第14卷 第2期
1994年4月

爆 炸 与 冲 击
EXPLOSION AND SHOCK WAVES

Vol. 14, No. 2
Apr. ,1994

爆轰载荷作用下球形空腔的动力响应

张庆元 战人瑞
(西南石油学院 四川南充 637001)

摘要 以位移为未知量,利用拉普拉斯变换法,研究了球形空腔在爆轰载荷作用下的动力响应问题,获得了问题的参数解,并通过直接代入,验证了解的正确性。

关键词 动力响应 爆轰载荷 球形空腔

1 基本方程和定解条件

如图1所示,在均匀、各向同性、线弹性的无限介质中有一个半径为a_0的球形空腔,腔壁上从初始时刻t等于零开始受到均匀法向压力$p(t)$作用,假定压力不很高,可以忽略受载近区介质的气化、液化和塑性变形的影响。由于结构和载荷是球对称的,故采用球坐标系。此时非零的位移分量只有$u_r=u(r,t)$,而$u_\varphi(r,t)=u_\theta(r,t)=0$,由弹性动力学基本方程[1],可推出其运动微分方程为

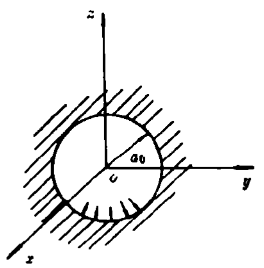

图1
Fig. 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r^2}u=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

其中:$c_0^2=E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)\rho$;$E$为材料的弹性模量;$\nu$为材料的泊松比;$\rho$为材料单位体积的质量。

问题的边界条件为

$$\begin{cases}\sigma_r|_{r=a_0}=\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial u}{\partial r}+2\nu\dfrac{u}{r}\right]_{r=a_0}=-p(t) & \text{(2a)}\\ \sigma_r|_{r\to\infty}=\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial u}{\partial r}+2\nu\dfrac{u}{r}\right]_{r\to\infty}=0 & \text{(2b)}\end{cases}$$

其中,$p(t)$为爆轰内压,且

$$p(t)=\begin{cases}f(t), & 0\leqslant t\leqslant t_1\\ 0, & t>t_1\end{cases}$$

此外,设在受爆轰内压之前,球腔处于静止状态,腔壁内各点的位移和速度为零,则还有初始条件

$$\begin{cases}u|_{t=0}=0 & \text{(3a)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & \text{(3b)}\end{cases}$$

1992年12月12日收到原稿,1993年6月10日收到修改稿。

2 问题的求解

由于边界条件(2)式中包含时间 t 的函数 $f(t)$,在物理平面上不易求解。利用 Laplace 变换法,把问题转换到变换平面上求解。为此,在初始条件(3)式下,对方程(1)、(2)式取关于 t 的 Laplace 变换,得象方程

$$\frac{d^2u^*}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du^*}{dr} - \frac{2}{r^2}u^* = \frac{P^2}{c_0^2}u^* \tag{4}$$

$$\begin{cases} \sigma_r^*|_{r=a_0} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dfrac{du^*}{dr} + 2\nu\dfrac{u^*}{r}\right]_{r=a_0} = -f^* & (5a) \\ \sigma_r^*|_{r\to\infty} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\dfrac{du^*}{dr} + 2\nu\dfrac{u^*}{r}\right]_{r\to\infty} = 0 & (5b) \end{cases}$$

从而,问题转化为在边界条件(5)式下求解象方程(4)的问题。

利用关系式 $s=Pr/c_0$, $u^*(s)=\sqrt{\pi/2s}v^*(s)$,则方程(4)可以转化成

$$\frac{d^2V}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dv^*}{ds} - (1+\frac{9}{4}\frac{1}{s^2})v^* = 0 \tag{6}$$

这是 3/2 阶的变形贝塞尔函数,通解为

$$v^*(s) = AI_{3/2}(s) + BI_{-3/2}(s) \tag{7}$$

根据贝塞尔函数递推公式[3], $s\cdot I_{\gamma-1}(s) - s\cdot I_{\gamma+1}(s) = 2\gamma I_\gamma(s)$,并注意利用 $I_{1/2}(s) = \sqrt{2/\pi s}\cdot \mathrm{sh}s$, $I_{-1/2}(s) = \sqrt{2/\pi s}\mathrm{ch}s$,最后得问题的通解为

$$u^*(s,P) = (\frac{B}{s} - \frac{A}{s^2})\mathrm{sh}s + (\frac{A}{s} - \frac{B}{s^2})\mathrm{ch}s \tag{8}$$

式中:A、B 是积分常数;P 为拉普拉斯变换引入的复数;s 为中间变量。

为确定积分常数 A、B,把边界条件(5)式改写成为

$$\begin{cases} \sigma_r^*|_{s=s_0} = \dfrac{E\cdot P}{(1+\nu)(1-2\nu)\cdot c_0}\left[(1-\nu)\dfrac{du^*}{ds} + 2\nu\dfrac{u^*}{s}\right]_{s=s_0} = -f^* & (9a) \\ \sigma_r^*|_{s\to\infty} = \dfrac{E\cdot P}{(1+\nu)(1-2\nu)\cdot c_0}\left[(1-\nu)\dfrac{du^*}{ds} + 2\nu\dfrac{u^*}{s}\right]_{s\to\infty} = 0 & (9b) \end{cases}$$

