

# 轴对称热载作用厚板的热弹性运动效应分析

尹益辉 陈裕泽

(西南结构力学研究所 成都 610003)

**摘要** 对板的上下表面存在一般温度边界条件的情况,解出了板表面受轴对称热辐射作用时,板内轴对称二维瞬态温度场的一般表达式;导出了厚板的热弯曲运动和热平面运动的位移型动力学方程,得出了板的挠度、转角和平面径向位移的无穷积分型公式;提出了一个求解弯曲波传播速度的方法;然后完成了一个代表性算例分析,给出了弯曲波传播规律的直观图象,得出了热加载和热卸载过程中,板内热弯曲波的时空变化特点;找出了剪切变形和旋转惯性对弯曲波传播速度的影响规律;最后,将理论结果与相应的实验结果进行了比较,两者吻合良好。

**关键词** 二维瞬态温度场 热辐射 热弹性弯曲 剪切变形效应和旋转惯性效应

## 1 引言

热辐射作用对板的效应包括热效应和热力效应两方面,热效应引起受辐照区材料性能的变化,如汽化、相变等,热力效应既引起该区局部的热损伤,如烧蚀成坑、裂纹和洞穿等,也引起结构整体的变形运动。由于这一结构整体效应,结构可能存在先于或同步于材料局部破坏的整体响应失效,因而研究结构的整体响应规律、探索结构的整体响应失效机制是非常必要的。该领域课题的研究,在国防和航天技术方面都有着重要意义。

目前,热载作用下结构的整体效应这一研究领域,还有很多工作有待于探索。对于热辐射作用下板的整体响应这一问题,文献[1~6]由浅入深作了一些工作,但基本上局限于研究板厚方向的一维温度场作用下的板在厚度方向的热力响应,对板内温度为二维分布的情况,也只在薄板方向作了初浅的工作。为了更清楚地认识热辐射作用下板的整体响应规律及失效机制,研究了当板的上下表面存在一般温度边界条件时,在同时考虑热能沿板的轴向和径向扩散的情况下,轴对称热辐射作用下厚板的热弹性弯曲运动规律和平面运动规律;通过一个具体的代表性算例,给出了这些运动规律的直观图象,得出了在热加载和热卸载过程中,板中热弯曲波的时间和空间变化特点,并将理论结果与典型实验结果进行比较,取得了良好一致。

- 
- 本项目得到国家自然科学基金和国家高技术计划激光技术领域经费支持。  
1993年4月5日收到原稿,7月5日收到修改稿。

## 2 板内二维温度场分析

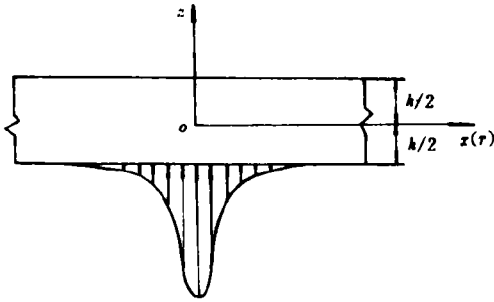


图1 激光 Gauss 分布辐射板表面  
Fig. 1 Gauss distribution on plate surface irradiated by laser

研究辐射热能沉积板中引起的温度场的时间分布,选择如图1所示坐标系。考虑轴对称二维问题,将热能沉积等效为板的内热源,在厚度方向呈指数衰减,其热传导方程为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha_B I(r, t) \times \exp[-\alpha_B(z + h/2)] \quad (1)$$

其中: $\rho$ 为板材密度; $c$ 、 $k$ 分别为比热和热传导系数; $\alpha_B$ 为辐射能体吸收系数; $I$ 为辐射源强度; $T$ 为温度; $z$ 、 $r$ 分别为轴向和径向坐标; $t$ 为时间; $h$ 为板厚。

考虑一般温度边界条件

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial z} + h_0(T - T_0) &= 0, \quad z = h/2 \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} + h_1(T - T_0) &= 0, \quad z = -h/2 \end{aligned} \quad (2)$$

和初始条件

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (3)$$

其中: $h_0$ 、 $h_1$ 为相应边界的 Biot 数。

引入无量纲参量

$$\begin{aligned} \bar{r} = r/h, \quad \bar{z} = z/h, \quad \bar{t} = kt/(\rho ch^2), \quad \bar{T} = (T - T_0)/T_0, \\ \bar{h}_j = h_j h/k (j = 0, 1), \quad \bar{\alpha}_B = \alpha_B h, \quad \bar{I} = Ih/(kT_0) \end{aligned}$$

