

拉格朗日反分析方法误差分析*

柴华友 唐志平**

(中国科学院武汉岩土力学所 武汉 430071)

(* * 中国科学技术大学近代力学系 合肥 230026)

摘要 系统地讨论了路径线法及曲面拟合法误差发展。反分析计算误差可分成截断误差及增殖误差两部分,截断误差及增殖误差受测量量计数目及量计间距影响,增加量计数,减小量计间距可以减小截断误差,但不利于控制增殖误差。反分析计算误差发展可分为三个过程:开始,计算误差主要来源于截断误差;其后,误差受截断误差和增殖误差共同影响;最后,增殖误差是主要的。无论是曲面拟合法还是路径线法,各量计线上增殖误差可用时间多项式函数来表示,且多项式最高幂次数与量计线数目有关。

关键词 截断误差 增殖误差 计算误差 曲面拟合 微区域 路径线 量计线

1 引言

拉氏反分析主要有路径线法和曲面拟合法,随着研究的深入,发现反分析结果往往不可靠^[1,2],Gupta 等人^[3]提出的自洽性检验方法对结果的检验也难以奏效。一些学者已注意到拉氏反分析应与应力波研究相结合,不能仅停留在数值方法上,应力波内在规律的研究和信息挖掘有益于拉氏反分析理论的发展,如 Cowperthwaite^[4]、Aidun^[5]、Sano^[6,7,8]等,Forest^[9,10]另辟蹊径提出冲量时间积分函数法,不过以上方法仍存在一些不足^[11]。反分析误差发展有一定的规律,因此,讨论误差发展趋势,对筛选计算结果,寻求新的检验方法,修正计算结果有一定的帮助。文献^[1]虽对误差发展趋势进行了一定的讨论,但比较肤浅。我们将计算误差分成截断误差及增殖误差两部分,可以较好地分析反分析计算误差。

2 曲面拟合法误差分析

曲面拟合法主要是在由几条量计线和路径线构成的微区域上用二元多项式构造应力插值函数,然后对区域上网格点值进行插值,当区域上第一条路径线应力值已知,就可由运动方程得到该区域内其它未知点应力值。由文献^[1]可知当第一条路径线上应力值是精确的,则反分析得到该区域其它未知点应力值精度也很高。事实上应力插值函数曲面不可能完全逼近真实曲面,由此导致计算点误差就是曲面截断误差,简称截断误差,区域网格越小则截断误差越小。另一方面由于流场被分成很多微区域,后一个微区域计算需利用前

* 本工作得到了中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波与爆炸物理重点实验室资助。

1994年1月3日收到原稿,1994年5月26日收到修改稿。

一个微区域最后一条路径线计算值,该计算值误差必将导致后一个微区域其它点计算误差,该误差随着计算微区域数增加以某种形式发展,为了与截断误差区别,这里称之为增殖误差。图 1 以曲线为例说明了截断误差和增殖误差的区别,图中 1、2、3 点值为精确值,2'、3' 点值是利用 1 点值计算的,2''、3'' 点值是利用点 1 的误差点 1' 值计算的。曲面拟合法反分析每步计算误差都包含截断误差和增殖误差,由于增殖误差发展较快,当计算到某个区域时,增殖误差远大于截断误差,截断误差可忽略。假设应力插值函数为 $\sigma_f(x, t)$, 真实应力函数为 $\sigma(x, t)$, 第 M 个区域增殖误差为 $\sigma_e^M(x, t)$, 这样,由示意图 1 可知 $\sigma_f(x, t) \approx \sigma(x, t) + \sigma_e^M(x, t)$, 在反分析中,每步计算都需利用运动方程 $(\partial \sigma_f / \partial x)_i = -\rho_0 (\partial u / \partial t)_z$, 这里 ρ_0 为材料初始密度,应力以压为正, u 为质点速度,由于量计可测得相应位置的速度变化,故这里可不考虑 $(\partial u / \partial t)_z$ 的误差,因为真实应力场和速度场也遵守运动方程: $(\partial \sigma / \partial x)_i = -\rho_0 \cdot (\partial u / \partial t)_z$, 考虑到计算过程有 $(\partial \sigma_f /$

