

非线性岩土中球壳对冲击波的动力响应分析

房营光

(广东工学院 广州 510090)

摘要 采用小参数摄动法和 Laplace 变换研究了非线性弹性岩土中球壳对冲击波的动力响应问题。系统的非线性方程由小参数摄动渐近展开后,利用 Stokes-Helmholtz 矢量分解定理把它们简化为一系列的线性波动方程,并由 Laplace 变换和本征函数给出了各线性波动方程的求解。最后,对平面冲击波和球面冲击波给出了球壳动力响应的应力结果。

关键词 非线性岩土 动力响应 Stokes-Helmholtz 矢量分解定理 平面冲击波 球面冲击波

1 引言

在冲击荷载下,岩土介质中结构动力响应的分析研究已取得了一些具有实际意义的成果^[1,2,3]。但目前的研究大多是在线性介质或平面应变情况下进行的。由于数学上的困难,对三维非线性问题的研究,所见成果不多。当介质中波的辐射影响域较大时,动力离散模型的有限元或边界元数值方法,对三维问题计算工作量将十分庞大。由于波在离散模型中的传播规律与连续介质中的传播规律不同,可能使离散数值分析误差较大,甚至导致数值模拟完全失真^[4]。解析方法则将遇到数学上的极大困难,使分析研究难于实施。在一些情况下,可采用渐近分析方法,非线性方程由小参数展开为各阶渐近方程,使问题转化为一系列的线性问题。本文由小参数摄动法和 Laplace 变换研究了非线性弹性岩土中球壳对冲击波的动力响应问题,非线性方程按小参数渐近展开后,应用 Stokes-Helmholtz 矢量分解定理,对一系列的线性矢量波动方程进行分离和简化,把问题转化为对一系列解耦的标量波动方程的初始值-边界值问题的求解,由 Laplace 变换和本征函数给出了各标量波动方程的频域解的一般解析表达式,逆变换则变换为对有关特征值的求解,并对平面冲击波和球面冲击波给出了球壳动力响应的应力结果。

2 基本方程及其渐近展开

2.1 基本方程

三维岩土介质的无体力运动方程可表示为

$$\bar{\sigma}_{i,j,k} - \rho \bar{u}_i = 0 \quad (1)$$

1993年3月20日收到原稿,1993年8月4日收到修改稿。

我们采用文献[3]的非线性弹性岩土模型,岩土介质的单位体积应变能函数由下式表示

$$\bar{U}(\epsilon_{ij}) = \bar{U}(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{1}{2}\bar{\lambda} + \bar{\mu}\right)I_1^2 - 2\bar{\mu}I_2 + \bar{\alpha}I_1^3 + \bar{\beta}I_1I_2 + \bar{\gamma}I_3 + \dots \quad (2)$$

式中: I_1, I_2, I_3 为应变不变量, $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ 为 Lamé 常数, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 为高阶弹性模量。应力-应变关系则由下式导出

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \bar{U}(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3)$$

当球壳结构为线弹性介质时,其运动方程可由三个势函数表示为^[5]

$$\bar{c}_1^2 \bar{\nabla}^2 \bar{\varphi}_s - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_s}{\partial \bar{t}^2} = 0, \bar{c}_2^2 \bar{\nabla}^2 \bar{\psi}_s - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s}{\partial \bar{t}^2} = 0, \bar{c}_2^2 \bar{\nabla}^2 \bar{\chi}_s - \frac{\partial^2 \bar{\chi}_s}{\partial \bar{t}^2} = 0 \quad (4)$$

式中: \bar{c}_1, \bar{c}_2 分别是结构中的纵波和横波速度。结构位移则表示为

$$\vec{u}_s = \bar{\nabla} \bar{\varphi}_s + \bar{\nabla} \times (h \vec{\psi}_s \times \vec{e}_3) + l \nabla \times \nabla (h \bar{\chi}_s \cdot \vec{e}_3) \quad (5)$$

式中: l 是使各项有相同量纲的因子,在球面座标中 $h=r, \vec{e}_3 = \vec{e}_r$ 是单位矢量。假定入射波对应的位移场由下式表示

$$\bar{u}_i = \eta_0 \bar{f}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \bar{v}_i = \eta_0 \bar{f}_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \bar{w}_i = \eta_0 \bar{f}_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \quad (6)$$

