}}{Ybh} \left[5 + 3 \frac{h}{d} + \frac{4}{3} \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $4E_{k0}$ 是系统的初始动能，参见(11)式。

由(16)和(19)式可见，界面两侧具有不同的角加速度。按照图 4 的运动机构，界面 A 的相对转动必须同铰 H 处的转动反方向，这就要求

$$a^+ > a^- \quad (25)$$

利用(16)、(19)和(22)式，(25)式导致不等式

$$\frac{2}{27} \left(\frac{d}{h}\right)^4 - \left(\frac{d}{h}\right) - 1 > 0 \quad (26)$$

求解这个不等式得知：

情形 I (即 $|M_A| = M_p$) 仅当 $d/h > 2.65$ 时成立；

情形 II 质量块转动惯量较小， $|M_A| < M_p$ 。

这时，界面 A 的应力状态处于图 2 的 A_1 点。根据正交流动法则，界面上只发生剪切滑移而不发生相对转动。仍用图 4，但注意 $|T_A| \equiv |M_A|/M_p < 1$ 。用类似方法分析，可以得到界面两侧的转动角加速度分别为：

$$a^+ = \frac{4Yb}{9\rho h(1+T_A)^2}, \quad a^- = \frac{3Ybh(hT_A+d)}{2md^2} \quad (27)$$

由于在这一情形下界面两侧不得有相对转动，故要求

$$a^+ = a^- \quad (28)$$

将有关量值代入并化简得到一个关于 T_A 的方程

$$(1+T_A)^2(T_A + \frac{d}{h}) = \frac{8}{27} \left(\frac{d}{h}\right)^4, \quad 1 \leq \frac{d}{h} \leq 2.65 \quad (29)$$

这个方程的解给出 T_A 作为 d/h 的函数。此式基于 $Q_p = (1/2)Ybh$ ，因此仅当 $d > h$ 时成立。

如果质量块的边长 d 比梁的厚度 h 还小，应根据界面的实际连接面积取 $Q_p = (1/2)Ydb$ ，相应地，方程(29)应改换为

$$(1 + T_A)^2 [T_A + (\frac{d}{h})^2] = \frac{8}{27} (\frac{d}{h})^3, \quad \frac{d}{h} < 1 \quad (30)$$

综合上述结果,可知界面弯矩 $T_A \equiv M_A/M_p$, 随尺寸比 d/h 的变化如图6所示。图中的实线段和虚线段分别得自方程(29)和(30)。

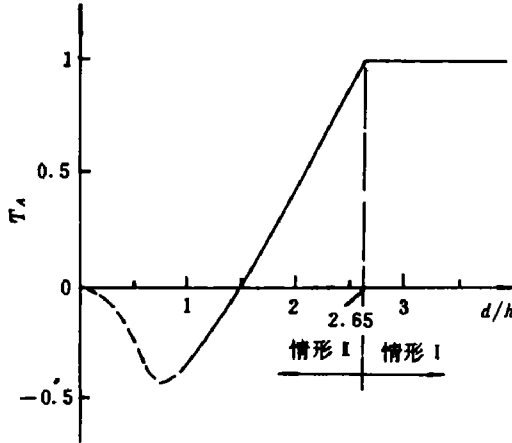


图6
Fig. 6

4 失效分析

当界面上的相对滑移 s 超过梁的厚度 h 时,界面被剪断。因此,剪切失效条件可写成

$$s \geq h \quad (31)$$

从(12)式和(24)式看出, s 总是同 E_{k0}/Y 成正比的。因此,我们可以引入无量纲初始动能

$$e_0 \equiv \frac{E_{k0}}{M_p} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{4}Ybh^2} \quad (32)$$

然后利用前面的推导结果,把剪切失效条件(31)式最终改写成统一的形式

$$e_0 \geq e_r \quad (33)$$

其中 e_r 是产生剪切失效所要求的临界能量(无量纲),根据前面的结果, e_r 的表达式是:

1) 不计撞击物的转动惯量时,

$$e_r = \begin{cases} 2 + \frac{8}{3}(\frac{d}{h})^2, & \text{若 } \frac{d}{h} \geq 1 \\ \frac{d}{h} [2 + \frac{8}{3}(\frac{d}{h})^2], & \text{若 } \frac{d}{h} < 1 \end{cases} \quad (34)$$

2) 计及撞击物的转动惯量时,

$$e_r = \begin{cases} 5 + 3(\frac{h}{d}) + \frac{4}{3}(\frac{d}{h})^2, & \text{若 } \frac{d}{h} > 2.65 \\ 5 + 3T_A(\frac{h}{d}) + \frac{8}{3(1+T_A)}(\frac{d}{h})^2, & \text{若 } \frac{d}{h} \leq 2.65 \end{cases} \quad (35)$$

其中 T_A 由方程(29)或(30)式解出。这些公式是按照长方体撞击物(见图5)得到的,它们表明了,剪切失效所要求的无量纲临界能量 e_r 实际上仅与尺寸比 d/h 有关,而与梁的长度 L 、材料密度等都无关。

