

静力预加载结构冲击屈曲的突变模型*

王德禹^{a)} 张善元 杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所 太原 030024)

摘要 基于突变理论给出静力预加载弹性结构冲击屈曲的准则,并将其用于处理 Budiansky-Hutchinson 简单力学模型的冲击屈曲分析和受扭圆柱壳的冲击扭转屈曲分析,给出了临界载荷的求解公式。

关键词 冲击屈曲 静力预加载结构 突变理论

结构在冲击载荷下的屈曲研究已取得了许多进展,其中包括弹性冲击屈曲^[1]和塑性冲击屈曲^[2]。然而我们看到以往的这些研究基本限于结构完全承受冲击载荷的作用。事实上,在工程实际中有相当一部分结构,如深水潜艇在水下(受静水压力)受爆炸载荷的作用以及在自重作用下的原子能反应堆受突然飞行物的撞击等,它们在承受冲击载荷之前已经承受了静载荷的作用,甚至有些结构在其整个使用寿命中主要承受静载荷的作用,只是由于偶然的原因才受到冲击扰动的作用。因此,这类结构的冲击屈曲研究应该引起人们的足够重视。

Simitses 曾将他提出的冲击屈曲势能准则推广到了静力预加载结构^[3],并对浅拱及轴压圆柱壳进行了研究。Holasut 等研究了冲击扰动对 Budiansky-Hutchinson 简单力学模型(以下简称 B-H 模型)静态屈曲的影响^[4]。近年来,人们注意到了将突变理论这一新的数学工具引入结构屈曲的研究^[5],在文献[6]中我们建立了结构冲击屈曲的突变理论模型,给出了将突变理论应用于结构冲击屈曲时的势函数选取,并对 B-H 模型的冲击屈曲问题进行了研究,以后在文献[7]中我们又研究了弹性圆柱壳的冲击扭转屈曲问题。

本文的目的在于将文献[6,7]的结果推广到静力预加载弹性结构的冲击屈曲之中,并将其用于 B-H 模型以及受扭圆柱壳的研究。

1 突变理论模型

突变理论用于解决具体的实际问题有两个关键,一个是突变约定,一个是势函数的选取。和突变理论的大部分应用一样,我们在本文所讨论的问题中也选用理想延迟约定,即当控制参数变化时,系统总是留在原来的稳定平衡位置上,直到这个稳定平衡位置消失。下面着重讨论势函数的选取。

在结构的静态屈曲问题中,其静态临界载荷就是以结构的势能为势函数的突变系统

* 国家自然科学基金资助项目。

^{a)} 现工作单位,上海交通大学船舶及海洋工程系 200030

1992年5月10日收到原稿,1993年2月10日收到修改稿。

的分叉集。当结构承受阶跃冲击载荷作用时,我们在文献[6,7]中指出,以 $R(x)$ 为势函数的突变系统的分叉集对应着结构的临界阶跃载荷。

$$R(x) = \int_0^x V(x) dx \quad (1)$$

其中: x 是结构的广义位移, $V(x)$ 是结构的势能。

现在考虑一弹性结构,首先承受一个静载荷 p 的作用,然后再作用一个阶跃突加载荷 P ,下面着重分析使得结构发生动态冲击屈曲时 P 的临界值。令 s^* 表示弹性结构在静力 p 作用下的稳定平衡位置(p 这里显然应小于结构的静态屈曲载荷), $V_p(x)$ 是外力 p 作用下结构产生 x 位移时系统的势能,即:

$$V_p(x) = U(x) - px \quad (2)$$

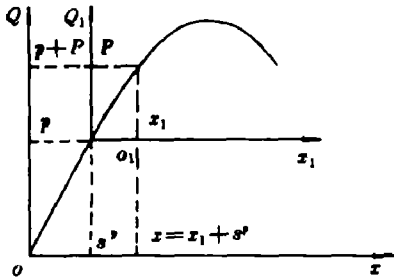


图1 $Q-x$ 曲线

Fig. 1 $Q-x$ curve

这里 $U(x)$ 是结构的应变能。图1是外力 Q 作用下结构的静态位移 x 的变化规律曲线。从图1可以看出,在预静力 p 作用下的结构相当于 Q_1-x_1 坐标系下的无预静力结构,其中 Q_1-x_1 坐标系的原点在 $Q-x$ 坐标系中的坐标为 (s^*, p) ,而在 Q_1-x_1 坐标系下结构受阶跃载荷的作用也就相当于结构在 $Q-x$ 坐标系下先受静载荷 p 作用,再受阶跃载 P 作用。在 Q_1-x_1 坐标系下结构的阶跃临界载荷 P 为由下述势函数 $\bar{R}(x)$ 所确定突变系统的分叉集(见文献[6,7]):