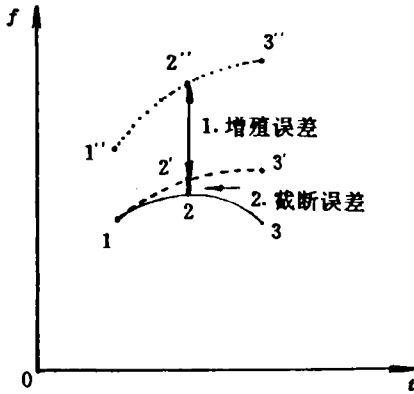


图 1 反分析中截断误差和增殖误差示意图

Fig. 1 Scheme of truncation error and propagation error of inverse analysis

1. Propagation error; 2. Truncation error

这样,增殖误差满足: $\partial \sigma_e^M / \partial x |_{t=0} = 0$, 即

$$\sigma_e^M = F^M(t) + C^M \quad (t_{1,M} < t < t_{J,M}, J = m \times n, m \text{ 为量计数}, n \text{ 为区域 } M \text{ 的路径线数}) \quad (1)$$

式中: C^M 为区域 M 内积分常数, $t_{1,M}, \dots, t_{J,M}$ 为该区域各节点对应的时间,同理可类推区域 $M+1$ 的增殖误差:

$$\sigma_e^{M+1} = F^{M+1}(t) + C^{M+1} \quad (t_{1,M+1} < t < t_{J,M+1})$$

由于区域 M 第 n 条路径线就是区域 $M+1$ 第 1 条路径线(可参见文献[1]图例), 这样, $F^M(t_{i,M}) + C^M = F^{M+1}(t_{j,M+1}) + C^{M+1} \quad (i = (n-1) \times m + 1, \dots, m \times n \quad j = 1, \dots, m)$ 。当插值函数为多项式函数时,文献[1]的应力插值函数可推广为:

$$\sigma_i^M - \left(\sum_{k=1}^m a_k x_{i,M}^k \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j T_{i,M}^{j-1} \right) = \sum_{k=1}^m \beta_{k,M} T_{i,M}^{k-1} \quad (i = 1, \dots, m) \quad T = \phi t, \phi \text{ 是比例因子} \quad (2)$$

这里 $x_{i,M}, T_{i,M}$ 表示区域 M 第一条路径线上第 i 个网格点坐标, σ_i^M 为相应点应力值, $a_k, b_j (k = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n)$ 是已知的,它是由量计实测速度确定的,只有 $\beta_{k,M}$ 与 σ_i^M 有关,当 σ_i^M 有误差 $\delta_{i,M}$ 时, $\beta_{k,M}$ 就会有相应误差 $\Delta \beta_{k,M}$:

$$\Delta \beta_M = H_M^{-1} \delta_M \quad (3)$$

式中

$$\Delta \beta_M = \begin{bmatrix} \Delta \beta_{1,M} \\ \Delta \beta_{2,M} \\ \vdots \\ \Delta \beta_{m,M} \end{bmatrix} \quad \delta_M = \begin{bmatrix} \delta_{1,M} \\ \delta_{2,M} \\ \vdots \\ \delta_{m,M} \end{bmatrix}, H_M^{-1} \text{ 的元素 } H_{ij} = T_{i,M}^{j-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

这样第一条路径线节点 1, 2, \dots, m 应力误差会导致该区域第 j 条路径线上节点应力误差:

$$\Delta_j = G_j \Delta \beta_M \quad (4)$$

式中

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} \Delta_{j_0+1,M} \\ \Delta_{j_0+2,M} \\ \vdots \\ \Delta_{j_0+m,M} \end{bmatrix}, G_j \text{ 的元素 } G_{ik} = T_{j_0+1,M}^{k-1} (j_0 = (j-1) \times m, j = 2, 3, \dots, n, i, k = 1, 2, \dots, m)$$

由于区域 $M+1$ 第一条路径线就是区域 M 第 n 条路径线, 因此, $T_{i,M+1} = T_{j,M}, \delta_{i,M+1} = \delta_{j,M} (i = (n-1) \times m + 1, \dots, m \times n, j = 1, 2, \dots, m)$, 这样, $\Delta \beta_{M+1} = H_{M+1}^{-1} \delta_{M+1} = H_{M+1}^{-1} \cdot \Delta$, 结合式(3)、(4)可得:

$$\Delta \beta_{M+1} = H_{M+1}^{-1} \cdot G_n \cdot \Delta \beta_M = H_{M+1}^{-1} \cdot H_{M+1} \cdot \Delta \beta_M = \Delta \beta_M$$

可以类推 $\Delta \beta_{M+k} = \Delta \beta_M (k = 1, 2, \dots, N - M, N \text{ 是区域总数}) \quad (5)$