这样,式(1)、(2)和(3)可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + \bar{\alpha}_B \bar{I}(\bar{r}, \bar{t}) \exp[-\bar{\alpha}_B(\bar{z} + 1/2)] \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} + \bar{h}_0 \bar{T} = 0, \quad \bar{z} = 1/2 \\ -\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} + \bar{h}_1 \bar{T} = 0, \quad \bar{z} = -1/2 \\ \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}, 0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)为温度场  $\bar{T}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})$  的定解问题,将其中的各方程针对变量  $\bar{r}$  作 Hankel 变换,记

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s, \bar{z}, \bar{t}) &= \int_0^\infty \bar{r} \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) J_0(\bar{r}s) d\bar{r} \\ \tilde{I}(s, \bar{z}, \bar{t}) &= \int_0^\infty \bar{r} \bar{I}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) J_0(\bar{r}s) d\bar{r} \end{aligned}$$

其中  $J_0$  为零阶 Bessel 函数。然后用分离变量法求解,得到

$$\tilde{T}(s, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{\alpha}_B \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{N_i} \left( \frac{C_{1i}}{C_{2i}} \sin \beta_i \bar{z} + \cos \beta_i \bar{z} \right) e^{-(s^2 + \beta_i^2) \bar{t}} \cdot \int_0^{\bar{t}} \tilde{I}(s, \bar{t}_1) e^{(s^2 + \beta_i^2) \bar{t}_1} d\bar{t}_1 \quad (5)$$

进行 Hankel 反变换,得

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \int_0^{\infty} s \bar{T}(s, \bar{z}, \bar{t}) J_0(s\bar{r}) ds \quad (6)$$

其中  $\beta_i (i=1, 2, \dots)$  为特征值方程

$$(\bar{h}_0 \bar{h}_1 - \beta^2) \sin \beta + (\bar{h}_0 + \bar{h}_1) \beta \cos \beta = 0$$

的解序列,而

$$\frac{C_{1i}}{C_{2i}} = \frac{\beta_i \sin(\beta_i/2) - \bar{h}_0 \cos(\beta_i/2)}{\beta_i \cos(\beta_i/2) + \bar{h}_0 \sin(\beta_i/2)}, (i=1, 2, \dots)$$

$$N_i = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{C_{1i}}{C_{2i}} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\beta_i} \sin \beta_i \right) + \left( 1 + \frac{1}{\beta_i} \sin \beta_i \right) \right], (i=1, 2, \dots)$$

$$F_i = \frac{1}{\alpha_b^2 + \beta_i^2} \left\{ \frac{C_{1i}}{C_{2i}} \left[ e^{-\alpha_b} \left( -\bar{\alpha}_b \sin \frac{\beta_i}{2} - \beta_i \cos \frac{\beta_i}{2} \right) - \left( \bar{\alpha}_b \sin \frac{\beta_i}{2} - \beta_i \cos \frac{\beta_i}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + e^{-\alpha_b} \left( -\bar{\alpha}_b \cos \frac{\beta_i}{2} + \beta_i \sin \frac{\beta_i}{2} \right) + \left( \bar{\alpha}_b \cos \frac{\beta_i}{2} + \beta_i \sin \frac{\beta_i}{2} \right) \right\}, (i=1, 2, \dots)$$

### 3 厚板热弯曲基本方程

从基本热弹性关系和厚板弯曲理论出发,导出极坐标中圆厚板的轴对称热弯曲基本方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 w - \left( \frac{k_r \rho}{G} + \frac{\rho J}{D} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w + \frac{k_r \rho}{G} \frac{\rho J}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{E \alpha_0}{D(1-\gamma)} \nabla^2 M_r \\ \frac{Gh}{k_r} \left( \beta_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = D \left( \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \beta_r \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial t^2} - \frac{E \alpha_0}{1-\gamma} \frac{\partial M_r}{\partial r} \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $E, G$  分别为弹性模量和剪切模量;  $D, J$  分别为截面抗弯刚度和转动惯量;  $\gamma$  是泊松比;  $\alpha_0$  是热膨胀系数;  $w, \beta_r$  分别是挠度和转角;  $k_r$  是反映剪切变形作用的量。当不考虑剪切变形和旋转惯性,即  $G \rightarrow \infty, \rho J \rightarrow 0$ , 那么式(7)蜕化成薄板的热弯曲基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{E \alpha_0}{1-\gamma} \nabla^2 M_r \quad (8)$$

在式(7)和式(8)中,

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} T_z dz \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

引入无因次参量和算子

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 T_0, \quad \bar{w} = w/h, \\ \bar{M}_r = M_r / (T_0 h^2), \quad \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$$

