

# 高速碰撞中的有限元方法及其应用

王肖物 胡秀章 李永池

(中国科学技术大学近代力学系 合肥 230026)

**摘要** 讨论了连续介质力学守恒方程的有限元离散方法,针对高速碰撞的物理特点,提出了数值计算中所应重视的问题及其有效的解决办法。文中给出的典型算例说明本方法对各类高速碰撞问题的数值模拟计算是十分有用和成功的。

**关键词** 高速碰撞 数值计算 有限元

## 1 引言

在高速碰撞的理论研究中,除了近似分析<sup>[1]</sup>之外,数值分析是另一种更为常用和重要的方法。建立在直接离散冲击力学守恒方程基础上的数值计算能够完整地给出碰撞过程中的全部物理量。这对实验研究和理论分析都有重要的意义,尤其是在超级小型机相对普及的今天,数值方法更有其实际应用的价值。尽管目前材料动态本构模型和破坏规律的研究还不很完善,数值计算的实用性还受到一定限制,但这并不影响它在理论研究中的地位<sup>[2]</sup>。与有限差分相比,有限元方法在网格的划分和选取、边界形状和边界条件的要求与处理上有着更大的灵活性和适应性,尤其是当滑移面计算、非线性大变形描述等问题解决后,有限元方法逐渐成为冲击力学中的重要数值方法。本文在流体弹塑性模型基础上,通过对连续介质力学守恒方程的有限元离散,建立适合于高速碰撞数值计算的离散方程,利用集中质量法将离散方程组进一步简化。文中还对沙漏变形、滑移面处理等问题作了讨论。最后通过几个典型的高速碰撞计算实例说明本文所述方法对于非线性大变形数值模拟计算是有效的。由此建立的计算程序应用范围广,效率高,有一定长处。此外本文还讨论了数值计算中有待改进和完善的几个问题。

## 2 基本方程及其离散

以 Euler 坐标为自变量时,连续介质力学的动量和能量守恒方程可写成

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij,j} + b_i \quad (1)$$

$$\dot{E} = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} + S - q_{i,i} \quad (2)$$

式中, $v_i$ 表示速度分量,“ $\cdot$ ”表示随体导数, $\sigma_{ij}$ 、 $\dot{e}_{ij}$ 分别表示应力张量和速度应变张量, $b_i$ 为单位体积上的体力, $E$ 为单位体积内能, $S$ 表示外热源, $q_i$ 表示热流矢量。

设体系  $\Omega$  上作用一虚速度  $\delta v_i$ 。将  $\delta v_i$  乘(1)式两边,经分部积分得到

$$\int_{\Omega} \rho \dot{v}_i \delta v_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega - \int_{\Gamma} \tau_i \delta v_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i \delta v_i d\Omega = 0 \quad (3)$$

• 本文系自然科学基金资助项目。

1993年1月2日收到原稿,7月5日收到修改稿。

式中:  $\Gamma$  表示解域  $\Omega$  的外边界,  $\tau_i^*$  为表面力,  $\tau_i^* = \sigma_{ij}n_j$ ,  $n_j$  为面法矢分量。上式实质上是虚功原理的数学表达, 式中诸项分别表示单位时间内体系的惯性力、内力和外力(表面力与体力)所作的虚功。

将解域  $\Omega$  作有限元剖分,  $\Omega = \sum_k \Omega_k$ , 这里  $k$  表示单元个数, 于是(3)式成为

$$\sum_k \left\{ \int_{\Omega_k} \rho \dot{v}_i \delta v_i d\Omega + \int_{\Omega_k} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega - \int_{\Gamma_k} \tau_i^* \delta v_i d\Gamma - \int_{\Omega_k} b_i \delta v_i d\Omega \right\} = 0 \quad (4)$$

