

防护结构拟动力试验方法 及其数值积分方法研究

李志成 黄小平 钱七虎

(南京工程兵工程学院 南京 210007)

摘要 近来发展起来的拟动力试验方法用于防护结构的抗爆试验是一项正在研究的技术^[1], 针对于此项研究中数值积分方法部分进行了研究。分析了可用于防护结构拟动力试验的各种积分方法, 讨论了已有方的数值特征及可行性。并提出一种修正的中心差分方法用来对因试验摩擦引起的能量损失进行补偿, 同时研究了该方法的数值特性。

关键词 拟动力试验方法 数值积分 防护结构

抵抗核爆炸荷载作用的防护结构无疑需要进一步研究。在核爆炸荷载作用下防护结构的非弹性变形对防护目的来说是一个有利条件。然而防护结构的非弹性变形是复杂的, 许多学者都致力于结构体系的抵抗核爆炸荷载能力的研究^[2]。就目前来说, 防护结构的动力性能研究可分为分析方法和实验方法。分析方法研究主要是利用数学和力学知识或借助于计算机进行数值分析的研究, 有限元方法应用就是研究防护结构动力性能和动力反应的一种分析方法。尽管各种各样的分析方法都用来求解结构的动力响应, 但是由于结构的数学模型构造的误差和结构的非线性特性假设的误差而使分析结果的可靠性得不到保证。但尽管如此, 分析方法仍有可重复性和灵活性等优点。另一方面, 实验手段已对防护结构研究的发展起了很大的作用, 因为实验方法是了解结构系统非弹性性状和改进防护结构功能现状的最可靠手段。随着电子与机械领域研究的发展, 试验设备和方法都不断得到改变。现有防护结构试验有各种各样的方法, 如核爆炸压力模拟器试验、激波管试验和现场试验等。

防护结构试验用核爆炸模拟器试验和激波管试验均可用于防护工程效应的试验研究, 但其缺点是荷载作用时间短、边界效应和尺寸效应以及只能进行小比例尺模型试验等。现场试验是最有效试验, 现场试验可以用实际核爆炸去对实际防护结构进行试验, 因而最有代表性, 但众所周知的原因是核爆炸试验次数少、耗资多, 因而受到试验次数限制。

最近国内外正在研制的拟动力试验方法是一种可以对各种各样的结构体系或构件进行大比例尺或足尺的非弹性试验, 而大比例尺结构试验是用传统试验方法很难实现的。拟动力试验方法是结合了数值分析方法和一般静力试验方法的一种先进方法, 它是用传统的数值积分来计算结构的响应, 而结构的恢复力则是在试验中由试件上的传感器测得的。

拟动力试验方法的基本原理已有不少资料报导^[3,4,5]。首先将试件理想化成离散的集中质量体系, 然后将加载的作动器接在试验件的每个质量位置上, 且方向与作用的荷载方

向相同。用分步积分法求解运动方程得到试件集中质量上位移后,加在集中质量上,与传统的数值积分方法不同的是试件的恢复力并不是预先假定,而是实测的。前一步测得的恢复力特性及指定的阻尼大小,可以计算试件此步位移大小,通过荷载作动器加在试件集中质量位置上,重复这个计算与量测过程便可得到结构动力反应。在这个过程中试件承受指定位移就象作用有荷载一样,拟动力试验方法就是这种组合了数值分析与实验方法的优点而改变了传统数值积分方法分析的缺点的一种很有前途的方法。

由于拟动力试验方法是一种结合了数值积分与实验技术的方法,因而可靠的数值积分方法是试验成功的保证。本文第一部分讨论已有的几种用于拟动力试验的数值方法,对几种方法进行精度、稳定性数值特性的讨论,并对本文提出的新的数值积分方法修正的中心差分法进行研究,讨论了其数值特性。第二部分结论提出适用于防护结构拟动力试验的数值积分方法。