式中: η_0 为入射波正值参数, $\bar{f}_i (i=1, 2, 3)$ 称为波形函数。系统方程的定解条件可由下式的球壳内表面无应力条件和介质与结构之间的位移,应力连续条件表为

$$\bar{\sigma}_\rho^* = 0, \bar{\sigma}_{\rho\theta}^* = 0, \bar{\sigma}_{\rho\phi}^* = 0, \bar{g}_s - \bar{g} = 0 \quad (7)$$

式中: \bar{g}, \bar{g}_s 分别取交界面上岩土位移 $\bar{u}_\rho, \bar{u}_{\rho\theta}, \bar{u}_{\rho\phi}$ 和应力 $\bar{\sigma}_\rho, \bar{\sigma}_{\rho\theta}, \bar{\sigma}_{\rho\phi}$ 以及结构的位移 $\bar{u}_s^*, \bar{u}_{s\theta}^*, \bar{u}_{s\phi}^*$ 和应力 $\bar{\sigma}_\rho^*, \bar{\sigma}_{\rho\theta}^*, \bar{\sigma}_{\rho\phi}^*$ 。同时假定岩土和结构初始状态为静止,当岩土介质为无穷域时,反射波位移还应满足相应的辐射条件。

1.2 基本方程的渐近展开

引入下列的无量纲参数

$$\left. \begin{aligned} (x, y, z, u, v, w, u_i, v_i, w_i, u_s, v_s, w_s) &= \frac{1}{L} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{u}_s, \bar{v}_s, \bar{w}_s) \\ (\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^*, \mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \mu_s, \lambda_s) &= \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{ij}^*, \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\mu}_s, \bar{\lambda}_s) \\ (\rho, \rho_s, t) &= \left(\frac{L^2}{E} \bar{\rho}, \frac{L^2}{E} \bar{\rho}_s, \bar{t} / T\right), (\varphi_s, \psi_s, \chi_s) = \frac{1}{L^2} (\bar{\varphi}_s, \bar{\psi}_s, \bar{\chi}_s) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: L, T 分别为特征尺寸(可取结构的最大尺寸)和特征时间(可取冲击波的持续时间), E 为岩土弹性模量。把(8)式代入(1)~(7)式可得相应的无量纲方程。除(6)式外,各式中的物理量用(8)式中的相应的无量纲量代替,即是相应的无量纲方程。而(6)式则变换为

$$u_i = \epsilon f_1(x, y, z, t), v_i = \epsilon f_2(x, y, z, t), w_i = \epsilon f_3(x, y, z, t) \quad (9)$$

式中: $f_i(x, y, z, t) = f_i(Lx, Ly, Lz, Tt), \epsilon = \eta_0/L$ 。取 ϵ 为摄动小参数时,由摄动理论^[6]可把岩土介质的位移表示为

$$u = u_i + u_0 \approx \sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n, v = v_i + v_0 \approx \sum_{n=0}^{\infty} v_n \epsilon^n, w = w_i + w_0 \approx \sum_{n=0}^{\infty} w_n \epsilon^n \quad (10)$$

式中: $u_n = u_n^i + \delta_{1n} f_1, v_n = v_n^i + \delta_{1n} f_2, w_n = w_n^i + \delta_{1n} f_3, \delta_{1n} = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$, 角标 I、D 分别代表入射