$$\bar{R}(x) = \int_0^{x_1} \bar{V}_p(x_1) dx_1 \quad (3)$$

这里 $\bar{V}_p(x_1)$ 表示 Q_1-x_1 坐标系下结构在 P 载荷下产生 x_1 位移时的势能,即:

$$\bar{V}_p(x_1) = \int_0^{x_1} Q_1(x_1) dx_1 - Px_1 \quad (4)$$

上式中右端的积分项实际上是结构的内能。进一步由于:

$$\int_0^{x_1} Q_1(x_1) dx_1 = \int_0^{x_1+s^*} Q(x) dx - \int_0^{s^*} Q(x) dx - px_1 \quad (5)$$

$$Px_1 = (p+P)(x_1+s^*) - (p+P)s^* - px_1 \quad (6)$$

故由(4)~(6)式可得:

$$\bar{V}_p(x_1) = V_{p+P}(x) - V_{p+P}(s^*) \quad (7)$$

其中:

$$x = x_1 + s^* \quad (8)$$

$$V_{p+P}(x) = \int_0^x Q(x) dx - (p+P)x \quad (9)$$

$$V_{p+P}(s^*) = \int_0^{s^*} Q(x) dx - (p+P)s^* \quad (10)$$

(9)式和(10)式分别给出了结构在 $(p+P)$ 载荷作用下分别产生 x 位移和 s^* 位移时的势能,这样将(7)式代入(3)式就可以给出受静力预加载弹性结构冲击屈曲的突变理论模型:在预静力 p 作用下弹性结构的临界阶跃载荷 P 为以 $\bar{R}(x)$ 作为势函数的突变系统分叉集, $\bar{R}(x)$ 的形式为:

$$\begin{aligned} \bar{R}(x) &= \int_0^{x_1} [V_{p+r}(x) - V_{p+r}(s^p)] dx_1 \\ &= \int_p^x [V_{p+r}(x) + V_{p+r}(s^p)] dx \end{aligned} \quad (11)$$

显然, 当 $p=0$ 时, $s^p=0$, 则(11)式退化为(1)式。

2 Budiansky-Hutchinson 模型的屈曲分析

图2是在弹性结构初缺陷敏感性分析中人们所熟悉的B-H模型, 它是由非线性弹簧OA以及长为L的无质量杆AC和AB组成, A处有一质量为m的物块。Holasut和Ruiz于1985年研究了该力学模型在静力λ作用下再受阶跃突加载荷f作用时的冲击屈曲问题^[4]。下面我们基于突变理论重新给出这个问题的解答, 以验证本文提出的突变模型的合理性。

以 x_0 和 x 分别表示图2A点的垂直初始位移和附加位移, x_0 即初缺陷, 这样在 f 和 λ 的共同作用下, 系统的势能可以表示为:

$$V = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right) - \frac{\lambda}{2}(x^2 + 2xx_0) - fx \quad (12)$$

这里我们选取位移 x 和非线性弹簧OA的反力 $F(x)$ 之间的关系为: $F(x) = x - ax^2$, a 为常数。再令 \bar{x} 是静力预加载荷 λ 作用下A点的位移, 显然 \bar{x} 满足:

$$\bar{x} - a\bar{x}^2 - \lambda\bar{x} = \lambda x_0 \quad (13)$$

再令 $x = z + \bar{x}$, 则(11)式所示的用于确定临界阶跃载荷 f 的突变系统势函数为:

$$\bar{R}(z) = \int_0^z \left[-\frac{a}{3}z^3 + (1 - 2a\bar{x} - \lambda)\frac{z^2}{2} - fz\right] dz \quad (14)$$

该突变系统的平衡曲面为:

$$-\frac{a}{3}z^3 + (1 - 2a\bar{x} - \lambda)\frac{z^2}{2} - fz = 0 \quad (15)$$

或

$$4\left[z - \frac{1}{a}\left(\frac{1-\lambda}{2} - a\bar{x}\right)\right]^3 + 2u\left[z - \frac{1}{a}\left(\frac{1-\lambda}{2} - a\bar{x}\right)\right] + v = 0 \quad (16)$$

其中

$$u = -2\left[\frac{3}{a^3}\left(\frac{1-\lambda}{2} - a\bar{x}\right)^2 - \frac{3f}{a}\right] \quad (17)$$

$$v = 4\left(\frac{1-\lambda}{2} - a\bar{x}\right)\left[\frac{2}{a^2}\left(\frac{1-\lambda}{2} - a\bar{x}\right) - \frac{3f}{a}\right] \quad (18)$$

方程(16)表示了一个以 u, v 为控制变量的尖点突变系统, 它所对应的分叉集为:

$$8u^3 + 27v^2 = 0 \quad (19)$$

应用(13)、(17)、(18)式, 可得 f 的临界值为:

$$f = \frac{3}{4}\left[\frac{(1-\lambda)^2}{4a} - \lambda x_0\right] \quad (20)$$