1 拟动力试验用的数值积分方法

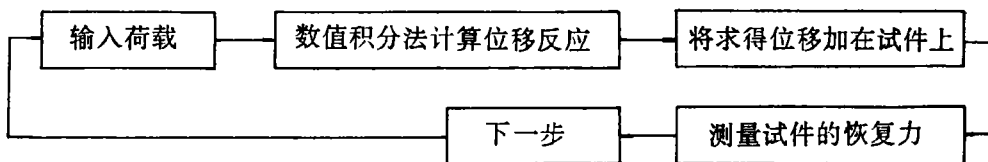
前面已经说过拟动力试验的基本原理是不需假设结构的恢复力和位移关系特性,而是用加载时测得的数据来求解结构运动方程。拟动力试验中研究的是离散体系模型,试验结构的质量及阻尼矩阵是经分析后指定的,而在集中质量位置上因变形而产生的恢复力是在试验中测得的。尽管拟动力试验方法应用并不局限结构的类型,但为简化试验系统,最好还是用在可简化成有限几个的集中质量体系的结构。如果简化合理的话,拟动力试验的结果就可以认为是真实结构的动力反应近似。

试验中,结构首先离散化成一个集中参数体系,体系的运动方程可以用一组二阶常微分方程组来表示,其形式如下:

$$Ma + Cr + r = f \quad (1)$$

其中: r 是恢复力向量, a, v 是加速度和速度向量, f 为外荷载向量。

运动方程(1)中质量和阻尼矩阵 M 和 C 都是经分析指定的,试验时运动方程可借助于各种分步数值积分方法来求解。每一步计算的位移 d 可通过计算机控制的电液作动器准静态加在试件上,由实际变形而引起的恢复力 r 在每步结束时由荷载传感器来测得,然后反馈到下一步位移反应的计算中。拟动力试验方法的流程图如下:



拟动力试验可用不同积分方法,本节分三部分讨论分步积分方法。

1.1 直接分步积分法概念

所谓直接分步积分法是指对运动方程(1)直接进行数值积分而不需变换成其它形式。事实上直接数值积分是基于两个概念基础上,第一是平衡方程仅在离散点得到满足,而不

是任意时刻上,因此静力分析中各种分析方法可以用在直接积分上;第二是需假定每个时间间隔 Δt 内的位移、速度和加速度变化形式。

倘若初始时刻的位移、速度和加速度已知,要求 $0 \sim t$ 时间内解,分步积分法中,先将时间 t 分成 N 个时间间隔 Δt ,即 $\Delta t = t/N$,积分即求时刻 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$ 处的近似解。

分步积分方法一般可分为显式和隐式方法,显式方法即每一步的位移解是以前步解的函数,否则就是隐式方法。

数值积分的目的是为了求得所研究结构真实动力反应的近似值,数值积分时必须考虑其稳定性和精度,即为了得到精确的结果。时间积分方法既要稳定性好也要精度高,稳定性是指结构和自由振动反应并不会因任意的初始条件而变成无限大;如果一个方法是稳定的,且当 Δt 趋近于零时,解接近于真实解,称方法是收敛的,为了使稳定性好和精度高,要合理选择合适时间步长,即为了得到足够精确的解,步长必须足够小,但如果步长太小,积分步数过多,又会导致累积误差过大。

就稳定性而言,积分方法可分为无条件稳定和有条件稳定两种。无条件稳定是指对任意的积分时间步长和任意的初始条件都不会导致解的无限增大。而有条件稳定是指当步长 Δt 小于某一称为稳定极限的值时,解才不会无限增大。一般隐式方法是无条件稳定的,即它们对任意 $\omega \Delta t$ (ω 是所分析系统的自振频率)都是稳定的,通常显式方法是有条件稳定的,但显式方法计算效率却很高^[6]。

