

# 三相介质饱和土自由场中 爆炸波的传播规律

钱七虎 王明洋

(南京工程兵工程学院 南京 210007)

**摘要** 饱和土是由固体土颗粒、水和少量封闭的空气组成的三相介质。介绍了爆炸波作用下三相介质饱和土有限元基本方程的建立过程,推导了引进人工粘性项的动力有限元方程,得到在饱和土自由场中爆炸波的传播规律;不同空气含量饱和土中爆炸波随深度的衰减规律。文中还给出了有限元与有限差分间断分解结果的比较,以说明本文理论方法的有效性。

**关键词** 三相饱和土 爆炸波 人工粘性

## 1 引言

有些防护结构是埋设在饱和土中的,饱和土的特征之一是含有少量的封闭空气,因此它是由固体土颗粒、水和空气组成的三相介质。在稍强的爆炸波作用下,饱和土的性能与非饱和土有很大的不同。试验表明,当爆炸波在饱和土中传播时,波阵面的速度、压力和粒子速度与饱和土中空气含量密切相关。然而,非饱和土中计算应力波的传播及相互作用的方法和公式不适用于饱和土。迄今为止,还没有较好的方法来研究三相介质饱和土在爆炸波作用下的动力特性。所以,找到合适的模型及计算方法具有十分重要的实际意义。

试验还表明,饱和土不能看作弹性介质,为此,必须建立饱和土的本构关系。为简化起见,我们只研究核爆和化爆作用下的平面波。此时问题当作一维,并忽略介质中的剪应力。通过饱和土中每相介质的压力-密度关系导出其三相介质的压力-密度方程,它表明饱和土是一种非线性弹性介质。这个结论是符合试验结果的<sup>[1]</sup>。

文中运用介质动力学得到运动微分方程,利用加利亚金方法建立有限元的非线性微分方程进行分析。然后,将微分方程离散成代数方程得到非线性代数方程,通过引进人工粘性来改善有限元分析中的收敛特性。文中给出了有限元解与差分间断分解结果的比较,说明我们方法的有效性。这为进一步开展三相介质饱和土动力特征及相关课题的研究打下基础。

## 2 三相介质饱和土基本方程

### 2.1 三相介质饱和土状态方程

设饱和土中气体、液体和固体颗粒的体积含量分别为  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ ; 相应的密度为  $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 、

$\rho_3$ ; 零压声速为  $c_1, c_2, c_3$ 。

当  $p = p_0$  时, 介质的密度为

$$\rho_0 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 \quad (1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (2)$$

上述每种组合的状态方程为

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k_1} \quad (\text{气体}) \quad (3)$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_2 c_2^2}{k_2} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right)^{k_2} - 1 \right] \quad (\text{液体}) \quad (4)$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_3 c_3^2}{k_3} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_3} \right)^{k_3} - 1 \right] \quad (\text{固体}) \quad (5)$$

式(3)、(4)和(5)中,  $k_1, k_2, k_3$  为相应组分熵指数, 一般取  $k_1 = 1.4, k_2 = k_3 = 3.0$ 。

当压力为  $p$  时, 由于各组分的压缩性有异, 组分的体积含量是不确定的。设压力  $p$  时各组分相应含量分别为  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ , 三相介质的密度为  $\rho$ , 则由式(3)、(4)、(5)可以得到

$$\alpha_1^* = \alpha_1 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{k_1}} \quad (6)$$

$$\alpha_2^* = \alpha_2 \left[ \frac{k_2(p - p_0)}{\rho_2 c_2^2} + 1 \right]^{-1/k_2} \quad (7)$$

$$\alpha_3^* = \alpha_3 \left[ \frac{k_3(p - p_0)}{\rho_3 c_3^2} + 1 \right]^{-1/k_3} \quad (8)$$

而压力  $p$  时, 三相介质密度为

$$\rho = \rho_0 + (\alpha_1 - \alpha_1^*) \rho_1 + (\alpha_2 - \alpha_2^*) \rho_2 + (\alpha_3 - \alpha_3^*) \rho_3 \quad (9)$$