场和反射场。由(2)、(3)式可得应力表达式

$$\sigma_{ij} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon^n, \sigma_{ij}^{(n)} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{(n)} + (\lambda \theta^{(n)} + G^{(n)}) \delta_{ij} + L_{ij}^{(n)}(\varepsilon_i) \quad (11)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} G^{(n)} &= \sum_{m=0}^n \{ 3\alpha \theta^{(n-m)} \theta^{(m)} + \beta [\varepsilon_{11}^{(n-m)} \varepsilon_{22}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(n-m)} \varepsilon_{33}^{(m)} + \varepsilon_{33}^{(n-m)} \varepsilon_{11}^{(m)} \\ &\quad - \frac{1}{4} (\varepsilon_{12}^{(n-m)} \varepsilon_{12}^{(m)} + \varepsilon_{23}^{(n-m)} \varepsilon_{23}^{(m)} + \varepsilon_{13}^{(n-m)} \varepsilon_{13}^{(m)})] \} \\ L_{ij}^{(n)}(\varepsilon_i) &= \begin{cases} \sum_{m=0}^n [\beta \theta^{(n-m)} (\theta^{(m)} - \varepsilon_{ij}^{(m)}) + \gamma (\varepsilon_{ik}^{(n-m)} \varepsilon_{kl}^{(m)} - \frac{1}{4} \varepsilon_{ik}^{(n-m)} \varepsilon_{kl}^{(m)})] \\ (i=j=1,2,3, k=3,1,2, l=2,3,1) \\ \sum_{m=0}^n [-\frac{1}{2} \beta \theta^{(n-m)} \varepsilon_{ij}^{(m)} + \frac{1}{4} (\varepsilon_{ik}^{(n-m)} \varepsilon_{kl}^{(m)} - 2\varepsilon_{ik}^{(n-m)} \varepsilon_{ij}^{(m)})] \\ (i=1,2,3, j=2,3,1, k=3,2,1) \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (12a)$$

上式中下标不求和,且有

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)}), \theta^{(n)} = u_{,i}^{(n)}, (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}) = (u_n, r_n, w_n) \quad (12b)$$

把(10)、(11)式代入(1)式对应的无量纲方程可得由各阶渐近位移矢量表示的运动方程

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u}_n + \mu \nabla^2 \vec{u}_n + \vec{F}_n = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_n}{\partial t^2} \quad (13)$$

其中

$$\vec{F}_n = \nabla G^{(n)} + L_{ij}^{(n)} \vec{e}_i, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ 是单位矢量}) \quad (14)$$

根据 Stokes-Helmholtz 矢量分解定理^[7],把反射波位移 \vec{u}_n^* 分解为

$$\vec{u}_n^* = u_n^* \vec{e}_1 + v_n^* \vec{e}_2 + w_n^* \vec{e}_3 = \nabla \varphi_n + \nabla \times \vec{\psi}_n \quad (15a)$$

类似地作如下的矢量分解

$$\vec{A}_n = \vec{F}_n + \delta_n [(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{f}_n + \mu \nabla^2 \vec{f}_n - \rho \frac{\partial^2 \vec{f}_n}{\partial t^2}] = \nabla f_n + \nabla \times \vec{f}_{ns} \quad (15b)$$

(15)式中 $\varphi_n, \vec{\psi}_n$ 是位移函数, f_n, \vec{f}_{ns} 为待定函数,且 $\vec{f} = f_n \vec{e}_1$ 。由(13)、(15)式可得岩土介质的各阶渐近波动方程

$$c_p^2 \nabla^2 \varphi_n - \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + f_n / \rho = 0, c_s^2 \nabla^2 \vec{\psi}_n - \frac{\partial^2 \vec{\psi}_n}{\partial t^2} + \vec{f}_{ns} / \rho = 0, (n \geq 1) \quad (16a)$$

式中: $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, f_n, \vec{f}_{ns} 则满足如下方程

$$\nabla^2 f_n = \rho g_n, \nabla^2 \vec{f}_{ns} = \rho \vec{g}_{ns} \quad (16b)$$

式中: $g_n = \nabla \cdot \vec{A}_n / \rho$, $\vec{g}_{ns} = -\nabla \times \vec{A}_n / \rho$ 。设方程(16a)的解为

$$\varphi_n = \varphi_n^0 + \varphi_n^*, \vec{\psi}_n = \vec{\psi}_n^0 + \vec{\psi}_n^* = h \psi_n \vec{e}_3 + \nabla \times (h \chi_n \vec{e}_3) + \vec{\psi}_n^* \quad (17)$$

在球面坐标中 $h=r, \vec{e}_3 = \vec{e}_r$, 其中特解 $\varphi_n^*, \vec{\psi}_n^*$ 满足下列方程

$$\nabla^2 (c_p^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \varphi_n^* + g_n = 0, \nabla^2 (c_s^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{\psi}_n^* + \vec{g}_{ns} = 0 \quad (18a)$$