根据(34)和(35)式, e_r 对 d/h 的依赖关系可以画出图7中的虚线和实线。(33)式说明,在曲线以上的区域,对应于剪切失效已发生,而曲线以下的区域,则对应于未发生剪切失效。图7清楚地表明:剪切失效发生与否,只取决于 $e_0 \equiv E_{k0}/M_p$ 和 d/h 这两个因素的组合。

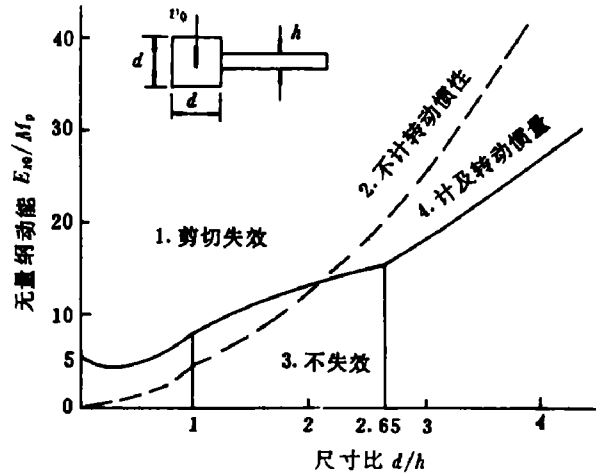


图7

Fig. 7

1. Shear failure; 2. Rotary inertia neglected; 3. No failure; 4. Rotary inertia considered

5 讨论

1)对比图7中的虚线和实线可以说明,当质量块尺寸较大时,忽略转动惯量会低估剪切失效的可能性,因而是偏于不安全的。即使对于较小尺寸的质量块,转动惯量对于剪切失效准则也有不可忽略的影响。

2)虽然我们只对长方体撞击物给出了具体的失效准则,但本文所述的方法可以处理撞击物为其他任何形状的问题。

3)梁长 L 不出现在于剪切失效准则之中,而且上述分析表明在剪切滑移过程中参与运动的梁长只有 $l=(3/2)h$ 或 $l=3h$ [见(3)和(14)式]。这些都说明,剪切失效是一种局部行为,可以从结构的总体动力响应中分割出来进行研究。

4)本文的分析,采用了独立作用屈服面(1)式,这是一个近似。基于弯矩-剪力交互作用屈服面的分析将由后继工作给出。

5)本文的分析,假定梁截面的塑性极限剪力在剪切滑移过程中保持常数 $Q_0=(1/2)Ybh$ 。实际上,由于剪切滑移引起界面实际连接面积减小, Q_0 可能逐渐变小。但从能量角度来看,如果 Q_0h 接近于把截面剪断所要求的功,令 Q_0 近似为常数还是合理的。这方面有待进一步研究。

6 结论

对本文所研究的问题,在初始速度间断面上是否发生剪切失效只取决于两个因素:无量纲初始动能 E_{i0}/M_p ;撞击物尺寸与梁厚之比。本文给出了剪切失效准则,并证明了撞击物的转动惯量对于剪切失效具有不可忽略的影响。

作者曾同英国剑桥大学工程系的W. J. Stronge博士作过有益的讨论,特致谢。

参 考 文 献

- 1 Symonds P S. Plastic shear deformation in dynamic load problems. In: Heyman J, Leckie F A, ed. *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, 1968. 647~664
- 2 Menkes S B, Opat H J. *Exp Mech*, 1973, 13: 480~486
- 3 Jones N. *J Eng Indus*, (Trans ASME), 1976, 98: 131~136
- 4 Jones N, Song B Q, (宋伯途). *J Struct Mech*, 1986, 14(3): 275~320
- 5 Liu J H(刘建辉), Jones N. *Int J Impact Engng*, 1987, 6: 303~335
- 6 Liu J H(刘建辉), Jones N. *Int J Solids Struct*, 1988, 24: 251~270
- 7 Parkes E W. *Proc Roy Soc*. 1955, A 228: 462~476
- 8 余同希. *爆炸与冲击*, 1990, 10(1): 85-96, 1990, 10(2): 183~192

SHEAR FAILURE OF A CANTILEVER WITH AN ATTACHED MASS BLOCK AT THE TIP UNDER IMPULSIVE LOADING

Yu Tongxi

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing, 100871*)

ABSTRACT Related to the dynamic failure of structural members struck by projectiles, this paper studies the possibility of the shear failure of a cantilever beam with an attached mass block at the tip under impulsive loading. It is illustrated that whether a shear failure occurs at the interface, where the initial velocity has discontinuity, depends on the non-dimensional initial kinetic energy and the ratio of the size of the mass block to the thickness of the beam; and it is independent of the length of the beam. It is also shown that the influence of the rotary inertia of the mass block on the shear failure is not negligible.

KEY WORDS dynamic failure, transverse shear, cantilever, impulsive loading