与显示方法相比,拟动力试验中使用隐式方法较为困难。因为,隐式积分方法通常需要当前步刚度来确定当前步位移,但试验中非线性系统的刚度不能精确地确定,而仅能测得的是因位移加在试件上产生的恢复力 r 。因为试件的切线刚度每步都不一样,因而用隐式方法来求解非线性微分方程需要迭代校正,而这正是非弹性试验所不希望的。迭代校正中位移的不断改变会产生较大累积误差,因为非弹性恢复力主要取决于加上试件的位移,因此显式方法比隐式方法更优越。特别是当结构离散后自由度数不多时,此时时间步长并不是受结构最高频率控制,显式方法特别有效。最近国外正在研究允许使用隐式积分格式同时又不需要迭代和估计切线刚度阵的积分方法^[7]。但其试验设备及控制技术要求比较高。

1.2 拟动力试验用数值积分方法

1.2.1 中心差分法

中心差分法是结构动力学中使用最多的一种显式方法^[8]。它是日本几乎所有成功的地震工程结构拟动力试验用的一种方法^[9],因为它有效且精度高。此法最初也是由日本学者首先用在拟动力试验中的,基本中心差分法假设速度和加速度可用下式来表示:

$$v_i = \frac{d_{i+1} - d_{i-1}}{2\Delta t} \quad (2)$$

$$a_i = \frac{d_{i+1} - 2d_i + d_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (3)$$

将方程(2)、(3)代入 $i \cdot \Delta t$ 时刻平衡方程(1)中,可以解出:

$$d_{i+1} = (M + \frac{\Delta t}{2}C)^{-1} [\Delta t^2(f_i - r_i) + (\frac{\Delta t}{2}C - M)d_{i-1} + 2Md_i] \quad (4)$$

由于前一步的恢复力 r_i 可由试验测得,因此方程(4)可以很方便地用拟动力试验的

位移计算。

基本中心差分法是二步法,即需要一个特殊的起始条件来计算前两步的位移反应。国外研究表明,当一个很小的 Δt 值用在计算中时,数值计算时可能会引起很大的截断误差^[10]。

1.2.2 累积形式的中心差分法

累积形式的中心差分法可以有效地减少因使用基本中心差分法步长很小而引起的截断误差。此方法中,令:

$$z_i = \frac{d_i - d_{i-1}}{\Delta t} \quad (5)$$

因此
$$z_{i+1} - z_i = \Delta t a_i \quad (6)$$

和
$$z_{i+1} + z_i = 2v_i \quad (7)$$

将方程(5)、(7)代入平衡方程(1)中后化简可得到:

$$z_{i+1} = \left(\frac{M}{\Delta t} + \frac{C}{2}\right)^{-1} [f_i - r_i + \left(\frac{M}{\Delta t} - \frac{C}{2}\right) z_i]$$

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t z_i$$

1.2.3 显式的 Newmark 法

Newmark 积分方法是常用的一种积分方法之一,此法假设:

$$M a_{i+1} + C v_{i+1} + r_{i+1} = f_{i+1} \quad (8)$$

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right) a_i + \beta a_{i+1} \right] \quad (9)$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t [(1 - \gamma) a_i + \gamma a_{i+1}] \quad (10)$$

其中: $a_{i+1}, v_{i+1}, d_{i+1}$ 是 $(i+1)\Delta t$ 时刻的加速度、速度和位移, β 和 γ 是用来保证精度和稳定性的可选参数。如令 $\beta=1/4, \gamma=1/2$, 此法即隐式的无条件稳定的常加速度法, 当 $\beta=0$ 时, 方程(9)中的 a_{i+1} 不出现, 此法变成显式方法。

令 $\beta=0$ 和 $\gamma=1/2$, 将方程(9)、(10)代入方程(8)可解得:

$$a_{i+1} = \left(M + \frac{\Delta t}{2} C\right)^{-1} (f_{i+1} - r_{i+1} - C v_i - \frac{\Delta t}{2} C a_i) \quad (11)$$