而齐次通解 $\varphi_n^0, \psi_n, \chi_n$ 满足下列方程

$$c_p^2 \nabla^2 \varphi_n^0 - \frac{\partial^2 \varphi_n^0}{\partial t^2} = 0, c_s^2 \nabla^2 \psi_n - \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = 0, c_s^2 \nabla^2 \chi_n - \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial t^2} = 0 \quad (18b)$$

类似地可得球壳结构的各阶渐近方程

$$c_1^2 \nabla^2 \varphi_{ns} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{ns} = 0, c_2^2 \nabla^2 \psi_{ns} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_{ns} = 0, c_3^2 \nabla^2 \chi_{ns} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi_{ns} = 0 \quad (19a)$$

其中: $c_1 = \sqrt{(\lambda_s + 2\mu_s)/\rho_s}$, $c_2 = \sqrt{\mu_s/\rho_s}$, 且

$$\varphi_s \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ns} \varepsilon^n, \psi_s \approx \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{ns} \varepsilon^n, \chi_s \approx \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{ns} \varepsilon^n \quad (19b)$$

3 各渐近方程在球坐标中的解

我们讨论图 1 所示的岩土中球壳对冲击波的动力响应问题。设 (18a₂) 式中的矢量函数 $\vec{\varphi}_s, \vec{g}_{ns}$ 在球面坐标中分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \vec{\varphi}_s &= \varphi_{s1} \vec{e}_r + \varphi_{s2} \vec{e}_\theta + \varphi_{s3} \vec{e}_\varphi \\ \vec{g}_{ns} &= g_{ns}^{(1)} \vec{e}_r + g_{ns}^{(2)} \vec{e}_\theta + g_{ns}^{(3)} \vec{e}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ 是球面坐标的单位矢量。利用 Laplace 变换

$$\tilde{f}(r, \theta, \varphi, p) = \int_0^{\infty} f(r, \theta, \varphi, t) e^{-pt} dt$$

把 (18a) 式中的非齐次项在球面坐标中展开为如下的级数形式

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}_{ns}^{(i)}(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l q_{jlm}^{(i)}(r, p) \\ &\cdot \Phi_{jm}(\varphi) P_l^m(\cos\theta) \\ \tilde{g}_{ns}^{(i)}(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l p_{jlm}^{(i)}(r, p) \\ &\cdot \Phi_{jm}(\varphi) p_l^m(\cos\theta) \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} q_{jlm}^{(i)}(r, p) &= \frac{2l+1}{2\pi\delta_m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{g}_{ns}^{(i)} P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ p_{jlm}^{(i)}(r, p) &= \frac{2l+1}{2\pi\delta_m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{g}_{ns}^{(i)} P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

其中 $P_l^m(\cos\theta)$ 为缩合 Legendre 函数, 且

$$\Phi_{jm}(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi & j=1 \\ \sin m\varphi & j=2, \end{cases} \quad \delta_m = \begin{cases} 2 & m=0 \\ 1 & m \neq 0 \end{cases} \quad (21c)$$

对式 (18a) 施以 Laplace 变换, 并考虑到式 (20)、(21) 可得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_s^*(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l h_{jlm}^{(i)}(r, p) P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \\ \tilde{\psi}_s^*(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l k_{jlm}^{(i)}(r, p) P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

由常数变易法求解函数 $h_{jlm}^{(i)}(r, p), k_{jlm}^{(i)}(r, p)$ 得

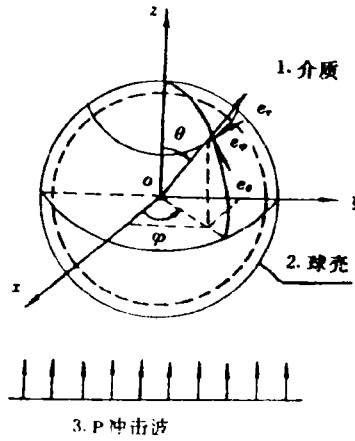


图 1 球壳、P 冲击波和坐标系简图
Fig. 1 Sketch of spherical shell, P-shock wave and coordinates system
1. Medium; 2. Spherical shell; 3. P-shock wave