将式(6)~(8)代入式(9)经计算, 最后导出饱和水土的状态方程

$$\rho = \rho_0 \left\{ \alpha_1 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{k_1}} + \alpha_2 \left[ \frac{k_2(p - p_0)}{\rho_2 c_2^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{k_2}} + \alpha_3 \left[ \frac{k_3(p - p_0)}{\rho_3 c_3^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{k_3}} \right\}^{-1} \quad (10)$$

## 2.2 介质的运动方程

运动方程表示的是介质的动量与质量守恒定律, 在拉格朗日坐标系中, 对于平面一维流问题, 不考虑剪应力响应, 这些方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial h} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial h} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

相应的初始条件和边界条件为

$$\rho(0) = \rho_0 \quad (13)$$

$$u(0) = 0 \quad (14)$$

$$p(0) = p_0 \quad (15)$$

$$p(0, t) = f(t) \quad (16)$$

式(11)~式(16)中,  $u$  为介质质点速度,  $h$  为物质坐标,  $V$  为比容, 由  $V = 1/\rho$  可知

$$V = \frac{1}{\rho_0} \left\{ \alpha_1 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{k_1}} + \alpha_2 \left[ \frac{k_2(p - p_0)}{\rho_2 c_2^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{k_2}} + \alpha_3 \left[ \frac{k_3(p - p_0)}{\rho_3 c_3^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{k_3}} \right\} \quad (17)$$

由于饱和土中空气含量很少,在密实介质中, $\rho$ 随 $h$ 变化不大,因而 $\rho$ (或 $V$ )可近似看作仅为 $t$ 的函数,即

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = 0$$

设 $V=F(p)$ ,仅是 $t$ 的函数。

### 3 饱和土的动力有限元方程

#### 3.1 人工粘性

由状态方程式(10)可知,饱和土是一种非线性弹性介质,爆炸波在此介质中传播时,就会产生激波,对此问题的处理,现有的有限差分方法存在计算量大,而且需要许多计算经验,特别是在研究饱和土-结构动力相互作用时,有限差分法也甚不方便。而一般的有限元方法计算激波问题十分困难,有时是不行的,其原因是激波面是一个几何面,物理量在面上出现间断。而从物理上讲,由于介质粘性和扩散的影响,激波实际上并非是一个几何面,它有一定的宽度,在此宽度内,物理量是连续变化的。从理论上讲,只要在动力学方程组中引入合理的人工粘性作用和扩散作用,有限元法即可用于激波计算。这里还需指出,由于激波的宽度极小,空间步长实际上又不能过小,引入的人工粘性和扩散作用必须有一定量级,不能太小。此外,考虑到激波阵面处存在一定的能量耗散作用,因此引入项中必须含有偶数阶导数项,但又不希望出现明显的数值振荡,如何协调人工粘性与耗散效应的关系,是一个值得深入具体摸索的问题。

现取人工粘性项 $q$ 如下,并将式(11)中的变量 $p$ 以 $p+q$ 代替,则有如下方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(p+q)}{\partial h} = 0 \quad (18)$$

式中:

$$q = \begin{cases} \gamma \left| \frac{\partial u}{\partial h} \right|, & \frac{\partial u}{\partial h} \leq 0 \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial h} > 0 \end{cases}$$

$$\gamma = a\rho c \Delta h$$

其中: $\rho$ 是介质密度; $c$ 是波阵面处的局部声速; $\Delta h$ 为单元步长; $a$ 是常数,通常为0.2~0.5之间。

由关系式

$$c = (dp/d\rho)^{1/2} \quad (19)$$

再利用式(10),则式(19)可以写为

$$c = \frac{\left\{ \alpha_1 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{k_1}} + \alpha_2 \left[ \frac{k_2(p-p_0)}{\rho_2 c_2^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{k_2}} + \alpha_3 \left[ \frac{k_3(p-p_0)}{\rho_3 c_3^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{k_3}} \right\}}{\rho_0 \left\{ \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1+k_1}{k_1}} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \left[ \frac{k_2(p-p_0)}{\rho_2 c_2^2} + 1 \right]^{-\frac{1+k_2}{k_2}} + \frac{\alpha_3}{\rho_3 c_3^2} \left[ \frac{k_3(p-p_0)}{\rho_3 c_3^2} + 1 \right]^{-\frac{1+k_3}{k_3}} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