在动态有限元的半离散化方法里, 单元  $\Omega_k$  内的速度场可表示成

$$v_i(x_j, t) = N_i^l(x_j) v_{il}^e(t) \quad (5)$$

这里  $N_i^l(x_j)$  为插值函数,  $v_{il}^e(t)$  表示单元节点  $l$  的速度分量, 它仅与时间有关。单元节点速度和总体节点速度间有如下关系,

$$v_{il}^e(t) = L_{ir} v_r(t) \quad (6)$$

式中  $L_{ir}$  是由元素 0 和 1 构成的关联算子, 它建立起单元节点编号  $l$  与总体节点编号  $r$  之间的联系。于是  $\Omega_k$  内的速度场又可以写作

$$v_i(x_j, t) = N_i^l(x_j) L_{ir} v_r(t) \quad (7)$$

将(7)式代入(4)式, 并设

$$\begin{aligned} m_{ij}^k &= \int_{\Omega_k} \rho N_i^l N_j^l d\Omega \\ f_{ij}^{km} &= - \int_{\Omega_k} \sigma_{ij} N_i^l N_j^l d\Omega \\ f_{ij}^{ksm} &= \int_{\Gamma_k} \tau_i^* N_i^l N_j^l d\Gamma + \int_{\Omega_k} b_i N_i^l N_j^l d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $f_{ij}^{km}$  为节点内力,  $f_{ij}^{ksm}$  为节点外力。于是有

$$\delta v_{il}(t) \left\{ \sum_k L_{ir} m_{ij}^k L_{js} \dot{v}_s(t) \right\} = \delta v_{il}(t) \left\{ \sum_k L_{ir} f_{ij}^{km} + \sum_k L_{ir} f_{ij}^{ksm} \right\} \quad (9)$$

进一步令

$$\begin{aligned} M_{rs} &= \sum_k L_{ir} m_{ij}^k L_{js} \\ F_r^{im} &= \sum_k L_{ir} f_{ij}^{km} \\ F_r^{ism} &= \sum_k L_{ir} f_{ij}^{ksm} \end{aligned} \quad (10)$$

由虚速度  $\delta v_{il}(t)$  的任意性, (9)式可以写成

$$M_{rs} \dot{v}_s(t) = F_r^{ism} + F_r^{im} \quad (11a)$$

或者

$$M_{rs} \dot{v}_s(t) = F_r \quad (11b)$$

上式  $F_r = F_r^{ism} + F_r^{im}$  表示作用在节点  $r$  上的合力。(11)式就是经有限元离散后各节点  $r$  的运动方程。它是关于时间  $t$  的线性常微分方程组。采用集中质量法可将(11)式对角化, 从而简化计算。此时

$$m_{ij}^k = m^k \delta_{ij}, \quad m^k = \frac{1}{n} \int_{\Omega_k} \rho d\Omega \quad (12)$$

$n$  表示单元节点数。由于关联算子  $L_{lr}$  中只有当  $l$  和  $r$  表示同一节点时其值才为 1, 其余元素全为零, 因此把(12)式代入(10)式便有

$$M_{rr} = \sum_l L_{lr} m^l L_{lr} = M \delta_{rr}$$

这里  $M$  表示节点  $r$  上的总质量, 为不使混淆, 我们将它记成  $M^{(r)}$ 。于是运动方程(11)成为

$$M^{(r)} \dot{v}_r(t) = F_r \quad (13)$$

上式指出, 已知某节点  $r$  的集中质量  $M^{(r)}$  和合力  $F_r$ , 立即可以求出该点的加速度  $\dot{v}_r(t)$ 。

(8)式中的节点内力  $f_r^{int}$  需要通过本构关系求出。在流体弹塑性模型中应力张量和速度应变张量被分解成

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + S_{ij} \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_0\delta_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

式中速度应变  $\dot{\epsilon}_{ij}$  和平均速度应变  $\dot{\epsilon}_0$  被定义成

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \\ \dot{\epsilon}_0 &= \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3}\dot{V}/V \end{aligned} \quad (15)$$

静水压  $p$  服从流体型状态方程  $p = p(V, E)$ , 例如常见的 Grüneisen 方程

$$p = p_v + \Gamma E(1 + \mu) \quad (16)$$

式中:  $p_v = p(V)$  表示冷压,  $\Gamma$  为 Grüneisen 参数,  $\mu = \frac{V_0}{V} - 1$ 。应力偏量和应变偏量间有增量型弹塑性本构关系。在数值计算里通常采用下述弹性尝试计算实现

$$\dot{S}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \omega_u S_{ij} + \omega_\mu S_{ii} \quad (17)$$