方程(9)、(10)、(11)构成了拟动力试验用的基本算式。

一般 γ 的取值应大于或等于 $1/2$, 否则算法不稳定, 当 $\gamma=1/2$ 时, 解最精确。尽管此法是一步法, 数值特性上与基本中心差分法一样。

1.2.4 修正的 Newmark 法

以上三种方法都不具备数值耗散特性, 然而数值耗散特性却能抑制因多自由度体系试验误差而产生的高频反应的增长。修正的显式 Newmark 方法中, 数值阻尼与频率成正比, 此方法有如下格式:

$$M a_{i+1} + \left[(1 + \alpha) K + \frac{\rho}{\Delta t^2} M \right] d_{i+1} = f_{i+1} + \left(\alpha K + \frac{\rho}{\Delta t^2} M \right) d_i \quad (12)$$

式中: K 是刚度矩阵。

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + \frac{\Delta t^2}{2} a_i \quad (13)$$

$$r_{i+1} = r_i + \frac{\Delta}{2}(a_i + a_{i+1}) \quad (14)$$

在拟动力试验中 Kd_{i+1} 和 Kd_i 分别用 r_{i+1} 和 r_i 来代替, 将方程(13)、(14)代入方程(12)中可解出 a_{i+1} :

$$a_{i+1} = M^{-1}[f_{i+1} - (1 + \alpha)r_{i+1} + \alpha r_i] + \frac{\rho}{\Delta^2}(d_i - d_{i+1})$$

此法中阻尼特性已隐含在方程中, 无需进一步指定阻尼矩阵 C , 参数 α, ρ 可以任意选择来确定每个振动模态数值阻尼大小。当选择 $\alpha = \rho = 0$ 时, 修正 Newmark 与显式 Newmark 法相同。

1.2.5 修正的中心差分法

仿照修正的 Newmark 法, 本文提出修正的中心差分法。此法与修正的 Newmark 方法一样具有与频率成正比的数值阻尼大小, 通过选择合适的 α, ρ , 可以使第一阶振型以外的振型分量变得可以忽略不计, 此方法表达如下:

$$Ma_i + Cr_i + [(1 + \alpha)K + \frac{\rho}{\Delta^2}M]d_i = f_i + (\alpha K + \frac{\rho}{\Delta^2}M)d_{i-1} \quad (15)$$

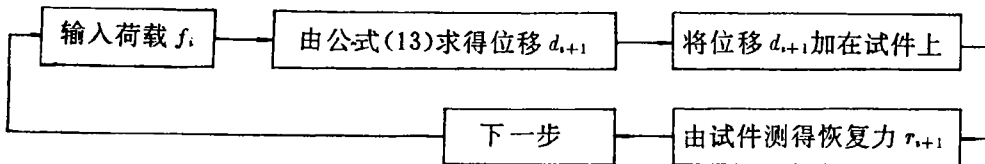
$$a_i = \frac{d_{i+1} - 2d_i + d_{i-1}}{\Delta^2} \quad (16)$$

$$r_i = \frac{d_{i+1} - d_{i-1}}{2\Delta} \quad (17)$$

将方程(16)、(17)代入方程(15)中且用 r_i, r_{i-1} 代替 Kd_i 和 Kd_{i-1} , 可解出 d_{i+1} 的表达式:

$$d_{i+1} = [f_i - (1 + \alpha)r_{i-1} + \frac{\rho}{\Delta^2}M(d_{i-1} - d_i) + 2\frac{M}{\Delta^2}d_i + (\frac{C}{2\Delta} - \frac{M}{\Delta^2})d_{i-1}] / (\frac{M}{\Delta^2} + \frac{C}{2\Delta}) \quad (18)$$

此方程用于拟动力试验的过程简图如下:



1.3 拟动力试验直接积分法精度与稳定性

到目前为止, 还没有一种非线性结构体系的稳定极限标准, 但是防护结构用材料一般都是软化型材料, 故由初始刚度决定的时间步长同样适用于以后计算而不致于出现不稳定现象。