把通解代入(9)式的第二个方程,可得

$$B = -A \tag{10}$$

从而,通解(8)式就成为

$$u^*(s,P) = A(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2})e^{-s} \tag{11}$$

再把(11)式代入边界条件(9)式的第一个方程,得

$$A = f^*(1+\nu)(1-2\nu)c_0e^{s_0}/EP(\frac{1-\nu}{s_0} + \frac{2-4\nu}{s_0^2} + \frac{2-4\nu}{s_0^3}) \tag{12}$$

最后得到

$$u^* = f^*(1+\nu)(1-2\nu)c_0(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2})e^{-(s-s_0)}\Big/E\cdot P(\frac{1-\nu}{s_0} + \frac{2-4\nu}{s_0^2} + \frac{2-4\nu}{s_0^3}) \tag{13}$$

由应力和位移间的关系，还可得到

$$\begin{cases} \sigma_r^* = -f^*\left(\dfrac{1-\nu}{s}+\dfrac{2-4\nu}{s^2}+\dfrac{2-4\nu}{s^3}\right)e^{-(s-s_0)}\Big/\left(\dfrac{1-\nu}{s_0}\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{2-4\nu}{s_0^{\ 2}}+\dfrac{2-4\nu}{s_0^{\ 3}}\right) & (14a) \\ \sigma_T^* = f^*\left(-\dfrac{\nu}{s}+\dfrac{1-2\nu}{s^2}+\dfrac{1-2\nu}{s^3}\right)e^{-(s-s_0)}\Big/\left(\dfrac{1-\nu}{s_0}\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{2-4\nu}{s_0^2}+\dfrac{2-4\nu}{s_0^3}\right) & (14b) \end{cases}$$

对(13)(14)式进行反演积分，便得到原来问题的位移 $u(r,t)$ 和应力 $\sigma_r(r,t)$，$\sigma_T(r,t)$。式中的 $e^{-(s-s_0)}$ 反映了波的到达时间。

至此，当 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 时的位移和应力已经确定。当 $t>t_1$ 时，$p(t)=0$，球腔的运动属于以 $t=t_1$ 时刻的位移和速度分布为初始条件的波动。对于爆轰产生的等值和衰减内压我们可以把该问题化成两个问题的叠加。其中一个是腔壁上从初始时刻 $t=0$ 开始受到均匀法向压力 $f(t)$，并一直作用而不卸载，其响应 u_0^*、σ_{r0}^*、σ_{T0}^* 分别与(13)和(14)式相同；另一个是腔壁上从 $t=t_1$ 时刻开始受到均匀法向压力 $f_1(t)$，并始终保持与 $f(t)$ 大小相等，而方向相反。用确定(13)(14)式完全相同的方法，可以得到后一问题的动力响应为

$$u_1^* = f_1^*(1+\nu)(1-2\nu)c_0\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)e^{-(s-s_0)}\Big/E\cdot P\left(\frac{1-\nu}{s_0}+\frac{2-4\nu}{s_0^2}+\frac{2-4\nu}{s_0^3}\right) \qquad (15)$$

$$\begin{cases} \sigma_{r1}^* = -f_1^*\left(\dfrac{1-\nu}{s}+\dfrac{2-4\nu}{s^2}+\dfrac{2-4\nu}{s^3}\right)e^{-(s-s_0)}\Big/\left(\dfrac{1-\nu}{s_0}\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{2-4\nu}{s_0^2}+\dfrac{2-4\nu}{s_0^3}\right) & (16a) \\ \sigma_{T1}^* = f_1^*\left(\dfrac{-\nu}{s}+\dfrac{1-2\nu}{s^2}+\dfrac{1-2\nu}{s^3}\right)e^{-(s-s_0)}\Big/\left(\dfrac{1-\nu}{s_0}\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{2-4\nu}{s_0^2}+\dfrac{2-4\nu}{s_0^3}\right) & (16b) \end{cases}$$

把 u_0^*、σ_{r0}^*、σ_{T0}^* 和 u_1^*、σ_{r1}^*、σ_{T1}^* 分别相加，并完成反演积分，便得到原来问题在 $t>t_1$ 时的位移 $u(r,t)$ 和应力 $\sigma_r(r,t)$、$\sigma_T(r,t)$。