这样式(4)增殖误差的发展规律可推广为:

$$\Delta_{i,j} = \sum_{k=1}^m r_k \cdot T_{i,j}^{k-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m \times n \quad j = M, M+1, \dots, N) \quad (6)$$

式(6)是式(1)一个特例。 $\Delta_{i,j}$ 表示区域 j 第 i 个节点增殖误差, $r_k = \Delta \beta_{k,M}, r_k$ 一般与量计间距有关。对由三条量计线和三条路径线构筑的微区域, 当 $T_{2,M} = T_{1,M} + T, T_{3,M} = T_{1,M} + 2T (T$ 是第一条路径线节点时间间距), 由式(3)可得:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2T^2} \begin{bmatrix} T_{1,M}^2 + 3TT_{1,M} + 2T^2 & -(2T_{1,M}^2 + 4TT_{1,M}) & T_{1,M}^2 + TT_{1,M} \\ -(2T_{1,M} + 3T) & 4(T_{1,M} + T) & -(2T_{1,M} + T) \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1,M} \\ \delta_{2,M} \\ \delta_{3,M} \end{bmatrix} \quad (7)$$

可以看出, T 增大, 矩阵元素变小, 这样, 式(6)增殖误差发展速度相应放慢。当量计间距增大, 按同样方式构造的路径线上节点时间间隔增大, 因此, 增大量计间距可控制增殖误差的发展。另一方面, 由文献[1]表 1~4 可知此时截断误差增大, 两者相互矛盾, 当计算时间超过某个值, 式(6)增殖误差绝对值是时间单调递增函数。至于整个流场的曲面拟合法^[5], 不存在区域之间计算结果影响, 也即不存在增殖误差, 计算误差仅与曲面拟合函数形式有关, 主要来源于截断误差, 该问题不属于本文讨论范围。

3 路径线法误差分析

和曲面拟合法一样, 路径线法也是反分析中一个重要手段, 由文献[2]可知路径线法中心差值差分格式为:

$$u_{j+1,k} - u_{j,k} = -\frac{1}{2\rho_0} \left[\left(\frac{d\delta_{j+1,k}}{dx} + \frac{d\sigma_{j,k}}{dx} \right) (t_{j+1,k} - t_{j,k}) - (\sigma_{j+1,k} - \sigma_{j,k}) \left(\frac{dt_{j+1,k}}{dx} + \frac{dt_{j,k}}{dx} \right) \right] \\ (j=1, 2, \dots, N \quad k=1, 2, \dots, m \text{ 这里 } N \text{ 表示路径线总数, } m \text{ 表示量计数}) \quad (8)$$

当沿路径线应力按多项式插值, 式(8)可简写为:

$$A \sigma_{j+1} = B \sigma_j + C \quad (9)$$

矩阵 A, B, C 元素分别为(见文献[2]):

$$\begin{cases} A_k = \xi_k(t_{j+1,k} - t_{j,k}) - \delta_k \left(\frac{dt_{j,k}}{dx} + \frac{dt_{j+1,k}}{dx} \right) \\ B_k = \xi_k(t_{j,k} - t_{j+1,k}) - \delta_k \left(\frac{dt_{j,k}}{dx} + \frac{dt_{j+1,k}}{dx} \right) \\ C_k = 2\rho_0(u_{j,k} - u_{j+1,k}) \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

式中

$$\delta_k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k, \end{cases} \quad \xi_k \text{ 是插值导数矩阵元素。向量}$$

$$\sigma_{j+1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{j+1,1} \\ \sigma_{j+1,2} \\ \vdots \\ \sigma_{j+1,m} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_j = \begin{Bmatrix} \sigma_{j,1} \\ \sigma_{j,2} \\ \vdots \\ \sigma_{j,m} \end{Bmatrix} \quad \text{假设计算到路径线 } M \text{ 时增殖误差远大于}$$

截断误差,由式(9)可以从路径线 M , 应力误差 \underline{A}_M 计算出路径线 $M+1$ 的应力误差 \underline{A}_{M+1} :

$$\underline{A}_{M+1} = A^{-1} B \underline{A}_M \quad (11)$$

假设等时距构筑路径线,即 $t_{j+1,k} - t_{j,k} = \omega$, ω 为常数,考虑到路径线间距 ω 较小,可以近似取, $d\sigma_i/dx \approx d\sigma_{j+1}/dx, dt_j/dx \approx dt_{j+1}/dx$,在这种条件下,式(8)可改写为:

$$u_{j+1,k} - u_{i,k} = - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{d\sigma_{j,k}}{dx} (t_{j+1,k} - t_{j,k}) - (\sigma_{j+1,k} - \sigma_{j,k}) \frac{dt_{j,k}}{dx} \right] \quad (11a)$$