当 $p=p_0$ 时

$$c_0 = \left\{ \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_3 c_3^2} \right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

而  $p = \rho_1 c_1^2 / k_1$

### 3.2 方程的有限元离散

对运动微分方程式(18)及式(11)取近似解

$$u^{(e)} = u_i^e(t) \varphi_i^e(h), \quad V^{(e)} = V_i^e(t) \varphi_i^e(h), \quad p^{(e)} = p_i^e(t) \varphi_i^e(h) \quad (22)$$

$\varphi_i$  为形函数,且有如下关系

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1 \quad (23)$$

由式(18)有  $V_i^e(t) \varphi_i^e(h) = V_i^e(t) [\varphi_1(h) + \varphi_2(h)] = V^e(t)$ , 所以

$$V_1^e(t) = V_2^e(t) = V_i^e(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

将式(22)代入式(18)及式(11),运用伽利略法,取权函数  $w = \varphi_i(h)$ , 则有

$$\int_e \dot{u}_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e dh + \int_e p_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e dh - \gamma \int_e u_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e dh = 0 \quad (24)$$

$$\int_e u_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e dh - \int_e \dot{V}_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e dh = 0 \quad (25)$$

对上面式(24)、(25)进行分部积分,并引入边界条件,得如下方程

$$\dot{u}_i^e \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh - p_i^e \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh + \gamma u_i^e \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh = - p_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e |_{e^*} + \gamma u_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e |_{e^*} \quad (26)$$

$$u_i^e \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh - \dot{V}_i^e \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh = 0 \quad (27)$$

式(26)中,  $\gamma u_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e |_{e^*} = 0$

对第一单元有

$$- p_i^e \varphi_i^e \varphi_j^e |_{e^*} = - p_1^e(t) \varphi_1^1 \varphi_1^1(0) = - f(t) \varphi_1^1$$

对其它单元为零,设

$$A_{ij}^e = \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh; \quad B_{ij}^e = \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh;$$

$$C_{ij}^e = \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh; \quad \alpha_{ij}^e = \int_e \varphi_i^e \varphi_j^e dh$$

则式(26)及式(27)可以写成如下形式(注意脚标交换)

$$A_{ij}^e \dot{u}_j^e - C_{ij}^e p_j^e + \gamma \alpha_{ij}^e u_j^e = f_i^e(t) \quad (28)$$

$$B_{ij}^e u_j^e - A_{ij}^e F'(p) p_j^e = 0 \quad (29)$$

式中:

$$f_i^e(t) = \begin{cases} -f(t) \varphi_1^1, & i=1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}; \quad F'(p) = \frac{\dot{V}_i^e}{\dot{p}_i^e}$$

对式(28)及式(29)进行组装后,有限元方程为

$$A_{nm} \dot{u}_m - C_{nm} p_m + D_{nm} u_m = f_n \quad (30)$$

$$B_{nm} u_m - A_{nm} F'(p) p_m = 0 \quad (31)$$

式中:

$$A_{nm} = \sum A_{ij}^e \Delta_{in}^e \cdot \Delta_{jm}^e$$

$$B_{nm} = \sum B_{ij}^e \Delta_{in}^e \cdot \Delta_{jm}^e$$

$$C_{nm} = \sum C_{ij}^e \Delta_{in}^e \cdot \Delta_{jm}^e$$

$$D_{nm} = \gamma \sum \alpha_{ij} \Delta x_n \Delta y_m$$

$$f_n = \begin{cases} f_1(t), & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$\Delta$  ——  $e$  单元的布尔矩阵。

