

# 载荷作用区域及形状对圆柱壳、 梁和圆板最终位移的影响\*

赵亚溥

(北京大学力学系 北京 100871)

**摘要** 结构在强动短时载荷下所产生的最终位移通常强烈地依赖于载荷形状和载荷作用区域。借助于有效载荷和有效冲量的概念,研究了中载情况时载荷作用区域和形状对加固圆柱壳、筒(固)支梁及筒支圆板最终位移的影响,给出了对应于上述三种结构元件在不发生剪切失效的情况下表征载荷区域影响的“载荷区域因子”。

**关键词** 载荷形状 载荷作用区域 有效载荷 有效冲量 载荷区域因子

矩形脉冲载荷和突加速度的所谓“冲击载荷”是强动短时载荷的两种理想情况。由于“压力-时间”历史简单,在数学处理上造成了很大的方便,因此大多数塑性动力响应的解析解是在这两种载荷下得到的。工程实际中所产生的动载荷的“压力-时间”历史可能很复杂,而具有 $\delta$ 函数性质的冲击载荷、矩形脉冲载荷、直线或指数衰减载荷、三角形载荷以及正弦曲线等形式的载荷(图1)都只是实际载荷形状的理想化模型。容易理解研究载荷形状对结构最终位移的影响不但具有一定的理论意义还具有重要的实际意义。该方面较早的工作可参阅 Perzyna<sup>[1]</sup>, Hodge<sup>[2]</sup>和 Symonds<sup>[3]</sup>。该方面研究的重要进展是 Youngdahl(1970年)<sup>[4]</sup>提出的所谓“有效载荷”及“有效冲量”的概念。之后,他本人<sup>[5]</sup>、Krajcinovic<sup>[6]</sup>及 Zhu, Huang, Yu & Wang<sup>[7]</sup>等完善并发展了该方面的研究工作。

文献[4]中,Youngdahl 建议动载荷可用有效冲量及有效载荷来表征,他定义:

$$I_e = \int_{t_y}^{t_t} p(t) dt \quad (1a)$$

$$p_e = I_e / (2t_{\text{mean}}) \quad (1b)$$

$$t_{\text{mean}} = \frac{1}{I_e} \int_{t_y}^{t_t} (t - t_y) p(t) dt \quad (1c)$$

分别代表  $p(t)$  的有效冲量、有效载荷及平均作用时间。式中:  $t_y$  和  $t_t$  分别代表结构开始发生塑性变形时间及响应终止时间。

由于  $t_t$  事先并不知道,Youngdahl 建议了下式:

$$p_y(t_t - t_y) = I_e \quad (1d)$$

式中:  $p_y$  是结构的静态屈服载荷。

\* 国家教委博士点基金资助项目。

1993年4月9日收到原稿,8月3日收到修改稿。

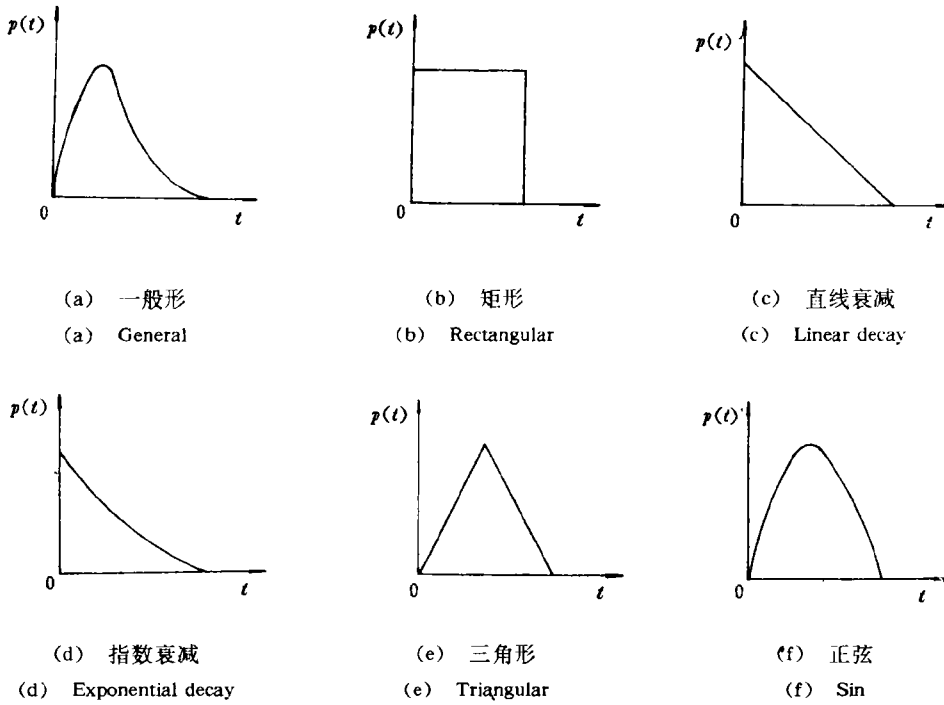
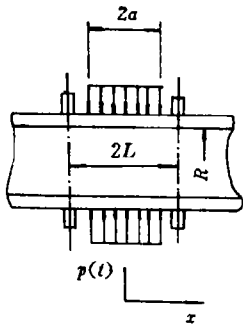