$\omega_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2$  为旋转率张量, 上式右端后两项表示二维计算里的旋转修正。对于 Von Mises 屈服材料, 当按(17)式求出的  $J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \geq \frac{1}{3}\sigma_f^2$  时材料进入塑性屈服, 偏应力张量通过下述近似修正得到:

$$S_{ij} = [(1/3)^{1/2}\sigma_f \sqrt{S_{ii}^* S_{ii}^* / 2}] S_{ij}^* \quad (18)$$

$S_{ij}^*$  是按弹性尝试计算式(17)求得的应力。严格说来, (18)式只对理想塑性体成立, 从塑性本构关系出发直接计算塑性状态的应力偏量是可能的, 但计算要比上述修正复杂许多<sup>[3]</sup>。

将(5)式代入(15)式, 则得速度应变张量的离散表达式

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= (B_{ij}v_{jt} + B_{ji}v_{it})/2 \\ \dot{\epsilon}_0 &= B_{ii}v_{it}/3 \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $B_{ij} = \partial N_i / \partial x_j$ 。

在高速碰撞中, 载荷主要表现为高速弹体对靶板碰撞所引起的突加载荷。此时惯性力起主导作用, 体系的体力和表面力相对而言常可忽略, 于是(8)式中的  $f_r^{int} \approx 0$ 。

此外, 高速碰撞的动态响应主要表现为波动响应, 时间尺度常以微秒为单位, 因此热传导的作用可予忽略, 设体系无外热源作用, 则能量方程(2)式简化成

$$\dot{E} = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = -p\dot{\epsilon}_0\delta_{ij} + S_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (20)$$

在时间域里积分离散方程(13), 立即得到节点速度  $v_{it}$ 。通常我们采用具有二阶精度的显式中心差分

$$\begin{aligned} \dot{v}_i^n &= F_i^n / M^{(r)} \\ v_i^{n+1/2} &= v_i^{n-1/2} + \dot{v}_i^n \Delta t \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $n$  表示计算的时间层次。有了  $v_i^{n+1/2}$ , 则由速度应变定义[(19)式]可计算  $\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1/2}$ ,  $\dot{\epsilon}_v^{n+1/2}$  和  $\epsilon_{ij}^{n+1/2}$  于是新时间层上的应力偏量[参见(17)式]

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n + \dot{S}_{ij}^{n+1/2} \Delta t$$

和内能  $E$  为

$$E^{n+1} = E^n + \dot{E}^{n+1/2} \Delta t$$

通过状态方程(16)式计算静水压力  $p^{n+1/2}$ , 从而求出新时间层上的节点力  $F_i^{n+1}$ 。由此实现循环计算。

当采用显式时间积分时, 时间步长  $\Delta t$  必须服从 Courant 稳定性要求

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l}{C} \quad (22)$$

式中:  $\Delta l$  为单元特征尺度(如三角形单元里的高  $h$ , 四边形单元里的面积平方根  $\sqrt{A}$  等),  $C$  表示 Lagrange 声速。在冲击力学数值计算里, 为了较好地刻划局部区域介质变形和破坏的细节, 特征尺度  $\Delta l$  常常取得很小, 使得按(22)式计算的  $\Delta t$  不超过  $1\mu s$ 。尽管高速碰撞的物理过程很短, 由于  $\Delta t$  很小, 时间方向上的积分层次依然很多, 有时可达上万次。为了减少计算量, 我们在选取单元时要尽量避免采用精度高但计算量大的高次元, 可取三角形线性元或双线性四边形单元, 对于前者, 插值函数为

$$N_i(x_1, x_2) = a_i + b_i x_1 + c_i x_2 \quad (23)$$

由上式知  $B_{ij} = \partial N_i / \partial x_j = \text{常数}$ 。从(18)式可以看到, 此时的速度应变  $\dot{\epsilon}_{ij}$ 、 $\dot{\epsilon}_v$  只依赖于节点速度  $v_i$ , 而与空间坐标无关。对于双线性四边形单元, 其插值函数可表成

$$N_i(x_1, x_2) = a_i + b_i x_1 + c_i x_2 + d_i x_1 x_2 \quad (24)$$

此时  $B_{ij}$  不再为常数。通常需要用 Gauss 积分法求节点内力  $f_i^m$ 。积分点的多寡直接关系到计算量的大小。这里我们建议采用单点积分, 即在参考平面  $\zeta, \eta$  上, 取  $\zeta = \eta = 0$  作为积分点。其实质是把四边形单元作为常应力常应变单元处理。但是这会导致沙漏变形致使计算中断。文献[4]中介绍了一种通过引入沙漏应变、沙漏应力的办法来克服由单点积分造成的困难。