式(7)用无因次型表示为

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} - \left( \frac{k_r \rho}{G} + \frac{\rho J}{D} \right) \left( \frac{k}{\rho c h^2} \right)^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \bar{\nabla}^2 \bar{w} + \left( \frac{k_r \rho}{G} \frac{\rho J}{D} \right) \cdot \left( \frac{k}{\rho c h^2} \right)^4 h^4 \\ \cdot \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{t}^4} + \frac{\rho h}{D} \left( \frac{k}{\rho c h^2} \right)^2 h^4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = - 12(1+\gamma) \bar{\alpha}_0 \bar{\nabla}^2 \bar{M}_r$$

$$\frac{Gh}{k_r}(\beta_r + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}}) = \frac{D}{h^2}(\frac{\partial^2 \beta_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \beta_r}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \beta_r) - \rho J (\frac{k}{\rho ch^2})^2 \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial \bar{t}^2} \quad (9)$$

对式(9)的第一个方程进行 Laplace 变换和零阶 Hankel 变换,第二个方程进行 Laplace 变换和一阶 Hankel 变换,分别记

$$\begin{aligned} u^*(\bar{r}, \tau) &= \int_0^{\infty} \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) e^{-\tau \bar{t}} d\bar{t} \\ \bar{w}(s, \bar{t}) &= \int_0^{\infty} \bar{r} \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) J_0(\bar{r}s) d\bar{r} \\ \beta_r^*(\bar{r}, \tau) &= \int_0^{\infty} \beta_r(\bar{r}, \bar{t}) e^{-\tau \bar{t}} d\bar{t} \\ \bar{\beta}_r(s, \bar{t}) &= \int_0^{\infty} \bar{r} \beta_r(\bar{r}, \bar{t}) J_1(\bar{r}s) d\bar{r} \end{aligned}$$

并利用初值条件

$$\bar{w}(\bar{r}, 0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{t}^2}(\bar{r}, 0) = \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{t}^3}(\bar{r}, 0) = 0$$

得到

$$\begin{aligned} \bar{w}^*(s, \tau) &= \frac{12(1+\gamma)\bar{\alpha}_0 s^2 \bar{M}_T^*}{A\tau^4 + B\tau^2 + s^4} \\ \bar{\beta}_r(s, \tau) &= \frac{q_1 \bar{w}^* + q_2 \bar{M}_T^*}{\tau^2 + \tau_c^2} s \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= \frac{k_r \rho}{G} \frac{\rho J}{D} (\frac{k}{\rho ch^2})^4 h^4 \\ B &= (\frac{k_r \rho}{G} + \frac{\rho J}{D}) (\frac{k}{\rho ch^2})^2 h^2 s^2 + \frac{\rho h}{D} (\frac{k}{\rho ch^2})^2 h^4 \\ q_1 &= \frac{Gh}{k_r} / [\rho J (\frac{k}{\rho ch^2})^2] \\ q_2 &= \frac{Eh\bar{\alpha}_0}{1-\gamma} / [\rho J (\frac{k}{\rho ch^2})^2] \\ \tau_c^2 &= (\frac{Gh}{k_r} + \frac{D}{h^2} s^2) / [\rho J (\frac{k}{\rho ch^2})^2] \end{aligned}$$

对式(10)依次进行 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换,得到

$$\begin{aligned} \bar{w}(s, \bar{t}) &= 12(1+\gamma)\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0 s^2 / \sqrt{B^2 - 4As^4} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i C_{1i}}{N_i C_{2i}} \frac{1}{\beta_i^2} [2\sin \frac{\beta_i}{2} - \beta_i \cos \frac{\beta_i}{2}] \\ &\cdot \int_0^{\bar{t}} e^{-(\beta_i^2 + s^2)\bar{t}_1} \cdot [\int_0^{\bar{t}_1} \bar{I}(s, \bar{t}_2) e^{(\beta_i^2 + s^2)\bar{t}_2} d\bar{t}_2] \cdot [\frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b (\bar{t} - \bar{t}_1) - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a (\bar{t} - \bar{t}_1)] d\bar{t}_1 \\ \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) &= \int_0^{\infty} s \bar{w}(s, \bar{t}) J_0(s\bar{r}) ds \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{\beta}_r = \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\bar{t}} s (q_1 \bar{w} + q_2 \bar{M}_T) \sin \tau_c (\bar{t} - \bar{t}_1) d\bar{t}_1$$

$$\beta_r(\bar{r}, \bar{t}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau_c} s^2 \int_0^{\bar{t}} (q_1 \bar{w} + q_2 \bar{M}_T) \sin \tau_c (\bar{t} - \bar{t}_1) d\bar{t}_1 J_1(s\bar{r}) ds \quad (12)$$

式中:

$$\tau_a^2 = (B + \sqrt{B^2 - 4As^4})/2A, \quad \tau_b^2 = (B - \sqrt{B^2 - 4As^4})/2A$$