图 1 载荷形状  
Fig. 1 Pulse shape

### 1 圆 柱 壳

考虑如图 2 所示一个无限长圆柱薄壳,在壳表面设置有等距刚性加固环。加固环间距为  $2L$ ,对称加载区域为  $2a$ 。由极限分析知,在跨间均布载荷时其极限载荷为:



$$p_0 = \frac{N_0}{R} + \frac{4M_0}{L^2} \quad (2a)$$

式中:  $N_0$  和  $M_0$  分别为极限膜力和极限弯矩,  $R$  为薄壳之平均半径。

当只在  $2a$  范围内作用有均布载荷时,其极限载荷为:

$$p^* = \frac{p_0}{\alpha(2 - \alpha)} \quad (2b)$$

图 2 加强圆柱薄壳

式中  $\alpha = a/L$ 。

Fig. 2 A reinforced circular cylindrical shell

圆柱壳运动方程为:

$$M_r'' + N_\varphi/R + p(r,t) - m\ddot{w} = 0 \quad (3)$$

式中:  $(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$ ,  $(\ddot{\cdot}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot)$ ,  $M_r$  为弯矩,  $N_\psi$  为环向膜力,  $m$  为单位中面面积壳体质量,  $w$  为径向位移。

间断条件为:

$$[M_r] = [M_r'] = [\dot{w}] = 0 \quad (4)$$

在中载时屈服条件为:

$$N_\psi = -N_0, \quad -M_0 \leq M_r \leq M_0 \quad (5)$$

速度边界条件:

$$\dot{w} = \dot{w}_0(t)(1 - x/L) \quad (6)$$

式中  $w_0(t)$  为  $x=0$  处的速度。

由于问题的对称性, 只需研究圆柱壳之半。当  $0 \leq x \leq a$  时, 由(3)、(5)式和(6)式得:

$$M_r' = \frac{N_0}{R} + m\dot{w}_0(1 - x/L) - p(t)$$

上式积分一次并应用  $x=0$  时  $M_r = 0$ , 得到  $0 \leq x \leq a$  弯矩分布为:

$$M_r = M_0 + \frac{N_0}{R} \frac{x^2}{2} + m\dot{w}_0 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) - \frac{x^2}{2} p(t) \quad (7)$$

对于  $a \leq x \leq L$  段, 由于无外载作用, 故有:

$$M_r' = N_0/R + m\dot{w}_0(1 - x/L)$$

利用上式并根据间断条件(4), 可得  $a \leq x \leq L$  内  $M_r$  分布为:

$$M_r = \frac{N_0}{R} \frac{x^2}{2} + m\dot{w}_0 \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{x}{3L} \right) - \alpha x p(t) + M_0 + \frac{a^2}{2} p(t) \quad (8)$$

由边界条件  $x=L$  时  $M_r = -M_0$ , 得到:

$$\dot{w}_0 = \frac{3}{2m} \alpha (2 - \alpha) [p(t) - p^*] \quad (9)$$

上式积分一次, 得到  $x=0$  处速度为:

$$\dot{w}_0(t) = \frac{3}{2m} \alpha (2 - \alpha) \left[ \int_{t_0}^t p(t) dt - p^* (t - t_0) \right]$$

由上式可得响应终止时间表达式为:

$$t_f = t_0 + I_c / p^* \quad (10)$$

由(10)式和(1)式, 经过推导最终可得  $x=0$  处最终位移表达式为:

$$W_0(t_f) = \frac{3}{4m} I_c^2 (1 - p_0/p_c^*) \quad (11)$$

式中:

$$I_c = \alpha(2 - \alpha) I_c, \quad p_c^* = \alpha(2 - \alpha) p_c \quad (12)$$

(11)和(12)式表明, 只要将传统定义的有效冲量和有效载荷都乘上一个反映载荷区域影响的“载荷区域因子” $\alpha(2 - \alpha)$ , 则最终位移的表达式和传统形式完全一致<sup>[7]</sup>。

以上的讨论中须满足  $M_r|_{r=0} \leq 0$ , 即:

$$p^* \leq p(t) \leq \frac{3p_0 - 2(N_0/R)}{3\alpha(2 - \alpha) - 2} \quad (13)$$

由(13)式还可以看出,  $\alpha$  还必须满足:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1 \quad (14)$$