下面对修正的中心差分法的稳定极限条件进行分析, 时间 $t\Delta$ 时刻不考虑速度项的平衡方程为:

$$Ma_i + Kd_i + (\alpha K + \frac{\rho}{\Delta^2}M)(d_i - d_{i-1}) = f_i \quad (19)$$

化简为:

$$a_i + \omega^2 d_i + (\alpha\omega^2 + \frac{\rho}{\Delta t^2})(d_i - d_{i-1}) = p_i \quad (20)$$

将公式(2)、(3)代入公式(20),式中: $\omega = \sqrt{k/m}$, $p_i = f_i/M$;且令: $\Omega = \omega \Delta t$ 得:

$$d_{i+1} = [2 - \Omega^2 - (\alpha\Omega^2 + \rho)]d_i + [\alpha\Omega^2 + \rho - 1]d_{i-1} + R \quad (21)$$

方程(21)可写成如下递推形式:

$$\begin{bmatrix} d_{i+1} \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \Omega^2 - (\alpha\Omega^2 + \rho) & (\alpha\Omega^2 + \rho) - 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ d_{i-1} \end{bmatrix} + R \quad (22)$$

对自由振动反应荷载项 $R=0$ 。

对应于稳定性分析中的公式,对规定初始条件则:

$$[X_{i+n, v}] = [A]^n \cdot \{X_i\} \quad (23)$$

A 是放大算子,对方程(23)的分析可借助于对称算子 A^* 的分解来进行。

$$A^* = P J^* \cdot P^{-1} \quad (24)$$

P 是 A 的特征向量阵; J 是 A 的约当型(即 A 的特征值 λ_i 在 J 的对角线上)。因逼近算子一般是非对称的,故可用更一般分解:

$$A = P J P^{-1} \quad (25)$$

令 $\rho(A)$ 是 A 的谱半径,其定义为:

$$\rho(A) = \max |\lambda_i| \quad i = 1, 2, \dots \quad (26)$$

于是可知仅当 $\rho(A) \leq 1$ 时, J^n 才是有界的(当 $n \rightarrow \infty$),即若 $\rho(A) < 1$,则 $J^n \rightarrow 0$,且 $\rho(A)$ 越小,收敛越快。

对修正的中心差分法放大算子 A 为:

$$A = \begin{bmatrix} 2 - \Omega^2 - (\alpha\Omega^2 + \rho) & (\alpha\Omega^2 + \rho) - 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

令 A 的特征值:

$$\lambda_{1,2} = C \pm D i \quad (28)$$

求 A 的特征值可得知:

$$C = \frac{1}{2} [2 - \Omega^2 - (\alpha\Omega^2 + \rho)] \quad (29)$$

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{-4(\alpha\Omega^2 + \rho - 1) - [2 - \Omega^2 - (\alpha\Omega^2 + \rho)]^2} \quad (30)$$

故其数值阻尼 ξ 大小可由下式表示:

$$\bar{\Omega} = \arctan \frac{D}{C} \quad (31)$$

$$\xi = \frac{\ln(C^2 + D^2)}{2\bar{\Omega}} = \frac{\ln(1 - \rho - \alpha\Omega^2)}{2\bar{\Omega}} \quad (32)$$

因为自由振动位移为:

$$d^n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \quad (33)$$

其中: C_1, C_2 是由初始条件确定的系数。若要保证自由振动反应是谐振曲线,则公式(28)中 D 必须是实数。

$$-4(\alpha\Omega^2 + \rho - 1) - [2 - \Omega^2 - (\alpha\Omega^2 + \rho)]^2 \geq 0 \quad (34)$$

因为 Ω^2 为实数,化简推导得:

$$\Omega = \omega\Delta t \leq \sqrt{\frac{-(\alpha\rho + \rho - 2) + \sqrt{4 - 4\rho - 4\alpha\rho}}{(1 + \alpha)^2}} \quad (35)$$