突加载荷引起的强间断及其传播, 会引起数值振荡导致计算失稳。为此需要引入人工粘性力来光滑数学上的间断面。例如可以采用下述混合型体积粘性力

$$Q = \begin{cases} a\rho C_0 \Delta t |\dot{\epsilon}_v| + b\rho \Delta t^2 (\dot{\epsilon}_v)^2 & , (\dot{\epsilon}_v < 0) \\ 0 & , (\dot{\epsilon}_v \geq 0) \end{cases} \quad (25)$$

式中:  $C_0$  为 Lagrange 初始声速,  $\dot{\epsilon}_v = 3\dot{\epsilon}_v$ 。

此外, 在弹靶接触面上必须引入滑移面技术。其基本思想是: 将弹体表面作为主滑移面, 在靶板的部分计算域里预先设置一系列从节点。在保证单元动量守恒和动量矩守恒的前提下, 适当调整滑移面上主从节点的速度分量, 使从节点严格沿调整后的主滑移面运动, 具体计算公式请参考文献[5]。

### 3 算例

根据上述方法我们建立了包括三角形单元和四边形单元在内的二维有限元数值计

算程序,并用以计算各类高速碰撞问题。

### 3.1 细长弹对混凝土厚靶的侵彻

图1表示一细长弹以速度  $v_0=700\text{m/s}$  撞击混凝土厚靶时引起的侵彻现象,图中弹体

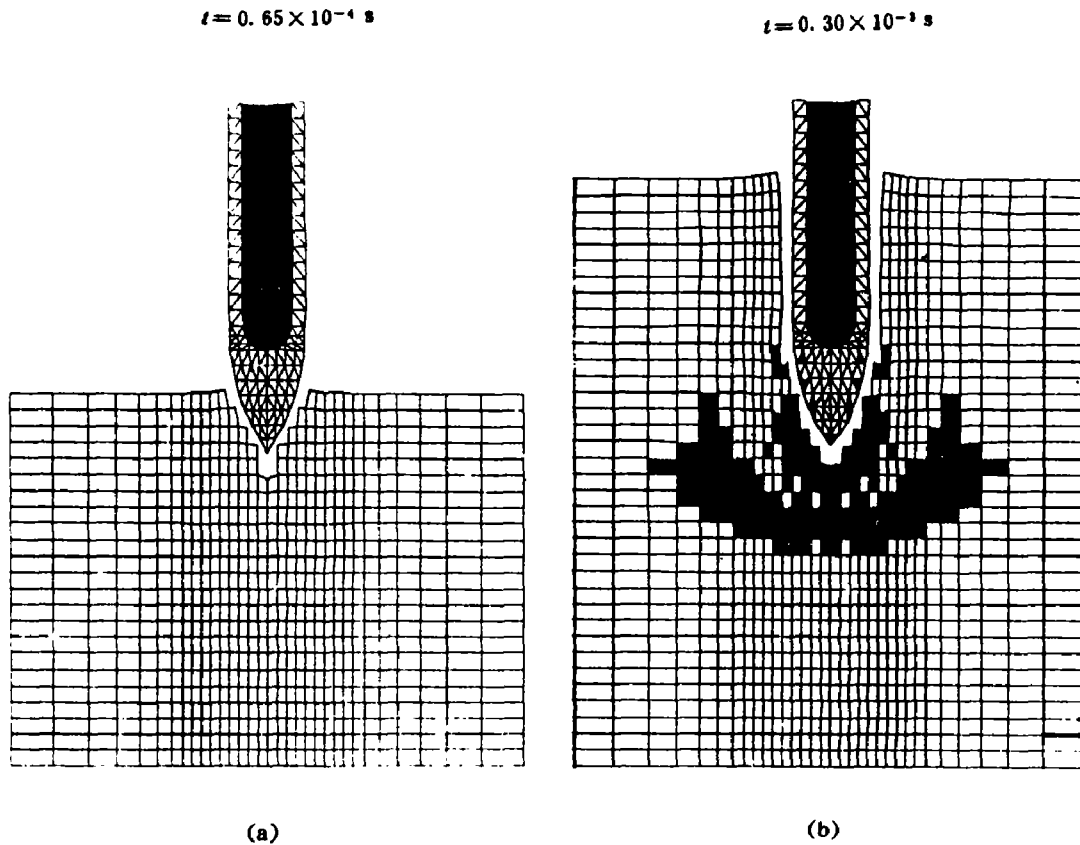


图1 细长弹对混凝土靶板的侵彻