由差分关系式:

$$\dot{u}_m^t = \frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{\Delta t}$$

$$\dot{p}_m^t = \frac{p_m^{t+1} - p_m^t}{\Delta t}$$

$$u_m = (1 - \theta)u_m^{t+1} + \theta u_m^t$$

$$p_m = (1 - \theta)p_m^{t+1} + \theta p_m^t$$

且令

$$A'_{nm} = A_{nm}/\Delta t, \Delta t \text{ —— 时步。}$$

将上述关系式代入式(30)及式(31),整理后得运动方程为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A'_{nm} + D_{nm}(1 - \theta) & -C_{nm}(1 - \theta) \\ (1 - \theta)B_{nm} & -A'_{nm}F'(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m^{t+1} \\ p_m^{t+1} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} f_n \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A'_{nm} - \theta D_{nm} & C_{nm}\theta \\ -B_{nm}\theta & -A'_{nm}F'(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m^t \\ p_m^t \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

#### 4 爆炸波在饱和土自由场中的传播

首先,为了验证 FEM 的有效性,将 FEM 计算结果与差分间断分解法计算结果进行比较。计算中取如下参数:

$$\begin{aligned} c_1 &= 340\text{m/s}, \quad c_2 = 1500\text{m/s}, \quad c_3 = 4500\text{m/s}, \quad \rho_0 = 2.21 \times 10^3\text{kg/m}^3, \\ \rho_1 &= 1.2\text{kg/m}^3, \quad \rho_2 = 1.0 \times 10^3\text{kg/m}^3, \quad \rho_3 = 2.65 \times 10^3\text{kg/m}^3, \quad \alpha_1 = 0.001, \\ & \alpha_2 = 0.3, \quad \alpha_3 = 0.699. \end{aligned}$$

假定荷载为三角形冲击荷载,其形式为

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} \cdot \frac{t}{t_{\text{ch}}}, & 0 \leq t \leq t_{\text{ch}} \\ p_{\max} \cdot \left(1 - \frac{t - t_{\text{ch}}}{t_+ - t_{\text{ch}}}\right), & t_+ \geq t > t_{\text{ch}} \end{cases}$$

$p(t)$ 的波形及式中的数值大小如图1。

有限元的网格离散如图2,空间步长  $\Delta h = 4.5\text{cm}$ ,时间步长  $\Delta t = 0.05\text{ms}$ ,计算单元数  $N = 100$ ,粘性常数  $a$  的取值在  $0.2 \sim 0.5$  之间波动,计算中随不同的空气含量予以调整,以计算中不出现波形振荡为标准。从我们计算来看,随着空气含量的增加,粘性常数  $a$  应加以适当的放大。

选择断面节点号为50(如图2)处的压力波形及粒子运动速度进行比较,两种方法计算结果分别示于图3及图4。从图3和图4可以看出,两种方法计算结果均符合得较好,这说明本文方法是正确的。