由 $\rho(A) < 1$ 可推出:

$$\Omega \geq \sqrt{-\rho/\alpha} \quad (36)$$

式(35)、(36)即为修正中心差分法稳定性条件。倘若 $\alpha = \rho = 0$,则可推得 $0 \leq \Omega \leq 2$,与基本中心差分法一样,这一点从式(19)亦可看出。由式(36)分析可知,当 $\Omega < (-\rho/\alpha)^{1/2}$ 时,数值阻尼为负,积分格式不稳定;而当 $\Omega = (-\rho/\alpha)^{1/2}$ 时,数值阻尼为零。

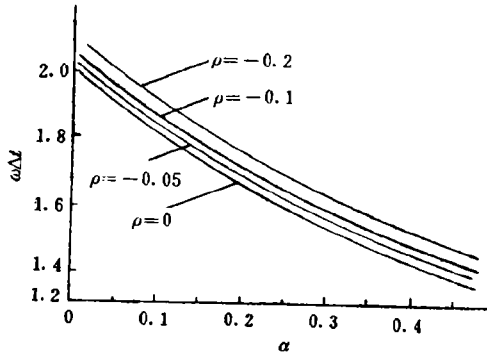


图 1 极限步长与数值阻尼参数 α, ρ 关系
Fig. 1 Relationship between integration time interval and numerical damping parameters α, ρ

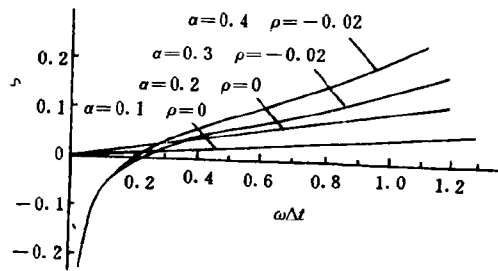


图 2 数值阻尼大小 ζ 与参数 α, ρ 及步长的关系
Fig. 2 Relationship between numerical damping ratio ζ and parameters α, ρ and integration time interval

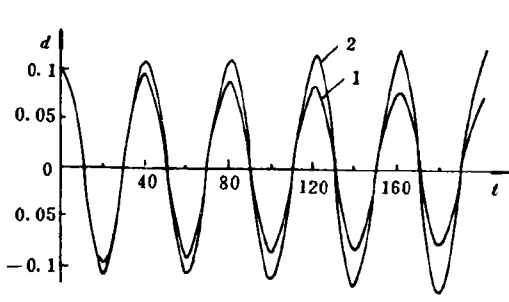


图 3 具有数值阻尼和粘滞阻尼反应比较
Fig. 3 Comparison of responses with numerical damping and viscous damping

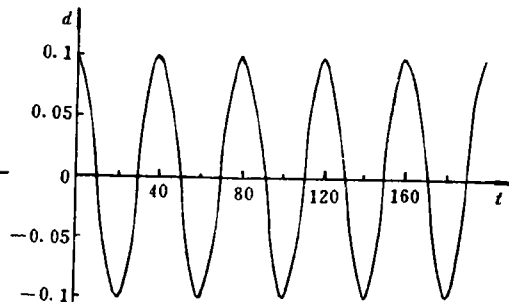


图 4 无阻尼自由振动与经过补偿后位移反应的比较
Fig. 4 Critical integration time interval vs numerical damping parameters α, ρ

图 1 根据式(35)得,可以看出随着 α, ρ 变化而影响 Ω 。由式(29)~(32)可得图 2。从图 2 可看出:(1)数值阻尼随 α, ρ 变化的情况,(2) ξ 随 Ω 增大而增大,因而对多自由度体系可以很好地抑制高频分量增长;(3)当 $\Omega \leq (-\rho/\alpha)^{1/2}$ 时,数值阻尼 ξ 为负,相当于引进一逐步变大的外荷载,因而可以补偿因摩擦而引起的能量损失。图 3 表示的是单自由度体系能量补偿情形,曲线 1 认为摩擦存在而造成能量损失,相当于 1% 的粘滞阻尼;曲线 2 是 $\alpha=0.32, \rho=0.01$ 情况而相当于 1% 的负粘滞阻尼。图 4 所示是无阻尼自由振动曲线与补偿后的曲线比较。由图 4 可以发现,此能量补偿效果很好。