Fig. 1 A slender projectile penetrates into a concrete target

里的黑影部分表示装药。为减少计算单元又不失计算精度,在弹体和靶板里我们分别设置了如图所示的三角形单元和四边形单元,设弹体为高强度合金钢,状态方程为 Grüneisen 方程[见(16)式]。混凝土可压缩性大,强度低,资料上见到的多为静压试验结果,我们取如下的线弹性关系作近似简化

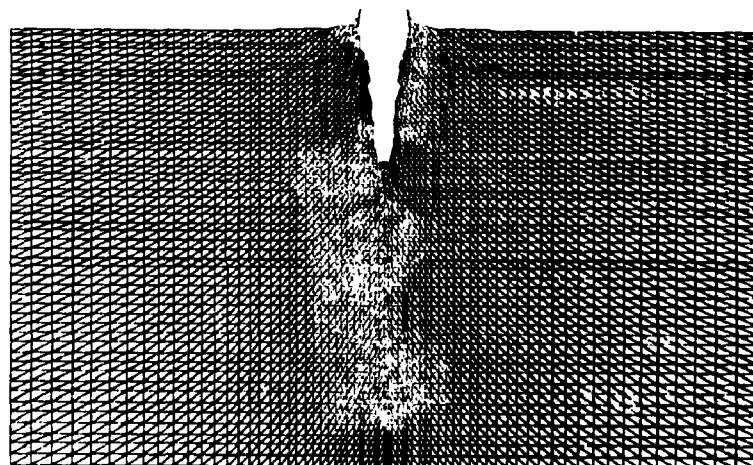
$$p = -K\Delta V/V, \quad (\Delta V = V_0 - V) \quad (26)$$

其中  $K$  为材料的体积弹性模量。作为方法试验,两种材料均取成理想弹塑性体,其中,弹体材料的屈服应力  $\sigma_r = 2.48\text{GPa}$ ,靶板材料的屈服应力  $\sigma_r = 2.09\text{MPa}$ 。

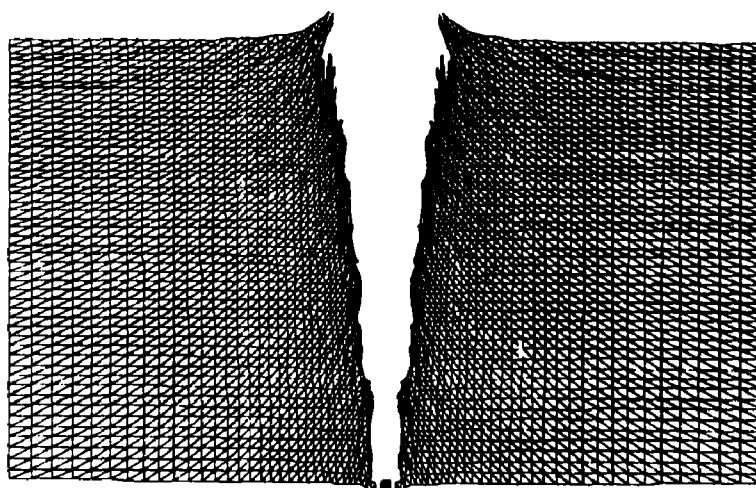
由于弹体和靶板强度相差很大,因此在侵彻过程中变形主要集中在强度较弱的靶板里,尤其是在靶板与弹体相接触的局部区域里。计算中我们设定一等效塑性应变  $\bar{\epsilon}_e = \left[ (2d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 / 3) \right]^{1/2}$  作为判别材料塑性破坏的“开关”。当单元的等效塑性应变累积值超过此阈值时,则该单元因塑性变形而破坏。图1中弹体与靶板相接触周围的空白区域代表塑性变