下面来研究不同空气含量的饱和土自由场平面波的传播规律。介质物理参数取值仍

采用上面给出的值。

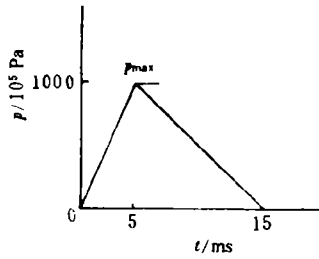


图1 地表荷载

Fig. 1 Loading on the ground surface

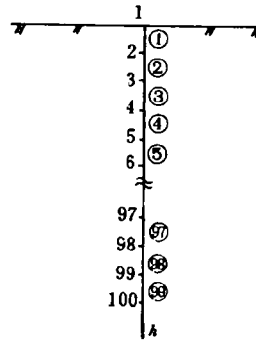


图2 有限元离散网格

Fig. 2 Mesh for finite elements

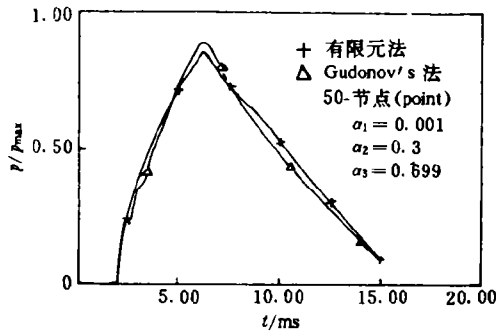


图3 有限元与差分计算压力波形的比较

Fig. 3 Comparison of pressure waveform according to FEM and DEM

+—— FEM, Δ—— Gudonov's method

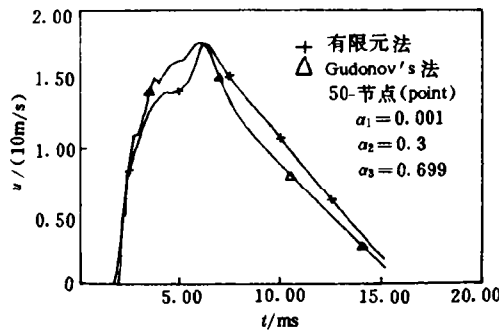


图4 有限元与差分计算介质速度波形的比较

Fig. 4 Comparison of velocity waveform according to FEM and DEM

+—— FEM, Δ—— Gudonov's method

图5及图6分别是  $\alpha_1 = 0.0, \alpha_2 = 0.3, \alpha_3 = 0.7$  不同断面处(节点号为1, 40, 80)的压力波形、粒子运动速度的对比曲线。图7和图8则分别是  $\alpha_1 = 0.001, \alpha_2 = 0.3, \alpha_3 = 0.699$  不同断面处(节点号为1, 40, 80)的压力波形, 粒子运动速度的对比曲线。从图5和图7, 图6和图8可以看出, 饱和土中即使存在少量的空气( $\alpha_1 = 0.001$ ), 也可以导致压力、粒子速度的明显降低。图7和图8与图5和图6的对比分析表明, 随着到爆心距离的增加,  $\alpha_1 = 0.001$  饱和土中的压力、粒子运动速度的减小比  $\alpha_1 = 0.0$  的饱和土中更强烈。

图9是同一截面处(节点号为60)不同空气含量压力波形的比较, 图10是同一截面处(节点为90)不同空气含量压力波形的比较。从图9及图10中可以看出, 爆炸波的断面随着空气含量的不同而大为不同。同一截面的波形不一样, 不同截面的波形也不一样, 近者为有升压时间的波形, 远者接近冲击波。上面的理论计算是符合试验实测规律的<sup>[2]</sup>。