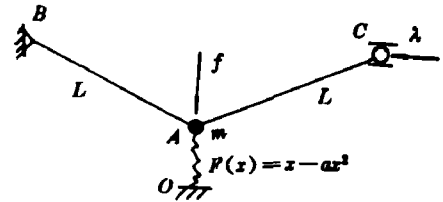


图2 B-H模型
Fig. 2 B-H model

此即文献[4]所给出的结果,这里只是引入了突变理论的有关思想。显然,当 $f=0$ 时, λ 须满足:

$$(1 - \lambda)^2 = 4\alpha\lambda \quad (21)$$

这正是 λ 的静态临界值所满足的关系式。

3 圆柱壳的扭转屈曲分析

考虑一半径为 R , 长为 L , 厚为 h 的弹性圆柱壳, 壳的两端首先承受一个静力扭矩 \bar{M} , 然后再作用一个阶跃扭矩 M 。同文献[7]一样, 取壳体的屈曲模态为:

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y - kx)}{R} + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad (22)$$

上式中: w 为壳体的法向位移, n 是周向屈曲波纹数, k 反映了屈曲波纹和壳体轴线的夹角, x 和 y 分别是壳体中面的轴向和周向坐标, f_1 和 f_2 待定。再假定初始几何缺陷 w_0 和 w 具有一样的形式, 即:

$$w_0 = f_{01} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y - kx)}{R} + f_{02} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad (23)$$

f_{01} 和 f_{02} 为常数。若假定所研究的是小缺陷壳体, 从而壳体在 M_i 扭矩作用下的势能 \bar{E} 可以近似地表示为(详细推导可参见文献[7]):

$$\bar{E} \approx \frac{Bn^4}{16R^2} f_1^2 - \frac{n^2 k L}{4R^3} (M_i - M_\alpha) f_1^2 - 2Bf_{01} f_1 \quad (24)$$

这里: M_α 为壳体的经典线性屈曲扭矩, B 为常数。

$$M_\alpha = \frac{R^2}{kL} \frac{\pi E R L h}{8} \left\{ \frac{4}{R n^2} \left[\frac{a_1^2}{(1 + a_1^2)^2} + \frac{b_1^2}{(1 + b_1^2)^2} \right] + \frac{h^2 n^2}{3(1 - \nu^2) R^3} [(1 + a_1^2)^2 + (1 + b_1^2)^2] \right\} \quad (25)$$

$$B = \frac{\pi E R L h}{8} \left\{ \frac{\pi^4}{16L^4} \left(\frac{4R}{n^2} \right)^2 \left[\frac{1}{(1 + k^2)^2} + \frac{1}{\theta^4} \right] + \frac{16\pi^4 h^2}{12(1 - \nu^2) L^4} - \frac{2\pi^2}{L^2 n^2} \left[\frac{4a_1^2}{(1 + a_1^2)^2} + \frac{4b_1^2}{(1 + b_1^2)^2} + \frac{1}{\theta^2} \right] + \frac{1}{R^2} \right\} \quad (26)$$

其中: E 为弹性模量, ν 为泊松比, $\theta = \pi R/nL$, $a_1 = k + \theta$, $b_1 = k - \theta$, $a_3 = k + 3\theta$, $b_3 = k - 3\theta$ 。

再令 \bar{M} 作用下(22)式中的 f_1 为 \bar{f} , 则 \bar{f} 满足:

$$4\alpha \bar{f}^3 + 2\beta(\bar{M} - M_\alpha)\bar{f} = \gamma e \quad (27)$$

这里为了今后的书写方便, 令 $\alpha = -Bn^4/16R^2$, $\beta = n^2 k L/4R^3$, $\gamma = -2B$, $e = f_{01}$ 。于是按照(11)式, 可得用于确定临界阶跃扭矩 M 的突变系统的平衡曲面方程可以写为:

$$-\alpha \bar{f}^4 - \beta(M + \bar{M} - M_\alpha)\bar{f}^2 + \gamma e \bar{f}_1 - [-\alpha \bar{f}^4 + \beta M_\alpha \bar{f}^2 + \gamma e \bar{f}] + \beta(\bar{M} + M)\bar{f}^2 = 0 \quad (28)$$

令 $f_1 - \bar{f} = z$, 并利用(27)式有:

$$\alpha z^4 + 4\alpha \bar{f} z^3 + (x_i + \beta M)z^2 + 2\beta M \bar{f} z = 0 \quad (29)$$