形破坏单元。图中混凝土靶板里的黑影单元(图 1b)表示处于塑性流动状态的单元,由此可以看出侵彻过程中塑性破坏和塑性区的发展。计算显示,这种弹在侵彻过程中变形和破坏主要集中在弹体四周的一个薄层内,因此动能损失较少,具有良好的贯穿能力。

### 3.2 高速钢球在水中的侵彻贯穿



(a)



(b)

图2 高速钢球在水中的贯穿

Fig. 2 A steel ball penetrates in water with high speed

图2表示一高速钢球以 $v_0=1000\text{m/s}$ 撞击水面所引起的侵彻贯穿现象。为了能较好地反映物理过程,我们选用了近3500个三角形单元,水按粘性流体处理,压力 $p$ 服从下述形

式的弹性流体方程

$$\frac{p+B}{1+B} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \quad (27)$$

式中:  $B, n$  为材料参数。应力偏量则由 Stokes 本构关系给出

$$S_{ij} = 2\eta\dot{e}_{ij} \quad (28)$$

粘性系数  $\eta$  可以是温度的函数。

和算例(1)相比,由于水的抗剪能力远不如混凝土,因此钢球在贯穿过程中将引起水的剧烈畸变。这也是我们选用三角形单元的主要原因。由图可见,钢球在贯穿过程中会造成周边水介质较大的横向运动,从而出现一条尺度要比钢球直径大得多的贯穿通道。此外,钢球入口处的水,在自由面影响下变形和运动十分剧烈,形成明显的激溅。这些计算结果与实验观察到的现象是一致的。

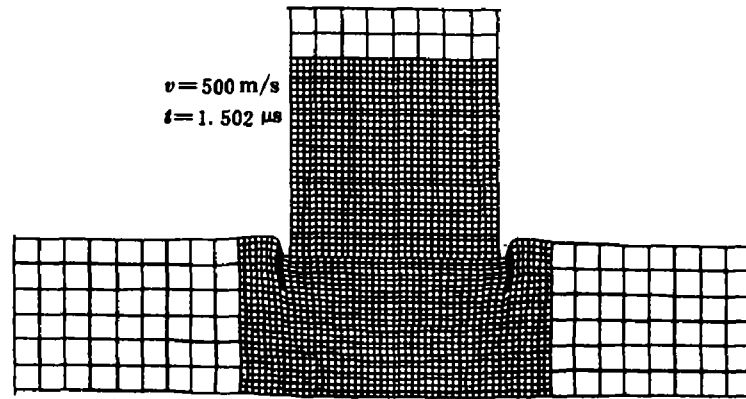
### 3.3 平头弹对钢板的高速碰撞

图 3 表示一刚性平头子弹碰撞钛合金靶板时的计算结果。靶板的本构方程如下式所示

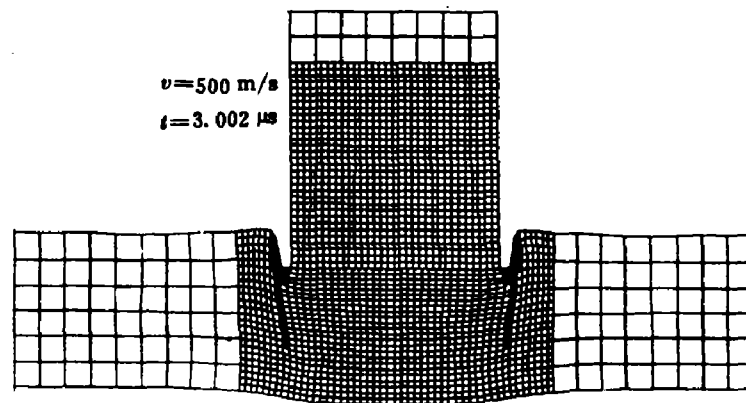
$$\sigma_r = (\sigma_0 + A\bar{e}_p)[1 + B\lg(\frac{\dot{e}_p}{\dot{e}_0} + 1)][1 - \alpha\frac{\Delta T}{T_0}] \quad (29)$$