$$\left. \begin{aligned} h_{jim}^{(n)}(r, p) &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \int_0^r [j_l^*(k_p r) n_l^*(k_p \xi) - n_l^*(k_p r) j_l^*(k_p \xi)] \xi^2 a_{jim}^{(n)}(\xi, p) d\xi \\ k_{jim}^{(n)}(r, p) &= \frac{1}{\mu} \int_0^r [j_l^*(k_s r) n_l^*(k_s \xi) - n_l^*(k_s r) j_l^*(k_s \xi)] \xi^2 b_{jim}^{(n)}(\xi, p) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} a_{jim}^{(n)}(r, p) &= \frac{1}{2l+1} \int_0^r [r^l \xi^{-l} - r^{l+1} \xi^{-l-1}] \xi^3 q_{jim}^{(n)}(\xi, p) d\xi \\ b_{jim}^{(n)}(r, p) &= \frac{1}{2l+1} \int_0^r [r^l \xi^{-l} - r^{l+1} \xi^{-l-1}] \xi^3 p_{jim}^{(n)}(\xi, p) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (22c)$$

式中: $k_p = p/c_p$, $k_s = p/c_s$, j_l^* , n_l^* 是 l 阶虚宗量球 Bessel 和球 Neumann 函数, r_b 是球壳的外径。这里, 我们已经假定 φ_0^* 和 ψ_0^* 的初始值为零。

对(18b)式施以 Laplace 变换, 并考虑辐射条件和齐次初值条件, 可得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_0^*(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{jim}^{(n)} h_l^{(1)*}(k_p r) P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \\ \tilde{\psi}_0^*(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l B_{jim}^{(n)} h_l^{(1)*}(k_p r) P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \\ \tilde{\chi}_0^*(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{jim}^{(n)} h_l^{(1)*}(k_p r) P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中: $H_l^{(1)*}$ 是 l 阶虚宗量第一类球 Hankel 函数, $A_{jim}^{(n)}$, $B_{jim}^{(n)}$, $C_{jim}^{(n)}$ 是待定常数。式(22)、(23)构成了岩土位移势函数的各阶渐近解, 且已经满足初值条件和辐射条件。类似地由式(19a)可得球壳结构的位移函数的各阶渐近解

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{as}(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [a_{jim}^{(n)} j_l^*(k_1 r) + b_{jim}^{(n)} n_l^*(k_1 r)] P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \\ \tilde{\psi}_{as}(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [c_{jim}^{(n)} j_l^*(k_2 r) + d_{jim}^{(n)} n_l^*(k_2 r)] P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \\ \tilde{\chi}_{as}(r, \theta, \varphi, p) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [e_{jim}^{(n)} j_l^*(k_2 r) + f_{jim}^{(n)} n_l^*(k_2 r)] P_l^m(\cos\theta) \Phi_{jm}(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中: $k_1 = p/c_1$, $k_2 = p/c_2$, $a_{jim}^{(n)}$, \dots , $f_{jim}^{(n)}$ 为待定常数。

4 边界值问题

以上式(22)、(23)和(24)给出的岩土和球壳结构的各阶频域渐近解满足了齐次初值条件和辐射条件, 其中的待定常数需由边界条件确定。我们讨论平面冲击 P 波和球面冲击波情况的边界值问题。取 z 轴为对称轴(参考图 1), 若略去入射波在 $-r_b \leq z \leq r_b$ 内的衰减, 其位移在 $-r_b \leq z \leq r_b$ 区域内可近似为

$$\left. \begin{aligned} u_l &= v_l = 0, w_l = \varepsilon f_3(t - z/c_p) && \text{(平面冲击 P 波)} \\ u_{rl} &= \varepsilon f(r_1, t), u_{\theta l} = u_{\varphi l} = 0 && \text{(球面冲击波)} \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

式中: u_{rl} , $r_{\theta l}$, $u_{\varphi l}$ 是球面坐标系 $r_1 \theta_1 \varphi_1$ 中的入射波位移分量(参考图 2)。设对应于式(25a)的入射波位移, f_3, f 可表示为