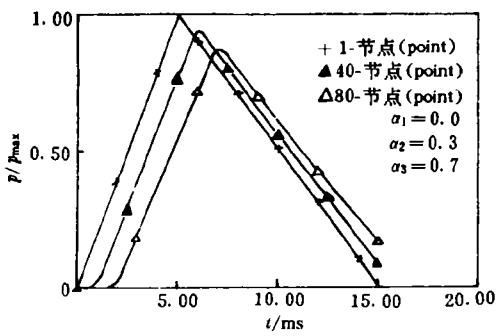


图5 不同节点处压力波形的比较

Fig. 5 Comparison of waveform of pressure at different node numbers

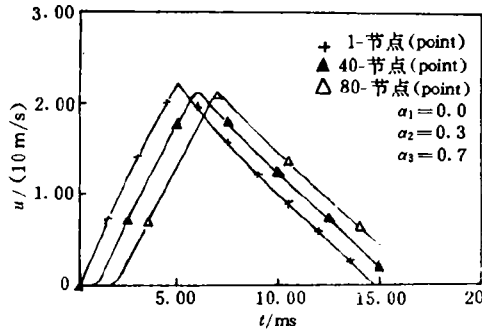


图6 不同节点处速度波形的比较

Fig. 6 Comparison of waveform of velocity at different node numbers

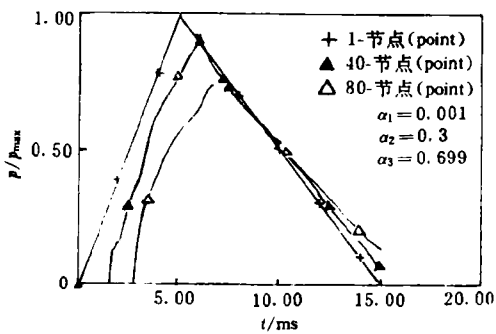


图7 不同节点处压力波形的比较

Fig. 7 Comparison of waveform of pressure at different node numbers

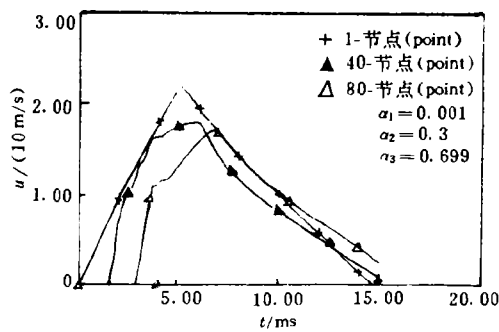


图8 不同节点处速度波形的比较

Fig. 8 Comparison of waveform of velocity at different node numbers

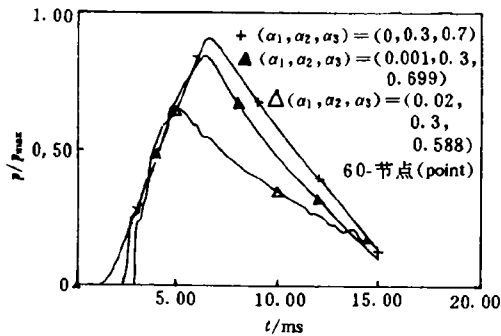


图9 不同空气含量压力波形的比较  
(节点数为60)

Fig. 9 Comparison of pressure waveform with different content of air (node number [N]=60)

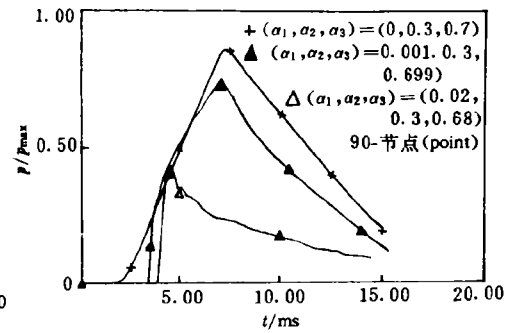


图10 不同空气含量压力波形的比较  
(节点数为90)

Fig. 10 Comparison of pressure waveform with different content of air (node number [N]=90)

## 5 结 论

通过以上建立的理论及分析,可以得出如下结论:

1. 引入人工粘性建立的有限元方法适用于爆炸波作用下饱和土的动力分析。
2. 计算及实测结果表明,a. 在饱和土中,随着到爆心距离的增加,波的衰减强度显著依赖于所含空气的含量;b. 甚至很少的空气含量,也能导致最大压力、粒子运动速度的明显减弱;c. 爆炸波的断面随着空气含量的不同而大为不同,在同一截面、不同截面处波形均不一样,对于具有三角形升压荷载,近者为有升压时间的波形,远者接近冲击波。
3. 计算结果表明本文方法比差分间断分解法有效得多。有关这方面的讨论,另文论述。

计算教研室苏挺英教授为本文提供了差分计算结果,深表谢意。

### 参 考 文 献

- 1 Ляхов Г М. Основы Динамики Взрывных Волн Тунтах и Горных Лородах. москва,Недра, 1974. 17~61
- 2 Qian qihu, Wang Mingyang. FEM in Saturated Soil under Explosive Loading. In:Proc of the 6th Intel Symp on Interaction of Nonuclear Munitions with Structures. Panama City beach F L U S A, 1993. 282~288

## PROPAGATION OF EXPLOSIVE WAVE IN THE FREE-FIELD OF THREE-PHASE SATURATED SOIL

Qian Qihu, Wang Mingyang

(*Nanjing Engineering Institute, P. R. C. Nanjing, 210007*)

**ABSTRACT** Saturated soil is a three-phase media comprised of particles of solid soil, water and a small amount of closed air. In this paper, motion equations for saturated soil under explosive loading are presented. Dynamic finite element equations in which artificial viscosity is introduced are deduced. The stability and convergence properties in the finite element analysis are preliminarily investigated. The law of propagation of explosive wave in the media with a different amount of air is obtained. The comparisons of solutions by FHM and by DEM (Godunov's solutions) are given to verify the effectiveness of the presented method.

**KEY WORDS** three-phase saturated soil, explosive loading, artificial viscosity