式中:  $\bar{e}_p, \dot{e}_p$  分别表示等效塑性应变和等效塑性应变率,  $\sigma_0$  为简单拉伸屈服应力,  $A, B, \alpha, T_0$  和  $\dot{e}_0$  为材料常数。(29)式是一种描述材料应变硬化应变率硬化和热软化的热粘塑性本构关系。对于这类材料的高速碰撞问题,由于刚性子弹的侧面与靶板相接触的附近区域发生强烈的畸变,会发生因温度的剧烈上升而引起热软化,出现热塑失稳的绝热剪切区。图 3 中的黑影区域表示满足热塑失稳的单元。塑性失稳导致抗剪能力降低,从而使失稳单元两侧材料相对滑动加快,最终产生冲塞现象,数值计算可以显示从剪切区的形成到冲塞出现的全过程。

上述算例说明,按本文方法建立的有限元数值计算程序对于高速碰撞数值模拟是适宜的,能基本上反映各类撞击问题的主要物理特征。但是数值方法作为一种独立的研究手段还存在很多问题,受到诸多因素的制约。例如,材料本构关系就是直接影响计算结果的重要因素。尽管对本构关系的理论研究目前已有一定基础,可是材料动态力学性能的实验测定却往往跟不上实际问题的需要,因此在计算时常遇到怎样合理选取材料参数的问题。再如表征单元材料破坏的等效塑性应变  $\bar{e}_p$  的阈值也很难选定。从物理上讲,材料动态破坏行为的方式和因素很多,试图用  $\bar{e}_p$  来概括破坏行为不但是困难的,而且是不全面不严谨的。如何将各类宏观和细观的动态破坏模型嵌入到计算程序里去,仍有大量工作要做。因此,进一步把理论研究,实验研究和数值方法结合在一起,加强相互间的联系,应该是今后我们研究的课题与方向。



(a)



(b)

图3 平头弹在靶板中的侵彻过程(黑影单元为塑性失稳单元)

Fig. 3 The projectile penetration at two instances

(the elements in the black shadow represent the plastic instability elements)

## 参 考 文 献

- 1 Li Yongchi, Hu Xiuzhang, Wang Xiaojun, Chen Li, Liu Shengqiu. An Approximation Analysis for Penetration of High Velocity Slender Projectiles into Concrete Target. In: Proceedings of the 2nd international symposium on intense dynamic loading and its effects. Chengdu, Sichuan University Press 1992, 645~649
- 2 Zukas J A, Nicholas T, Swift H F, Greszczuk L B, Curran D R. Impact Dynamics. John Wiley and Sons, New York, 1982
- 3 陈良胜. 动塑性本构理论及数值方法研究和层裂数值模拟: [硕士论文]. 合肥: 中国科学技术大学. 1992
- 4 王肖钧, 胡秀章, 刘胜求. 四边形单元中的沙漏控制. 计算物理, 1991, 8, (3): 313~318
- 5 Johnson G R. EPIC-2, A Computer Program for Elastic-Plastic Impact Computations in 2 Dimensions Plus Spin. Honeywell, Inc. Defence Systems Division, ARBRL-CR-00373, 1978.



## FINITE ELEMENT METHODS AND ITS' USE IN HYPERVELOCITY IMPACT

Wang Xiaojun, Hu Xiuzhang, Li Yongchi

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China,  
Hefei, Anhui 230026)*

**ABSTRACT** The finite element discretization of conservative equations in continuum mechanics is discussed in this paper. Several problems which should be taken into account in numerical study of hypervelocity impact are stressed and the effective measures to solve them are also described in the paper. Typical examples are given to show that the program which is build up by this method is very useful and successful in numerical simulations of hypervelocity impact.

**KEY WORDS**; hypervelocity impact, numerical simulation, finite element