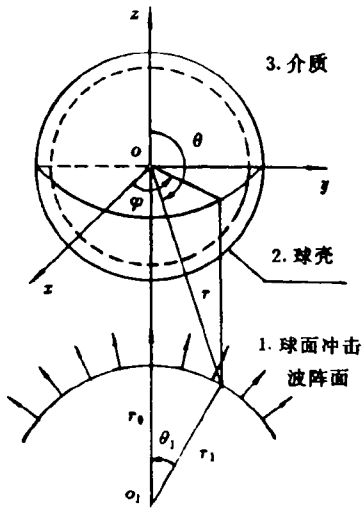


图 2 从中心 O_1 出发的球面冲击波
 Fig. 2 Spherical shock wave propagating from center O_1
 1. Spherical shock wave front;
 2. Spherical shell 3. Medium

$$f_3 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, f = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r_1} \quad (25b)$$

考虑到平面波和球面波的特点, φ_1, φ_2 在 $-r_b \leq z \leq r_b$ 区域内可近似表示为

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_0(t - z/c_p), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{r_1} \Phi_0(t - r_1/c_p) \end{aligned} \quad (25c)$$

而式(9)表示的入射波位移在球面坐标 $r\theta\varphi$ 中的频域表达式为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{r1} &= \frac{\tilde{\Phi}_0(p)}{r} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \\ &\quad \cdot g(r_0) U_1^{(1)}(k, r) P_l(\cos\theta) \\ \tilde{u}_{\theta 1} &= \frac{\tilde{\Phi}_0(p)}{r} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \\ &\quad \cdot g(r_0) V_1^{(1)}(k, r) \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \\ \tilde{u}_{\varphi 1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25d)$$

相应地, (11)式中的一阶渐近应力 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 与入射波位移相关的部分在球面坐标 $r\theta\varphi$ 中的频域表达式则为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{r1}^{(1)} &= \frac{2\mu}{r^2} \tilde{\Phi}_0(p) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g(r_0) T_{11}^{(1)}(k, r) P_l(\cos\theta) \\ \tilde{\sigma}_{r\varphi 1}^{(1)} &= \frac{2\mu}{r^2} \tilde{\Phi}_0(p) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g(r_0) T_{11}^{(1)}(k, r) \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \\ \tilde{\sigma}_{r\theta 1}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25e)$$

式中: $g(r_0)$ 对平面冲击 P 波和球面冲击波分别取 $(-1)^l$ 和 $(-1)^{l+1} k_1 h_1^{(1)*}(k, r_0)$, $U_1^{(1)}, V_1^{(1)}, T_{11}^{(1)}, T_{11}^{(1)}$ 由式(26f)给出。由于入射波位移对称于 z 轴, 经分析可知, 各阶渐近位移和应力亦对称于 z 轴, 与变量 φ 无关(取 $m=0$), 即有

$$\tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}_{ns} = 0, \tilde{u}_{\varphi n} = \tilde{u}_{\varphi n} = 0, \tilde{\sigma}_{r\varphi}^{(n)} = \tilde{\sigma}_{\theta\varphi}^{(n)} = \tilde{\sigma}_{r\varphi n}^{(n)} = \tilde{\sigma}_{\theta\varphi n}^{(n)} = 0$$