## 2 简支梁

考虑如图3所示的简支梁,梁长为 $2L$ ,在 $2a$ 范围内受 $p(t)$ 作用。

由文献[8]可知,梁中点的加速度为:

$$\ddot{W}_0 = \frac{3}{2m} \alpha(2-\alpha)[p(t) - p^*] \quad (15)$$

式中; $\alpha = a/L$ ,  $p^* = p_0/\alpha(2-\alpha)$ ,  $p_0 = 2M_0/L^2$ 。

和圆柱壳情况类似,经过推导可以得到梁中点的最终位移表达式为:

$$W_0(t_f) = \frac{3}{4m} I_c'^2 (1 - p_0/p_c') \quad (16)$$

式中:

$$I_c' = \alpha(2-\alpha)I_c, p_c' = \alpha(2-\alpha)p_c \quad (17)$$

由(16)和(17)式可知,对简支梁而言反映载荷区域影响的“载荷区域因子”为 $\alpha(2-\alpha)$ 。

本节诸式成立的载荷和区域限制是:

$$p^* \leq p(t) \leq \frac{3p_0}{3\alpha(2-\alpha) - 2} \quad (18a)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1 \quad (18b)$$

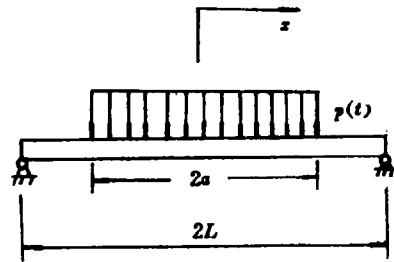


图3 简支梁

Fig. 3 Simply supported beam

## 3 简支圆板

如图4所示一个中心圆域内受 $p(t)$ 作用的简支圆板,由文献[9]可知,中心点的加速度为:

$$\ddot{W}_0(t) = \frac{2}{m} \alpha^2(3-2\alpha)[p(t) - p^*] \quad (19)$$

式中; $\alpha = a/R$ ,  $p^* = p_0/\alpha^2(3-2\alpha)$ ,  $m$ 为单位面积板的质量,  $p_0 = 6M_0/R^2$ 。

类似于圆柱壳和梁的推导,最后可得:

$$W_0(t_f) = \frac{I_c'^2}{m} (1 - p_0/p_c') \quad (20)$$

式中:

$$I_c' = \alpha^2(3-2\alpha)I_c, p_c' = \alpha^2(3-2\alpha)p_c \quad (21)$$

因此,对简支圆板而言反映载荷作用区

域影响的“载荷区域因子”为 $\alpha^2(3-2\alpha)$ 。

本节的讨论必须满足以下条件:

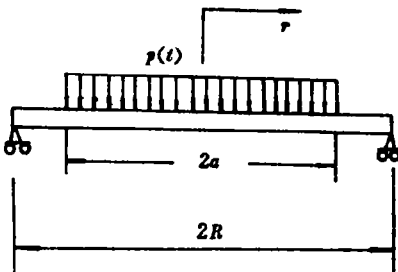


图4 简支圆板

Fig. 4 Simply supported circular plate

$$p^* \leq p(t) \leq \frac{2p_0}{2\alpha^2(3-2\alpha)-1} \quad (22a)$$

$$\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \quad (22b)$$

#### 4 结束语

本文研究了强动短时载荷的形状和作用区域对加固圆柱壳、简支梁和简支圆板的最终挠度的影响,提出了反映载荷作用区域的“载荷区域因子”的概念。如上所述结构全部均有载荷时的最终挠度表达式中的有效冲量和有效载荷都乘上相应结构的“载荷区域因子”后即得到部分对称区域作用有载荷的公式。这些结构的载荷区域因子分别为:

(1)圆柱壳: $\alpha(2-\alpha)$ ; (2)简支梁: $\alpha(2-\alpha)$ 和(3)简支圆板: $\alpha^2(3-2\alpha)$ 。

以上结构的材料均为理想刚塑性体,载荷范围为中载且不发生剪切失效。

#### 参 考 文 献

- 1 Perzyna P P. Arch Mech Stosow, 1958, 10: 635~647
- 2 Hodge P G, Brooklyn N Y. J appl Mech, 1956, 23: 617~624
- 3 Symonds P S. J Appl Mech, 1958, 20: 475~481
- 4 Youngdahl C K. J Appl Mech, 1970, 37: 744~752
- 5 Youngdahl C K. Int J Solids Struct, 1971, 7: 1127~1142
- 6 Krajinovic D. Int J Non-Linear Mech, 1972, 7: 571~575
- 7 Zhu G, Huang Y G, Yu T X, Wang R. Int J Impact Engng, 1986, 4(4): 271~282
- 8 赵亚溥. 爆炸与冲击, 1992, 12(3): 247~250
- 9 赵亚溥. 载荷作用区域对刚塑性简支圆板动力响应的影响, (待发表)

### THE INFLUENCE OF LOADING AREA AND PULSE SHAPE ON THE PERMANENT DEFLECTIONS OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS, BEAMS AND CIRCULAR PLATES

Zhao Yapu

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing, 100871)

**ABSTRACT** It has been demonstrated that the final deflections of structures strongly dependent on the pulse shape (i. e., time-pressure history) and the loading area. By means of effective load  $p_e$  and effective impulse  $I_e$ , the influence of loading area and pulse shape on the final deflections of circular cylindrical shells, beams and simply supported circular plates are studied, “loading area factors” for the structures mentioned above are presented.

**KEY WORDS** pulse shape, loading area, effective load, effective impulse, loading area factor