式(11)和(12)分别是热辐射作用下厚板的挠度和截面转角的表达式,它给出了厚板

的弯曲变形状态。

对于波的传播,需要关心的是波的传播速度、波长和频率等问题。式(11)描述的轴对称挠度波形,在任一时刻  $\bar{t}_c$ ,总存在满足  $\bar{w}(\bar{r}, \bar{t}_c) = 0$  的一系列  $\bar{r}_{c_j} (j=1, 2, \dots)$  点,由式(11),在每一个  $(\bar{r}_{c_j}, \bar{t}_c)$  点处波的传播群速为

$$v_{c_j}(\bar{r}_{c_j}, \bar{t}_c) = - \frac{\partial \bar{w} / \partial \bar{t}}{\partial \bar{w} / \partial \bar{r}}(\bar{r}_{c_j}, \bar{t}_c) = \frac{\int_0^\infty s \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}(s, \bar{t}_c) J_0(s \bar{r}_{c_j}) ds}{\int_0^\infty s \bar{w}(s, \bar{t}_c) [-s J_1(s \bar{r}_{c_j})] ds} \quad (13)$$

波的传播情况可用  $\bar{t}_c$  时刻各  $\bar{r}_{c_j}$  和  $v_{c_j} (j=1, 2, \dots)$  的特征加以描述。

#### 4 板内轴向平均热源引起的运动

热能沉积板中经过一定时间之后,就有必要考虑板内轴向平均热源引起的平面变形运动。在轴对称温度场作用下,用径向位移表示的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - (1 + \gamma) \alpha_0 \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (14)$$

这里

$$c_0^2 = E / [\rho(1 - \nu^2)]$$

将位移  $u$  无因次化,令

$$\bar{u} = u/h$$

式(14)的无因次形式写为

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} - (1 + \gamma) \bar{\alpha}_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = \left( \frac{k}{\rho c c_0 h} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} \quad (15)$$

对式(15)进行 Laplace 变换和一阶 Hankel 变换,并利用条件  $\bar{u}(\bar{r}, 0) = \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = 0$ , 得到

$$\bar{u}^* = \frac{(1 + \gamma) \bar{\alpha}_0 \left( \frac{\rho c c_0 h}{k} \right)^2 s \bar{N}_r^*}{\tau^2 + \left( \frac{\rho c c_0 h}{k} s \right)^2} \quad (16)$$

再对(16)式作 Laplace 逆变换和一阶 Hankel 逆变换,得

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = (1 + \gamma) \bar{\alpha}_0 \left( \frac{\rho c c_0 h}{k} \right) \int_0^\infty s J_1(s \bar{r}) \cdot \int_0^{\bar{t}} \bar{N}_r(s, \bar{t}_1) \cdot \sin \left[ \frac{\rho c c_0 h}{k} s (\bar{t} - \bar{t}_1) \right] d\bar{t}_1 ds \quad (17)$$

式中:

$$\bar{N}_r(\bar{r}, \bar{t}) = \int_{-1/2}^{1/2} \bar{T} dz$$

而  $\bar{N}_r(s, \bar{t})$  和  $N_r^*(\bar{r}, \tau)$  分别表示  $\bar{N}_r(\bar{r}, \bar{t})$  的零阶 Hankel 变换和 Laplace 变换。

#### 5 一个代表性算例及其分析

分析代表性算例以便明了求解过程的具体实施,同时检查理论模型的合理性,得出瞬态温度分布规律和热弯曲波传播规律的直观图象。

##### 5.1 空间 Gauss 分布,时间矩形分布辐射热源作用的解

设空间 Gauss 分布,时间矩形分布的辐射热源

$$\bar{I}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{I}_0 e^{-r^2/\bar{r}_0^2} [H(\bar{t}) - H(\bar{t} - \bar{t}_0)]$$

$H$  为 Heavenside 函数,作用在  $z = -h/2$  表面上,则分别由公式(6)、(11)、(13)和(17)得

$$T_s = \frac{\bar{T}}{\alpha_B \bar{I}_0 \bar{r}_0} \times 10^8 = 10^8 \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{N_i} \left( \frac{C_{1i}}{C_{2i}} \sin \beta_i \bar{z} + \cos \beta_i \bar{z} \right) \times \int_0^{\bar{t}^*} \frac{1}{\bar{r}_0^2 + 4(\bar{t} - \bar{t}^*)} \exp\{-[\beta_i^2(\bar{t} - \bar{t}^*) + \bar{r}^2/(\bar{r}_0^2 + 4(\bar{t} - \bar{t}^*))]\} \cdot d\bar{t} \quad (18)$$