这样式(9)矩阵大大地简化,进而将式(11)分解为:

$$\underline{A}_{M+1} = \underline{A}_M + \underline{D} \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{A}_M \quad (12)$$

矩阵 \underline{D} 是对角矩阵: $D_{ij} = \begin{cases} \omega \cdot dx/dt_{M,j} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$, $dx/dt_{M,j}$ 表示路径线 M

第 j 点相速,各点值一般不等。路径线并不是各量计上实测波形任意点组合而成,它的构造要能表征波传播特性^[12],考虑到材料物理性质,路径线上各点相速一般相差不大,如在各量计冲击波波阵面上构造路径线,路径线上各点相速近似等于冲击波阵面传播速度,这里近似认为 $dx/dt_{M,1} = dx/dt_{M,2} = \dots = dx/dt_{M,m} \quad dx/dt_{M,m} = v_0$,这样式(12)简化为:

$$\underline{A}_{M+1} = \underline{A}_M + \omega \cdot v_0 \cdot \underline{\xi} \underline{A}_M = (\underline{I} + \omega v_0 \underline{\xi}) \underline{A}_M \quad (13)$$

\underline{I} 是单位矩阵,由式(13)及 $dt_j/dx \approx dt_{j+1}/dx$ 可类推

$$\underline{A}_J = (\underline{I} + \omega v_0 \underline{\xi})^{J-M} \underline{A}_M \quad (J = M + 1, M + 2, \dots, N) \quad (14)$$

该式展开:

$$\underline{A}_J = [\underline{I}^{J-M} + C_{J-M}^1 \underline{I}^{J-M-1} \omega v_0 \cdot \underline{\xi} + \dots + C_{J-M}^K \underline{I}^{J-M-K} (\omega v_0)^K \underline{\xi}^K + \dots + C_{J-M}^{J-M} \underline{I} (\omega v_0)^{J-M-1} \underline{\xi}^{J-M-1} + \underline{\xi}^{J-M} (\omega v_0)^{J-M}] \cdot \underline{A}_M \quad (15)$$

式中 $C_{J-M}^K = (J-M)(J-M-1)\dots(J-M-K+1)/K!$

无论量计如何布置,可以证明矩阵 $\underline{\xi}$ 各行与行元素相等, $\underline{\xi}_{i \times i} = \underline{0}$ (证明见附录),不失一般性。以下分析取量计等间距 h 分布,在三条量计情况下

$$\underline{\xi}_{3 \times 3} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\xi}_{3 \times 3}^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\xi}_{3 \times 3}^3 = \underline{0}$$

由式(15)可得:

$$\Delta_J = [L + (J - M)\omega v_0 \xi + \frac{(J - M)(J - M + 1)}{2}(\omega v_0)^2 \xi^2] \Delta_M \quad (16)$$

为了方便取 $L = J - M$, $v = \omega v_0 / 2h$, 由于路径线等时距, $L = (t_{J,i} - t_{M,i}) / \omega$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 这样上式可展开为:

$$\begin{aligned} \Delta_{J,1} = & a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{J,1}^2 + (-2a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{M,1} + b_{01} \frac{v}{\omega} - a_{01} \frac{v^2}{\omega}) t_{J,1} \\ & + a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{M,1}^2 - b_{01} \frac{v}{\omega} t_{M,1} + a_{01} \frac{v^2}{\omega} t_{M,1} + \Delta_{M,1} \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{J,2} = & a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{J,2}^2 + [-2a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{M,2} + (b_{01} + a_{01}) \frac{v}{\omega} - a_{01} \frac{v^2}{\omega}] t_{J,2} \\ & + a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{M,2}^2 - (b_{01} + a_{01}) \frac{v}{\omega} t_{M,2} + a_{01} \frac{v^2}{\omega} t_{M,2} + \Delta_{M,2} \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{J,3} = & a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{J,3}^2 + [-2a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{M,3} + (b_{01} + 2a_{01}) \frac{v}{\omega} - a_{01} \frac{v^2}{\omega}] t_{J,3} \\ & + a_{01} \frac{v^2}{\omega^2} t_{M,3}^2 - (b_{01} + 2a_{01}) \frac{v}{\omega} t_{M,3} + a_{01} \frac{v^2}{\omega} t_{M,3} + \Delta_{M,3} \end{aligned} \quad (17c)$$