由式(7)对应的无量纲方程可求得求解待定常数 $A_i^{(n)}, \dots, f_i^{(n)}$ (z 轴对称时常数的下标换成 l) 的代数方程

$$[T_{ij}]_{6 \times 6} X_i^{(n)} = P_i^{(n)} \quad (26a)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} X_i^{(n)} &= (a_i^{(n)}, b_i^{(n)}, e_i^{(n)}, f_i^{(n)}, A_i^{(n)}, C_i^{(n)})^T \\ P_i^{(n)} &= (2l+1) \delta_m g(r_0) \tilde{\Phi}_0(p) (\lambda_1 T_{11}^{(1)}(k, r_b), \lambda_1 T_{11}^{(1)}(k, r_b), U_1^{(1)}(k, r_b), V_1^{(1)}(k, r_b)), \\ &\quad 0, 0)^T + (\tilde{p}_i^{(n)}, \tilde{q}_i^{(n)}, 0, 0, 0, 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (26b)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_i^{(n)} &= \begin{cases} \frac{r_b^2}{2\mu_s} \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \bar{\sigma}_{i\theta}^{(n)}(r_b, \theta, p) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta & (n \geq 2) \\ 0 & (n = 1) \end{cases} \\ \bar{q}_i^{(n)} &= \begin{cases} \frac{r_b^2}{2\mu_s} \frac{2l+1}{2l(l+1)} \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} [\bar{\sigma}_{i\theta}^{(n)}(r_b, \theta, p) \sin\theta] P_l(\cos\theta) d\theta & (n \geq 2, l \geq 1) \\ 0 & (n = 1 \text{ 或 } l = 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} (26c)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i\theta}^{(n)} &= G^{(n)} + \sum_{m=0}^n [\beta \theta^{(n)} (\theta^{(n-m)} - \varepsilon_{\theta}^{(n-m)}) + \gamma \varepsilon_{\theta}^{(n)} \varepsilon_{\theta}^{(n-m)}] \\ \sigma_{i\theta}^{(n)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \{ \beta \theta^{(n)} [\varepsilon_{\theta}^{(n-m)} - \theta^{(n-m)} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{\theta}^{(n-m)} + \varepsilon_{\theta}^{(n-m)}) \sin 2\theta - \frac{1}{2} \varepsilon_{\theta}^{(n-m)}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma \varepsilon_{\theta}^{(n)} \varepsilon_{\theta}^{(n-m)} \} \end{aligned} \right\} (26d)$$

$[T_{ij}]_{6 \times 6} =$

$$\left[\begin{array}{cccccc} T_{11}^{(1)}(k_1 r_b) & T_{11}^{(2)}(k_1 r_b) & T_{13}^{(1)}(k_2 r_b) & T_{13}^{(2)}(k_2 r_b) & -\lambda_1 T_{11}^{(3)}(k_1 r_b) & -\lambda_1 T_{13}^{(3)}(k_1 r_b) \\ T_{41}^{(1)}(k_1 r_b) & T_{41}^{(2)}(k_1 r_b) & T_{43}^{(1)}(k_2 r_b) & T_{43}^{(2)}(k_2 r_b) & -\lambda_1 T_{41}^{(3)}(k_1 r_b) & -\lambda_1 T_{43}^{(3)}(k_1 r_b) \\ U_1^{(1)}(k_1 r_b) & U_1^{(2)}(k_1 r_b) & U_3^{(1)}(k_2 r_b) & U_3^{(2)}(k_2 r_b) & -U_1^{(3)}(k_1 r_b) & -U_3^{(3)}(k_1 r_b) \\ V_1^{(1)}(k_1 r_b) & V_1^{(2)}(k_1 r_b) & V_3^{(1)}(k_2 r_b) & V_3^{(2)}(k_2 r_b) & -V_1^{(3)}(k_1 r_b) & -V_3^{(3)}(k_1 r_b) \\ T_{11}^{(1)}(k_1 r_a) & T_{11}^{(2)}(k_1 r_a) & T_{13}^{(1)}(k_2 r_a) & T_{13}^{(2)}(k_2 r_a) & 0 & 0 \\ T_{41}^{(1)}(k_1 r_a) & T_{41}^{(2)}(k_1 r_a) & T_{43}^{(1)}(k_2 r_a) & T_{43}^{(2)}(k_2 r_a) & 0 & 0 \end{array} \right] (26e)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} U_1^{(1)}(k_1 r), & V_1^{(1)}(k_1 r), & T_{11}^{(1)}(k_1 r), & T_{41}^{(1)}(k_1 r) \\ U_3^{(3)}(k_1 r), & V_3^{(3)}(k_1 r), & T_{11}^{(3)}(k_1 r), & T_{41}^{(3)}(k_1 r) \\ U_3^{(3)}(k_1 r), & V_3^{(3)}(k_1 r), & T_{13}^{(3)}(k_1 r), & T_{43}^{(3)}(k_1 r) \\ U_1^{(1)}(k_1 r), & V_1^{(1)}(k_1 r), & T_{11}^{(1)}(k_1 r), & T_{41}^{(1)}(k_1 r) \\ U_1^{(2)}(k_1 r), & V_1^{(2)}(k_1 r), & T_{11}^{(2)}(k_1 r), & T_{41}^{(2)}(k_1 r) \\ U_3^{(1)}(k_2 r), & V_3^{(1)}(k_2 r), & T_{13}^{(1)}(k_2 r), & T_{43}^{(1)}(k_2 r) \\ U_3^{(2)}(k_2 r), & V_3^{(2)}(k_2 r), & T_{13}^{(2)}(k_2 r), & T_{43}^{(2)}(k_2 r) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} D_1(k_1) j_i^*(k_1 r) \\ D_1(k_1) h^{(1)*}(k_1 r) \\ D_2(k_1) h^{(1)*}(k_1 r) \\ D_1(k_2) j_i^*(k_1 r) \\ D_1(k_2 r) n_i^*(k_1 r) \\ D_2(k_2) j_i^*(k_2 r) \\ D_2(k_2) n_i^*(k_2 r) \end{array} \right] (26f)$$