$$w_A = \frac{\bar{w}(\bar{r}, \bar{t})}{A_1} = 10^8 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{N_i} \frac{C_{1i}}{C_{2i}} \frac{1}{\beta_i^2} [2 \sin \frac{\beta_i}{2} - \beta_i \cos \frac{\beta_i}{2}] \cdot \left\{ \int_0^{\infty} s \cdot \exp\left(-\frac{s^2 \bar{r}_0^2}{4}\right) \times \frac{s^2}{\left(\frac{\rho c}{k}\right) \sqrt{D/\rho h} \sqrt{B^2 - 4A s^4}} \cdot \left[\frac{1}{\tau_b} \cdot \frac{1}{B_2^2 + \tau_b^2} (B_2 (\cos \tau_b (\bar{t} - \bar{t}^*) - \cos \tau_b \bar{t}) - (\sin \tau_b \bar{t} - \sin \tau_b (\bar{t} - \bar{t}^*))) + \frac{\tau_b}{B_2} [\exp(B_2(\bar{t}^* - \bar{t})) - \exp(-B_2 \bar{t})] - \frac{1}{\tau_a} \frac{1}{B_2^2 + \tau_a^2} [B_2 (\cos \tau_a (\bar{t} - \bar{t}^*) - \cos \tau_a \bar{t})] - [\sin \tau_a \bar{t} - \sin \tau_a (\bar{t} - \bar{t}^*)] + \frac{\tau_a}{B_2} [\exp(B_2(\bar{t}^* - \bar{t})) - \exp(-B_2 \bar{t})] \cdot J_0(\bar{r} s) ds \right\} \quad (19)$$

$$v_{ej}(\bar{r}_{ej}, \bar{t}_e) = -\frac{\partial \bar{w}_A / \partial \bar{t}}{\partial \bar{w}_A / \partial \bar{r}}(\bar{r}_{ej}, \bar{t}_e) \quad (20)$$

$$u_A(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{u}(\bar{r}, \bar{t})/A_1 = 10^8 \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{N_i} \frac{2}{\beta_i} \sin \frac{\beta_i}{2} \frac{1}{\sqrt{12}} \left\{ \int_0^{\infty} s \exp\left(-\frac{s^2 \bar{r}_0^2}{4}\right) \times \frac{1}{B_1^2 + B_2^2} \cdot [B_1 (\exp(B_2(\bar{t}^* - \bar{t})) - \exp(-B_2 \bar{t})) + \frac{B_2}{B_1} (\cos B_1 (\bar{t} - \bar{t}^*) - \cos B_1 \bar{t}) - (\sin B_1 \bar{t} - \sin B_1 (\bar{t} - \bar{t}^*))] \cdot J_1(s \bar{r}) ds \right\} \quad (21)$$

上面各式中,  $\bar{I}_0$  是无因次化的热源最大强度;  $\bar{r}_0$  是无因次化的等效辐射半径;  $\bar{t}_0$  为无因次的辐射持续时间,而

$$B_1 = \frac{\rho c c_0 h}{k} s, \quad B_2 = \beta_i^2 + s^2$$

$$A_1 = 12(1 + \gamma) \bar{\alpha}_0 \left(\frac{\rho c}{k}\right) \sqrt{\frac{D}{\rho h} \frac{\bar{\alpha}_B \bar{I}_0 \bar{r}_0^2}{2}} / 10^8$$

$$\bar{t}^* = \begin{cases} \bar{t}, & \text{当 } \bar{t} \leq \bar{t}_0 \text{ 时} \\ \bar{t}_0, & \text{当 } \bar{t} > \bar{t}_0 \text{ 时} \end{cases}$$

## 5.2 代表性算例结果及讨论

对公式(18)~(21)进行数值积分计算,选取如下具有代表性的材料参数和几何参数

$$\bar{h}_0 = \bar{h}_1 = 0.001, \quad \rho = 2.7, \quad k = 0.38, \quad c = 0.22, \quad E = 7 \times 10^{10},$$

$$\gamma = 0.35, \quad \alpha_B = 10, \quad k_s = 6/5, \quad h = 0.2, \quad \bar{r}_0 = 5.$$

其中各量单位为 SI 制标准单位。

### 5.2.1 板内二维瞬态温度分布

图 2(a)给出了不同时刻  $z = -h/2$  表面温度的径向分布;图 2(b)给出了  $z = -h/2$  表面上光斑中心点、等效半径内一点和等效半径外一点处温度的时间历史规律,其中虚线对应于辐照时间  $\bar{t}_0 = 30$  的情况,带“×”的曲线是文献[7]给出的实验测试结果。文献[7]的实