式中 $a_{01} = 2\Delta_{M,1} - 4\Delta_{M,2} + 2\Delta_{M,3}$, $b_{01} = -3\Delta_{M,1} + 4\Delta_{M,2} - \Delta_{M,3}$ 。由于路径线 M 上某点相速乘以该点与相邻点(路径线 M)时间间隔就是两点所处的量计间距, 即 $v_0(t_{M,2} - t_{M,1}) \approx v_0 \cdot (t_{M,3} - t_{M,2}) \approx h$, 这样, $-2a_{01}v^2t_{M,2}/\omega^2 + a_{01}v/\omega = -2a_{01}v^2t_{M,1}/\omega^2$, $-2a_{01}v^2t_{M,3}/\omega^2 + 2a_{01}v/\omega = -2a_{01}v^2t_{M,1}/\omega^2$, 因此, 式(17a)的时间变量一次及二次项系数与式(17b)、(17c)的一次项及二次项系数相等, 只有常数项有所不同, 随着时间增加, 一次项及二次项起主要作用, 式(17a)、(17b)、(17c)可近似用统一式来表式:

$$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \quad (t > t_{M,1}) \quad (18)$$

同理可以证明 m 条量计线等时距构筑路径线的计算增殖误差满足:

$$\Delta(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_m t^{m-1} \quad (t > t_{M,1}) \quad (19)$$

随着计算时间增加, 增殖误差绝对值单调递增, 当等时(不是等时距)构筑路径时, 由式(10)可知 $A_n = -B_n$, 这样由式(11)求得 $\Delta_{M+1} = -\Delta_M$, 类推, $\Delta_J = (-1)^{J-M} \Delta_M$, 因此, 在等时构筑路径线计算中, 增殖误差是振荡的, 绝对值大小相等, 但相邻路径线增殖误差符号相反。

4 量计的数量及间距对截断误差、增殖误差的影响

在第二节中, 讨论了在曲面拟合中量计的数量及间距对截断误差、增殖误差的影响, 这一节主要讨论在路径线法计算中量计的数量及间距对截断误差、增殖误差的影响。

由式(11a)可知, 在不考虑增殖误差的情况下, $\sigma_{j+1,i}$ 的误差主要来自插值导数 $d\sigma_{j,i}/dx$ 的误差, 对 n 个节点值进行多项式插值, 求导便可得到节点导数, 导数截断误差为

$$R_0(x_i) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \omega'(x_i) \quad (20)$$

式中: $\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, f 是真实曲线函数, $f^{(n)}(\xi)$ 是函数的 n 阶导数, $\xi \in [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 。在动态测量中, 量计线间距较小, 只要 $f^{(n)}(\xi)$ 有界, 适当增加节点数, 减小节点间距都可减

小节点导数的截断误差,中间节点导数误差往往小于两侧,因而增加量计数目减小量计间距都有利于提高开始阶段计算精度。但误差发展到一定程度,增殖误差开始影响计算结果,在量计数目不变条件下,由式 $n = \omega n_0 / 2h$ 可知 h 减小, n 相应增大,这样式(17a)、(17b)、(17c)的时间一次及二次项系数绝对值增大,相应增殖误差发展速度提高,反之,则减慢。增加量计数,则会提高式(19)时间幂次及多项式项数,增殖误差发展速度相应地加快。总之,无论是曲面拟合法还是路径线法,量计数量及间距对截断误差及增殖误差影响是不同的,相互矛盾的,它对计算结果影响很大。因此,在选择量计数量及间距时,需兼顾两种误差对结果的影响,当对加载段起始部分感兴趣,可适当增加量计数量,减小量计间距,随着计算时间增加,需考虑对增殖误差控制。