3 爆轰载荷作用下的动力响应

在工程爆破，地下核试验中，爆轰所产生的冲击载荷，常可表示成 be^{-at} 的形式，当 a 为大于零的实数时，该表达式反映了空腔中的一次爆轰，为了获得这种载荷下的动力响应，可把 $f((t)=be^{-at}$ 的象函数 $b/(P+a)$ 代入(13)(14)两式中，并分别表示成部分分式的形式，逐项完成反演积分，经整理后，得到 τ 大于零时的位移场和应力场为

$$u(r,t)=\frac{(1+\nu)a_0^3}{Er^2}\cdot\frac{b}{c}\left\{\frac{c_0^2}{a_0^2}c_1\left(\frac{r}{c_0}-\frac{1}{a}\right)e^{-a\tau}-\left[\frac{c_0^2}{a_0^2}\cdot c_1\left(\frac{r}{c_0}-\frac{1}{a}\right)\cos(a\tau/\sqrt{1-2\nu})\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{1-2\nu}\cdot\frac{c_0}{a_0}\left(\frac{c_0}{a_0}\cdot\frac{c_1}{a}-\frac{2c_1}{a_0^2}\cdot\frac{c_0}{a}r-1+c_1\frac{r}{a_0}\right)\sin\frac{a\tau}{\sqrt{1-2\nu}}\right]e^{-a\tau}\right\} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(r,t) = &-\frac{a_0^3}{r^3}\cdot\frac{b}{c}\Big\{(2c_1\frac{c_0}{r}-a-2c_1\frac{c_0^2}{ar^2})\cdot\frac{r^2}{a_0^2}e^{-\alpha\tau}+[2c_1(\frac{c_0}{a_0}-\frac{c_0}{r}\\&-\frac{c_0^2}{a_0^2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{c_0^2}{r^2}\cdot\frac{1}{a})\cdot\frac{r^2}{a_0^2}\cos(\alpha\tau/\sqrt{1-2\nu}+2\sqrt{1-2\nu}c_0(\frac{1}{a_0}\\&-\frac{a_0}{r^2}+\frac{c_0c_1}{r^2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{c_1}{r}-\frac{c_1}{a_0}+\frac{c_0c_1}{a_0^2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{2c_0c_1}{a_0r}\cdot\frac{1}{a})\\&\cdot\sin(\alpha\tau/\sqrt{1-2\nu})]e^{-\alpha\tau}\Big\}\end{aligned} \tag{18a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_T(r,t) = &-\frac{a_0^3}{r^3}\cdot\frac{b}{c}\Big\{(\frac{c_0}{r}+\frac{a}{c_2}-\frac{c_0^2}{r^2}\cdot\frac{1}{a})c_1\cdot\frac{r^2}{a_0^2}e^{-\alpha\tau}-[(\frac{2c_1}{c_2}\cdot\frac{c_0}{a_0}+\frac{c_0}{r}\\&-\frac{2c_1}{c_2}\frac{c_0^2}{a_0^2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{c_0^2}{r^2}\cdot\frac{1}{a})c_1\cdot\frac{r^2}{a_0^2}\cos(\alpha\tau/\sqrt{1-2\nu})+\sqrt{1-2\nu}c_0(-\frac{c_0}{r^2}\\&\cdot\frac{1}{a}+\frac{2}{c_2a_0}+\frac{a_0}{c_1r^2}+\frac{2c_0}{a_0r}\cdot\frac{1}{a}-\frac{2}{a_0}\frac{c_1}{c_2}-\frac{1}{r}+\frac{2c_1}{c_2}\cdot\frac{c_0}{a_0^2}\cdot\frac{1}{a})c_1\cdot\frac{r^2}{a_1^2}\\&\cdot\sin(\alpha\tau/\sqrt{1-2\nu})]\cdot e^{-\alpha\tau}\Big\}\end{aligned} \tag{18b}$$

式中:$\alpha=(1-2\nu)\cdot c_0/(1-\nu)a_0$;$\tau=t-(r-a_0)/c_0$;$c_1=(1-2\nu)/(1-\nu)$;$c_2=(1-2\nu)/\nu$;$c=2(1-2\nu)/(1-\nu)\frac{c_0}{a_0}-a-2\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{c_0^2}{a_0^2}\frac{1}{a}$。

式(17)(18)就是 $t>0$ 时原问题的位移场和应力场。把此两式代入方程(1)(2)(3),即可证明解是正确的。

当 a 取复数时,还可得到谐波载荷作用下的动力响应。

4 结　论

利用本文的研究结果,只要给定载荷参数,就可得到相应的动力响应 $u(r,t)$,$\sigma_r(r,t)$ 和 $\sigma_T(r,t)$。

参　考　文　献

1　杨桂通,张善元. 弹性动力学. 北京:中国铁道出版社,1988. 196～199

2　A. C. 艾龙根,E. S. 舒胡毕. 弹性动力学. 北京:石油工业出版社,1984. 154～170

3　《数学手册》编写组. 数学手册. 北京:人民教育出版社,1979. 555～565;627～640

THE DYNAMIC RESPONSE OF SPHERICAL HOLLOW CHAMBER UNDER EXPLOSIVE LOADING

Zhang Qingyuan, Zhan Renrui

(*Southwest Petroleum Institute*, *Nanchong*, 637001)

ABSTRACT　In this paper the dynamic response of a spherical hollow chamber under explosive loading is studied by Laplace transform method. The parameter solution of the problem is obtained, and the validity of the solution is verified by inserting in directly.

KEY WORDS　dynamic response, explosive load, spherical hollow chamber