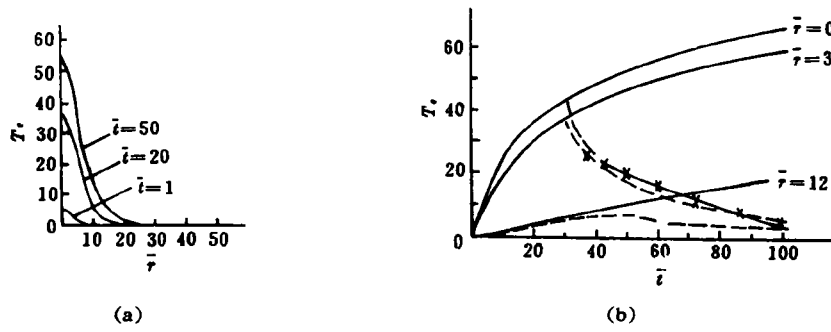


图 2 温度的时空分布

Fig. 2 Distribution of temperature vs. time and space

实验中,激光功率密度为  $2\text{kW}/\text{cm}^2$ ,辐照时间为 3 秒,等效光斑半径与理论计算中的相近,所测的是距光斑中心  $3.2\text{mm}$  处一点的温度。这里是将实验曲线各参量作相应的无因次处理而得出的相应曲线,与理论曲线具有可比较性。从这些曲线图象可直观认识加载过程和卸载后板内温度的径向分布特点及随时间的变化规律。其中的理论结果和实验结果具有相同的变化规律和相近的数值大小,只是卸载后的降温率略有差异,这主要是由于实际的辐照能量吸收系数和板表面的 Biot 系数与理论计算所用的参量值存在一定差异所致。

### 5.2.2 平面径向位移和弯曲挠度的时空分布

图 3 给出了板厚方向均匀温升作用下平板的轴对称径向位移的分布规律,可见随着热辐照的持续,除中心点外的各点都沿着径向向外运动。

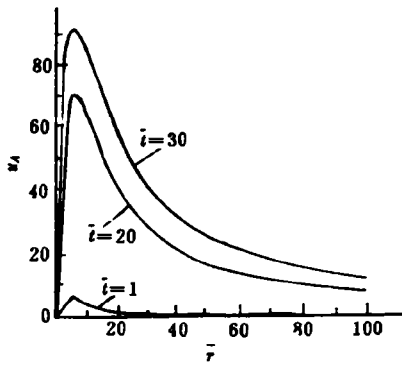


图 3 板的平面径向位移

Fig. 3 Plane radial displacement of the plate

图 4、图 5 描出了板弯曲挠度的时间和空间分布规律。其中(b)图是相应(a)图在零点近区的局部放大。图中实线为连续辐照作用的情况,虚线为辐照时间  $\bar{t}_0=30$  的情况。由局部图象可见,在  $\bar{r} \leq \bar{r}_0$  区,挠度无反向情况,时时为负;在  $\bar{r} > \bar{r}_0$  区,挠度出现反向情况,说明热辐照

能量沉积直接作用在  $\bar{r} \leq \bar{r}_0$  区。从图 4、图 5 可见,弯曲波随着时间增加而不断向外传播。加载过程,各波峰幅值不断增加,整个过程,  $\bar{r}=0$  点处波峰位置不变,幅值最大。图中虚线部分显示,辐射卸载后,板在恢复其变形的过程中,有一近似的中心平台——卸载挠度平台,随着时间增加,平台不断扩大,高度不断降低。在远离受辐照区的各点,卸载后挠度正反向的变化仍然存在,并且可能继续增加而归于挠度平台,然后随平台整体运动,直至板的变形恢复。图 4(a)中带“×”的曲线是文献[7]对有界板受功率密度为  $2\text{kW}/\text{cm}^2$  的激光连续辐照 3 秒而卸载,所测得的板中心  $\bar{r}=0$  点处的挠度时间关系的实验结果。这一实验结果包括了电噪声干扰和冲量效应<sup>[7]</sup>。实验中激光光斑等效半径与理论计算的相近,