5 算例

一维 Maxwell 杆的解析应力及由路径线法、曲面拟合法计算的应力见文献[1]图 6、7、8。计算结果表明开始阶段各量计解析值和计算值差值曲线略有差别,随着计算时间的增加,各量计差值曲线基本重合,且曲线近似为时间多项式曲线。在差值曲线上任选几点便可确定多项式系数,多项式系数见表 1,多项式曲线与差值曲线比较见图 2、3、4。图 2、4 多项式曲线与计算的差值曲线重合。为了对实测波形进行分析比较,这里引用文献[10]部分实验数据,实验材料为 PBX9502,初始密度 $\rho_0 = 1.89 \text{ kg/cm}^3$, 1, 2, 3, 4 mm 处实测速度波形及相应压应力波形见图 5、6。实际值与 1、2、3 mm 处速度和计算的压应力差值曲线见图 7,三个位置处差值曲线基本重合,且曲线近似为时间二次多项式曲线,这表明计算增殖误差满足(19)关系式。

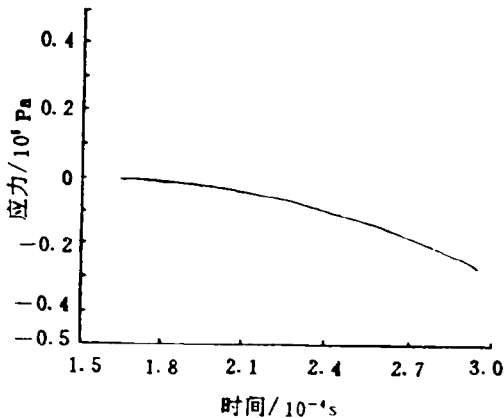


图 2 0.1、0.15、0.2 m 处差值曲线(二次多项式插值)
Fig. 2 Difference curves at positions of 0.1, 0.15, 0.2 m (Quadratic polynomial interpolation)

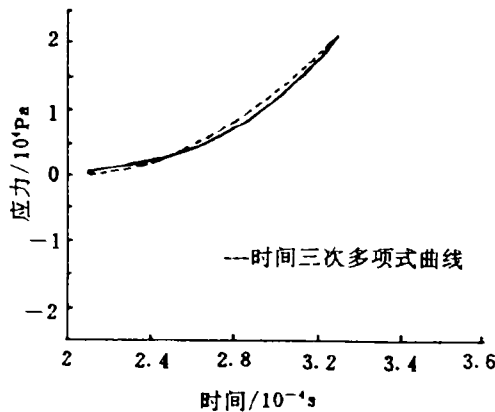


图 3 0.1、0.15、0.2、0.25 m 处差值曲线(三次多项式插值)
Fig. 3 Difference curves at positions of 0.1, 0.15, 0.2, 0.25 m, (Cubic polynomial interpolation) ---Curves of time cubic polynomial

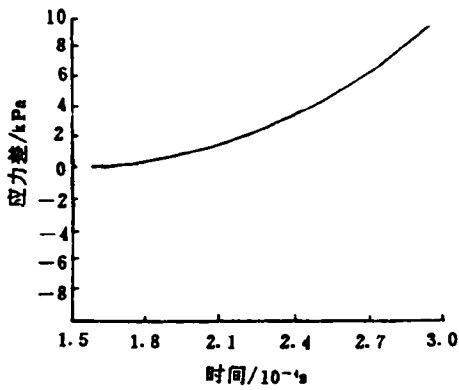


图 4 0.1、0.15、0.2 m 处差
值曲线(九节点曲面拟合)

Fig. 4 Difference curves at positions of 0.1, 0.15, 0.2 m (surface-fitting with nine nodes)

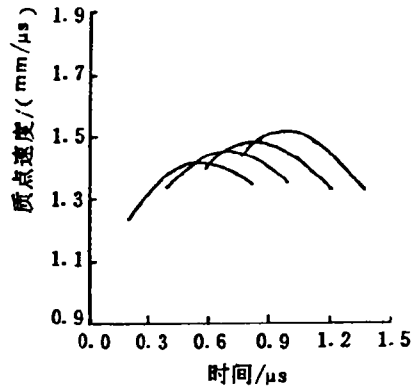


图 5 1.0、2.0、3.0、4.0 mm
处实测速度波形

Fig. 5 Velocity wave-forms at 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 mm

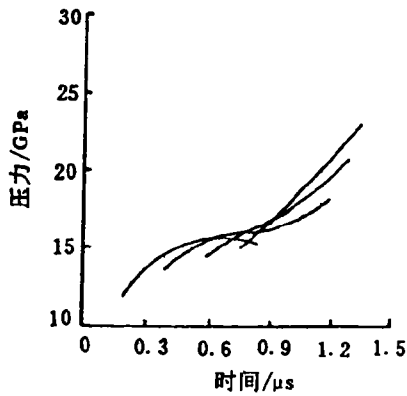


图 6 1.0、2.0、3.0、
4.0 mm 处压力波形

Fig. 6 Pressur wave-forms at 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 mm