2 结 论

1. 根据已经成功的拟动力试验资料及本文分析表明:中心差分法简明、有效,对频率成分丰富的爆炸荷载较为有效,但应用时注意尽管基本中心差分法、累积形式中心差分法和显式 Newmark 法数值特性相等,即具有相同的稳定性和精度特性,但其数值特征不同,倘若有误差的位移用在计算中时,基本中心差分法比其他方法有更明显误差传递特性。但是只要在下步计算中使用上步计算的位移时,中心差分法误差传递特性就会得到改善。

2. 修正的 Newmark 方法和修正的中心差分法用在多自由度体系的拟动力试验中可有效地抑制因试验误差造成的高频分量无限制增长,因为在多自由度体系中高频模态的误差传递现象特别显著。

3. 修正的中心差分法可有效地用在单自由度体系中,补偿因摩擦而引起的能量损失,从而解决摩擦误差的传递问题。

4. 修正的中心差分法和修正的 Newmark 方法在使用数值阻尼特性时,应注意到步长选取的极限的修正,并注意随着数值阻尼参数变化而造成的 $\omega \Delta t$ 取值范围变化。

参 考 文 献

- 1 工程兵工程学院. 防护结构动力试验的计算机模拟系统论证报告. 1990. 2
- 2 钱七虎,等. 防护结构计算原理. 南京:工程兵工程学院. 1980, 245~292
- 3 Mahin S A, Shing P B. Pseudodynamic Method for Seismic Testing. Journal of Structure Engineering ASCE, 1985, 111(7):1482~1502
- 4 Katada T, Hakuno M. Nonlinear Analysis of Surface Ground Motion by Digital Control on-line Experimental Method. Proc. 8th World Conference on Earthquake Engineering, 1984, San Francisco CA U. S. A., 1033~1040
- 5 Thewalt C R, Mahin S A. Hybrid Solution Techniques for Generalized pseudodynamic Testing. Report No. UCB/EERC-87/09 July 1987
- 6 Bathe K J, Wilson E L. 林公豫,等译. 有限元分析中数值方法. 北京:科学出版社, 1985, 346~364
- 7 Hideaki Tsutsumi, Akira Higashiura. Pseudodynamic Testing Method Using the Newmark Implicit Integration Method. Proc 9th World Conference on Earthquake Engineering, Vol IV 1988, Tokyo-Kyoto, Japan, 41~46
- 8 Subbaraj K, Dokainish M A. A Survey of Direct Time-Integration Method in Computational Structural Dynamics- I ; Explicit Method. Computers and Structures, 1989, 32 (6):1371~1386
- 9 Koichi Takanashi, Masayoshi Nakashima. Japanese Activities on on-Line Testing. Journal of Engineering Mechanics, 1987, 113(7):1014~1032
- 10 Masayoshi Nakashima. Relationship Between Integration Time Interval and Accuracy of Displacement, Velocity, and Acceleration Response in Pseudodynamic Testing. Part I, Journal of Structural and Construction Engineering Transactions of AIJ, 1985, (358):1371~1386

PSEUDO-DYNAMIC TESTING OF PROTECTIVE STRUCTURES AND STUDY OF NUMERICAL INTEGRATION METHOD

Li Zhicheng, Huang Xiaoping, Qian Qihu

(*Nanjing Engineering Institute, Nanjing, 210007*)

ABSTRACT Pseudo-dynamic test is still a new and under studying technique in blast-resistant tests of protective structures. In this paper the integration methods which can be adopted in the pseudo-dynamic test are analysed, their numerical characteristics and applicability for shock loading are discussed. A new modified central difference method which can be used to compensate the loss of energy caused by test apparatus is suggested.

KEY WORDS pseudo-dynamic test, numerical integration methods, protective structures