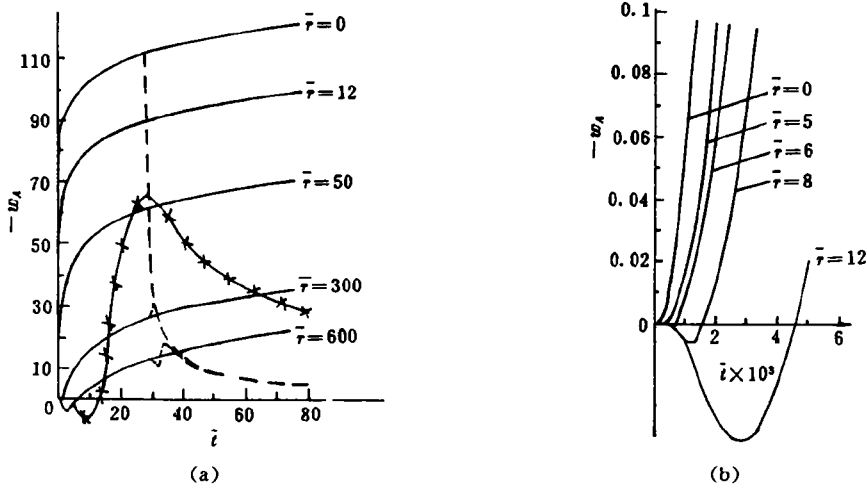


图4 挠度时间关系  
Fig. 4 Deflections vs. time

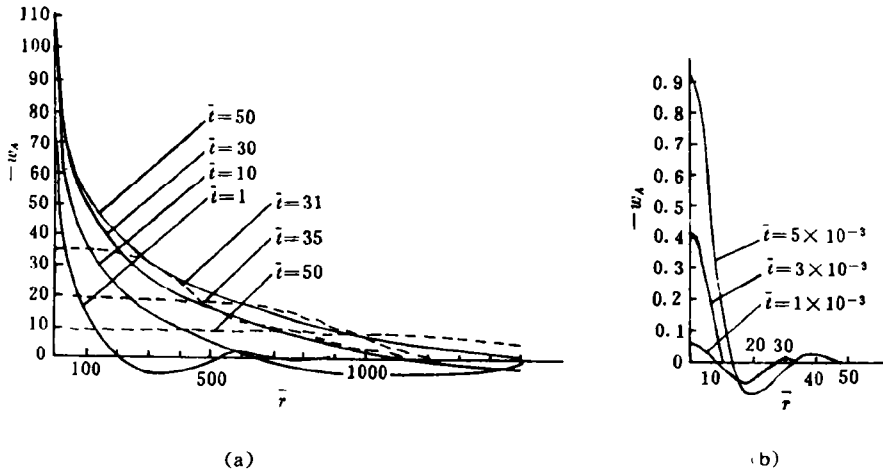


图5 挠度随位置的变化关系  
Fig. 5 Deflections vs. distance relations

但板厚要比理论计算的大,板的半径为12.7cm。在忽略电噪声等影响后,考虑任一时刻无界板上中心点至第一个挠度零点之间板的弯曲变形与有界板热响应弯曲变形的相似特点,可见理论和实验结果具有一致的规律。这里,两者在量值及其时间变化率的量值上没有可比较性。

比较图3和图5(a),可见在无因次时间小于1(约相当于100ms)时,板的平面径向位移峰值远小于板上相应位置的弯曲挠度,因而研究热辐照作用下板的热弹性弯曲波的激发问题可以近似忽略平面热膨胀变形的影响。

5.2.3 轴对称热弯曲波的传播分析



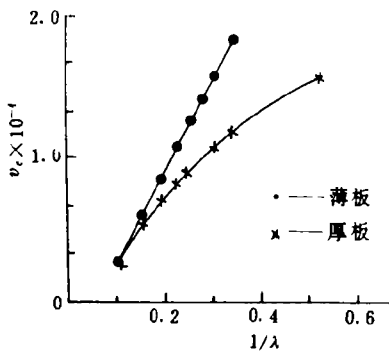


图 6 弯曲波速度比较

Fig. 6 The comparison of bending wave velocity

• Thin plate; × Thick plate

为分析剪切变形和旋转惯性对波传播的影响,取代表性时刻  $\bar{t}_c = 1.0 \times 10^{-3}$  时波的激发状态进行分析。表 1 是针对薄板和厚板在该激发状态时计算所得到的各  $\bar{r}_{c_j}$  和  $v_{c_j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) 的值。图 6 是根据表 1 的数据,分别取  $1/\lambda_j = 1/(r_{c_j+1} - r_{c_j})$  为横坐标和  $v_j = 1/3(2v_{c_j} + v_{c_{j+1}})$  为纵坐标绘制的曲线图型。当然,对  $v_{c_j}$  和  $\bar{r}_{c_j}$ ,也可以作更精确的处理,得到的图型将基本相同。

图 6 直观显示了剪切变形和旋转惯性对板内热弯曲波传播速度的影响,其规律与文献[9]中分析得出的剪切变形和旋转惯性对圆柱杆内弯曲波传播速度的影响的规律相同,这一情况揭示了厚板理论较薄板理论更为合理。