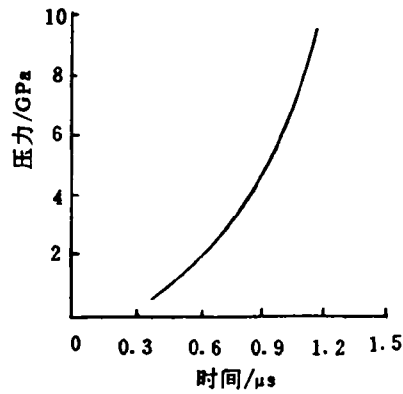


图 7 1.0、2.0、3.0 mm 处
差值曲线(二次多项式插值)

Fig. 7 Difference curves at 1.0, 2.0, 3.0 mm (quadratic polynomial interpolation)

表 1 增殖误差时间多项式系数

Table 1 Coefficients of time polynomial for propagation error

量计数	方法	a_3	a_2	a_1	a_0
3	路径线法 二次多项式插值	—	-1.33×10^{12}	4.1×10^8	-3.1×10^4
3	曲面拟合	—	4.4×10^{11}	-1.3×10^8	9.8×10^3
4	路径线法 三次多项式插值	4.9×10^{14}	1.57×10^{12}	-5.64×10^8	5.4×10^4

6 结 论

(1) 无论是曲面拟合法还是路径线法,反分析计算误差可分成截断误差和增殖误差两部分,根据两种误差在计算误差中所占比例,计算过程一般可分为三个阶段:起始阶段,过渡阶段,发展阶段。

(2) 起始阶段,即流场内最初一些微区域或路径线计算过程,截断误差影响是主要的,此时,增加量计数量、减小量计间距都会提高计算精度;随着区域或路径线数目递增,计算过程进入过渡阶段,计算误差受截断误差和增殖误差共同影响,增殖误差发展速度往往较快;发展阶段,计算误差主要受增殖误差影响,各量计增殖误差均可用统一的时间多项式表示,且多项式最高幂次与量计数有关,增加量计、减小量计间距都不利于对增殖误差控制。在量计间距很大情况下,截断误差较大,增殖误差发展速度很慢,截断误差会影响整个计算过程。

(3) 由于各量计的增殖误差仅与时间有关,其对拉氏坐标偏导数为零,因此,目前的自洽性检验方法难以奏效。

(4) 第一条量计的计算精度往往高于其它量计,与拉氏正分析相反。

以上结论限于微区域曲面拟合法及等时距构筑路径线的路径线法,在实际测量中,还存在测量误差,测量误差对计算结果的影响不在本文讨论范围内。

参 考 文 献

- 1 柴华友,唐志平. 曲面拟合在拉格朗日分析方法中应用的探讨. 爆炸与冲击, 1992, 12(3): 259~269
- 2 柴华友,唐志平. 材料动态性能研究中的拉格朗日分析方法. 中国科学技术大学学报, 爆炸力学专辑, 1990, 20: 48~55
- 3 Gupta Y M. High Strain-rate Shear Deformation of Polyurethane Elastomer Subjected to Impact Loading. Polym Engrg Sci, 1984, 24: 851
- 4 Cowperthwaite M. Derivation of Flow Properties from Multiple Lagrange Gage Records. In: Ding J. ed., Proceedings of the International Symposium on Pyrotechnics and Explosives, Beijing, China, 1987, 1988: 479~488
- 5 Aidun J B, Gupta Y M. Analysis of Lagrangian Gage Measurements of Simple and None-simple Plane-waves. J Appl Phys, 1991, 69(10): 6998~7012
- 6 Sano Y. Underdetermined System Theory Applied to Qualitative Analysis Response Caused by Attenuating Plane Waves. J Appl Phys. 1989, 65(10): 3857~3867
- 7 Sano Y. Qualitative Analysis on Degradation Processes of Attenuating Plane Waves by Underdetermined System Theory. J Appl Phys, 1990, 67(9): 4072~4082
- 8 Sano Y. Qualitative Analysis of Response Caused by Growing Plane Wave by Underdetermined System Theory. J Appl Phys, 1991, 69(6): 3525~3536
- 9 Forest C A. Lagrangian Analysis Data Covariance and the Impulse Time Integral. In: Schmidt S C eds., Shock Compression of Condensed Matter, 1991, 1992: 317~324
- 10 Forest C A, et al. Lagrangian Analysis of MIV Gauge Experiments on PBX 9502 Using the Mass Displacement