其中:

$$x_i = 6\alpha \bar{f}^2 + \beta(\bar{M} - M_\alpha) \quad (30)$$

再将(29)式两边对 z 求导数:

$$4\alpha z^3 + 12\alpha \bar{f} z^2 + 2(x_i + \beta M)z + 2\beta M \bar{f} = 0 \quad (31)$$

这样由(29)和(31)两式共同消去 z ,便得势函数 $R(x)$ 所决定的突变系统的分叉集,即临界阶跃扭矩 M_{ca} 所满足的方程为:

$$9\beta^3 M_{ca}^3 + \beta^2(9x_i - 6y_i - 21\alpha \bar{f}^2)M_{ca}^2 + [\alpha\beta \bar{f}^2(56y_i - 36x_i) + (\beta y_i^2 - 6x_i y_i \beta)]M_{ca} + \alpha \bar{f}^2(12x_i^2 - 16x_i y_i) + x_i y_i^2 = 0 \quad (32)$$

其中:

$$y_i = 16\alpha \bar{f}^2 - 3x_i \quad (33)$$

以下作为算例考虑 $R=32.75\text{mm}$, $L=80\text{mm}$, $h=0.2\text{mm}$, $E=2230\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.33$ 的圆柱壳,图3给出了不同 f_{01} 时的 $M_{ca}-\bar{M}$ 曲线。图3表明,随着 \bar{M} 的增加, M_{ca} 逐渐减少。另外应该指出,(24)式的势能近似表达式仅当 f_{01} 为小量且 M_i 接近 M_{ca} 时才成立,这样(27)式给出的 $\bar{M}-\bar{f}$ 关系时也仅当 f_{01} 为小量且 \bar{M} 接近 M_{ca} 时才成立,因此由(32)式给出的临界阶跃扭矩 M_{ca} 只有在 f_{01} 为小量且 \bar{M} 接近 M_{ca} 时才较为准确。

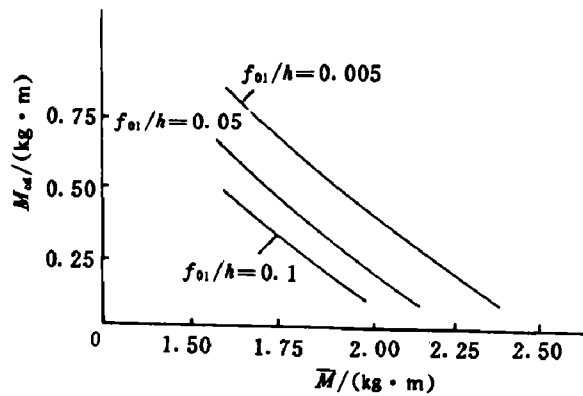


图3 $M_{ca}-\bar{M}$ 曲线

Fig. 3 $M_{ca}-\bar{M}$ curve

4 结束语

本文以突变理论为工具,研究了弹性结构在静力预加载下的冲击屈曲问题,从而为结构的冲击屈曲这一复杂问题提供了新的研究途径,显然,如何将本文的结果进一步推广到结构的塑性动力屈曲等问题将具有重要的意义。

参 考 文 献

- 1 Simitzes G J. Instability of Dynamically-loaded Structures. Appl Mech Review, ASME, 1987, 40(10):1403~1408
- 2 Jones N. Recent Studies on the Dynamic Plastic Behavior of Structures. Appl Mech Review, ASME, 1989, 42(2):95~115
- 3 Simitzes G J. Effect of Static Preloading on the Dynamic Stability of Structures. AIAA Journal, 1983, 21(8):1174~1180
- 4 Holasut S, Ruiz C. Effect of an Impulsive Disturbing Load on the Stability of a Statically Loaded Structure. Int Jour Impact Eng, 1985, 3(1):57~73

- 5 凌复华. 突变理论及其应用. 上海, 上海交通大学出版社, 1987
- 6 王德禹, 杨桂通. 简单弹性结构动力屈曲的突变模型. 见: 程昌钧, 郭仲衡主编. 现代数学和力学(MMM-4), 兰州, 兰州大学出版社, 1991年, 275~277
- 7 王德禹, 杨桂通. 弹性圆柱壳冲击扭转屈曲的突变模型. 固体力学学报, 1992, 13(3), 201~206

A CATASTROPHE MODEL FOR THE IMPACT BUCKLING OF STATIC PRELOADING STRUCTURES

Wang Deyu Zhang Shanyuan Yang Guitong

(Institute of Applied Mechanics Taiyuan University of Technology, Taiyuan, 030024)

ABSTRACT Based on the catastrophe theory, an impact buckling criterion is proposed for the static preloading elastic structures. By the proposed criterion, the impact buckling analysis for the Budiansky-Hutchinson model and elastic cylindrical shell under torsion are carried with, the corresponding critical load formulae are given.

KEY WORDS impact buckling, static preloading structures, catastrophe theory