表 1 零挠度质点位置和速度

Table 1 Place and velocity of zero-deflection point

薄板弯曲				厚板弯曲			
$\bar{r}_{c1}$	6.92182	$v_{c1}$	$0.2060 \times 10^4$	$\bar{r}_{c1}$	6.9007	$v_{c1}$	$0.20388 \times 10^4$
$\bar{r}_{c2}$	16.4987	$v_{c2}$	$0.5098 \times 10^4$	$\bar{r}_{c2}$	16.559	$v_{c2}$	$0.46562 \times 10^4$
$\bar{r}_{c3}$	22.8366	$v_{c3}$	$0.7922 \times 10^4$	$\bar{r}_{c3}$	22.931	$v_{c3}$	$0.67814 \times 10^4$
$\bar{r}_{c4}$	27.94	$v_{c4}$	$0.10153 \times 10^5$	$\bar{r}_{c4}$	28.085	$v_{c4}$	$0.7964 \times 10^4$
$\bar{r}_{c5}$	32.31	$v_{c5}$	$0.12041 \times 10^5$	$\bar{r}_{c5}$	32.558	$v_{c5}$	$0.83905 \times 10^4$
$\bar{r}_{c6}$	36.178	$v_{c6}$	$0.13710 \times 10^5$	$\bar{r}_{c6}$	36.48	$v_{c6}$	$0.10 \times 10^5$
$\bar{r}_{c7}$	39.6796	$v_{c7}$	$0.15127 \times 10^5$	$\bar{r}_{c7}$	39.9295	$v_{c7}$	$0.1392 \times 10^5$
$\bar{r}_{c8}$	42.8928	$v_{c8}$	$0.16776 \times 10^5$	$\bar{r}_{c8}$	41.8186	$v_{c8}$	$0.1964 \times 10^5$
$\bar{r}_{c9}$	45.95374	$v_{c9}$	$0.20722 \times 10^5$				

\* 表中各量均为无因次参量。

## 6 结 论

通过上述代表性算例的分析,可以得到如下不乏一般性的结论:

1. 得出了一般温度边界条件下,板内轴对称二维瞬态温度的时间和空间分布规律。
2. 得出了板的平面轴对称径向位移的时间和空间变化规律。
3. 热能沉积板中,热弯曲波沿径向不断向外传播,在直接辐射区,质点有单纯负向运动,在非直接辐射区,质点有正反向运动。辐射卸载后存在中心挠度平台,距中心较远的质

点运动幅度继续增大而到达平台,然后随平台整体运动。对短时( $\mu\text{s}$ 级)辐射持续时间,卸载后板的整体变形继续发展,到毫秒级变形才恢复。

4. 研究板的热弯曲波问题,可以近似忽略板的平面热膨胀变形。
5. 板内剪切变形和旋转惯性对热弯曲波的传播有明显的影响。
6. 温度分布的理论分析结果与实验结果取得良好一致,挠度的理论结果与相近实验结果相吻合。

### 参 考 文 献

- 1 Marland L W. AIAA J., 1968, 6(6): 1063~1066
- 2 Rausch P J. J Appl Mech, 1969, 36(2): 181~188
- 3 袁 钢,周光泉. 激光冲击作用下材料的非 Fourier 热弹性响应. 见: 全国第二届冲击动力学学术会议文集(1). 太原: 1987.
- 4 Sve C, Miklawitz J. J Appl Mech, 1973, 40(1): 161~167
- 5 Paramasivam T, Reismann H. AIAA-85-0391
- 6 Chen Yuze, Yin Yihui. Proceedings of the 2nd International Symposium on Intense Dynamic Loading and Its Effects. Chengdu, 1992, 621~625
- 7 Imbrie P K, Allen D H, Chang H T. AIAA-89-0181
- 8 Nowinski J L. Theory of Thermoelasticity with Applications. Netherlands; Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1978, 407~446
- 9 H. 考尔斯基. 固体中的应力波. 北京: 科学出版社, 1966. 62~67
- 10 曹志远. 板壳振动理论. 北京: 中国铁道出版社, 1989. 198~208

## ANALYSIS OF THERMOELASTIC MOTION IN AXIALLY SYMMETRIC THERMO-LOADED THICK PLATE

Yin Yihui, Chen Yuze

(Southwest Institute of Structural Mechanics, P. O. Box 521-50, Chengdu, 610003, P. R. China)

**ABSTRACT** A general formula of axially symmetric transient temperature field in the plate with axially symmetric thermal deposit and the general boundary conditions of temperature on both surfaces of the plate is presented. The dynamic equations in terms of displacement for thermal bending and plane motion of a thick plate are deduced on the basis of thermoelastic theory and in consideration of the effects of rotary inertia and shearing deformation. The expressions of deflection, rotating angle, and plane radial displacement of the plate are obtained with the help of mathematical transformation. The influence of the effects of rotary inertia and shearing deformation on the propagating velocity of bending waves in the thick plate are shown through the calculated results by one typical case. These results are in good accord with the experimental results.

**KEY WORDS** two dimensionnal transient temperature field, thermal radiation; thermo-elastic bending, effects of rotary inertia and shearing deformation