Moment Function. In: Proceedings of the 9th International Symposium on Detonation, Portland, 1989; 683~692

11 唐志平. Lagrange 分析方法及其新进展. 力学进展, 1993, 23(3): 348~359

12 Seaman L. Lagrangian Analysis for Multiple Stress or Velocity Gages in Attenuating Waves. J Appl Phys, 1974, 45(10): 4303~4313

附录

推论: 不论插值点如何分布, n 个点插值多项式导数矩阵 $\xi_{i \times n}$ 满足

$$\xi_{i \times n}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \xi_{i \times n}^{(n)} = 0$$

证明: n 个插值点多项式为:

$$f = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \quad (\text{A1})$$

节点异数 $\frac{df}{dx} = \xi_{i \times n} f_{i \times 1}$, 式中 $\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} (\frac{df}{dx})_1 \\ (\frac{df}{dx})_2 \\ \vdots \\ (\frac{df}{dx})_n \end{bmatrix}$, $f_{i \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ 是节点函数值, $\xi_{i \times n}$ 仅与插值点位置有关,

对 n 个插值点导数 df/dx 进行插值又可求得节点二阶导数:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \xi_{i \times n} \left(\frac{df}{dx} \right)_{i \times 1} = \xi_{i \times n}^{(2)} \cdot f_{i \times 1}$$

类推可得: $\frac{d^{(n-1)} f}{dx^{(n-1)}} = \xi_{i \times n}^{(n-1)} f_{i \times 1}$, $\frac{d^{(n)} f}{dx^n} = \xi_{i \times n}^{(n)} f_{i \times 1}$

由式(A1)可知 $\frac{d^{(n-1)} f}{dx^{(n-1)}} = a_n \cdot (n-1)! \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{i \times 1}$, $\frac{d^n f}{dx^n} = 0$, 也即

$$\xi_{i \times n}^{(n)} = 0 \quad \xi_{i \times n}^{(n-1)} f_{i \times 1} = \begin{bmatrix} a_n \cdot (n-1)! \\ a_n \cdot (n-1)! \\ \vdots \\ a_n \cdot (n-1)! \end{bmatrix}_{i \times 1} \quad (\text{A2})$$

$$\text{式 } \xi_{i \times n}^{(n-1)} f_{i \times 1} = \begin{bmatrix} a_n (n-1)! \\ a_n (n-1)! \\ \vdots \\ a_n (n-1)! \end{bmatrix}, \quad \text{可改写为 } \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{bmatrix} \cdot f_{i \times 1} = \begin{bmatrix} a_n \cdot (n-1)! \\ a_n \cdot (n-1)! \\ \vdots \\ a_n \cdot (n-1)! \end{bmatrix}$$

$\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{n1}$ 为 $1 \times n$ 阶矩阵, 第一行元素与第二行元素相减得: $(\xi_{11} - \xi_{21}) \cdot f_{i \times 1} = 0$, 因 $f_{i \times 1}$ 为任意值, 故

$$\xi_{11} - \xi_{21} = 0_{1 \times 1}, \text{ 即 } \xi_{11} = \xi_{21}$$

同理可得 $\xi_{21} = \xi_{31}, \dots$, 因此, $\xi_{i(i-1)} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{11} \end{bmatrix}$, 即矩阵行与行元素相等。

ERROR ANALYSIS FOR LAGRANGIAN ANALYSIS METHOD

Chai Huayou Tang Zhiping*

(*Institute of Rock & Soil Mechanics Academia Sinica Wuhan, Wuhan, 430071*)

(* *Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026*)

ABSTRACT Error development is systematically discussed of path-line and surface-fitting method. Error of inverse analysis can be decomposed into two parts, truncation error and propagation error. Both truncation and propagation error are effected by the number of gages and distance between gages, increasing the number and decreasing distance can reduce truncation error, but it is disadvantageous to control propagation error. Error development of inverse analysis can be divided into three steps. First, truncation error takes major part in calculated error. Second, both of them have the same influence on calculated error. Finally, propagation error is very important. Propagation error for each gage can be expressed as polynomial of time and the highest power of polynomial is $m-1$, which m is the number of gages.

KEYWORDS truncation error, propagation error, calculated error, surface-fitting, mini-domain, path-line, gage-line