式(26f)中

$$\left. \begin{aligned} D_1(k_s) &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}, 1, l(l+1) + \frac{1}{2} k_s^2 r^2 - 2r \frac{\partial}{\partial r}, r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) \\ D_2(k_s) &= \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - k_s^2 r^2, r \frac{\partial}{\partial r} - 1, r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} + 3r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. - k_s^2 r^2 (1 + r \frac{\partial}{\partial r}), r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 1 - \frac{1}{2} k_s^2 r^2 \right) \end{aligned} \right\} (26g)$$

把 $D_1(k_s), D_2(k_s)$ 中的 k_s 换成 k_2 时, $D_1(k_s), D_2(k_s)$ 即变换为 $D_1(k_2)$ 和 $D_2(k_2)$ 。式(26e)中 $\lambda_1 = \mu/\mu_s, r_a$ 为球壳内径。从(26a)式求得待定常数后由(22a), (23), (24)式进行逆变换可得 z 轴对称的各渐近位移函数的时域解析表达式

$$\begin{pmatrix} \varphi_a^0 \\ \chi_a \\ \varphi_{as} \\ \chi_{as} \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left\{ \frac{\pi}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{ke^{-r_j t}}{p_{jk} \Delta_l(p_{jk})} \begin{pmatrix} h_l^{(1)*}(k, r) \Delta_{2l}^{\xi t}(p) \\ h_l^{(1)*}(k, r) \Delta_{2l}^{\xi t}(p) \\ j_l^*(k_1 r) \Delta_{2l}^{\xi t}(p) + n_l^*(k_1 r) \Delta_{2l}^{\xi t}(p) \\ j_l^*(k_2 r) \Delta_{2l}^{\xi t}(p) + n_l^*(k_2 r) \Delta_{2l}^{\xi t}(p) \end{pmatrix} \right\}_{r=r_j} \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\xi_l t}}{[d_l \Delta_l(p)/dp]_{p=\xi_l}} \begin{pmatrix} h_l^{(1)*}(k, r) \Delta_{2l}^{\xi}(p) \\ h_l^{(1)*}(k, r) \Delta_{2l}^{\xi}(p) \\ j_l^*(k_1 r) \Delta_{2l}^{\xi}(p) + n_l^*(k_1 r) \Delta_{2l}^{\xi}(p) \\ j_l^*(k_2 r) \Delta_{2l}^{\xi}(p) + n_l^*(k_2 r) \Delta_{2l}^{\xi}(p) \end{pmatrix} \Big|_{r=\xi_l} \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_a^* \\ \psi_{a_i}^* \end{pmatrix} = \frac{\pi}{T_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda + 2\mu \\ \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ P_l(\cos\theta) \frac{ke^{-r_j t}}{p_{jk}} \int_0^{\tau_0} [n_l^*(k_a r) j_l^*(k_a \xi) - j_l^*(k_a r) n_l^*(k_a \xi)] \xi^2 g_{ik}^{(*)}(\xi) d\xi \right\}_{r=r_j} \quad (28)$$

式中: $\Delta_l(p) = \det[T_{ij}]_{6 \times 6}$, $\Delta_{2l}^{\alpha}(p)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) 是由 $\Delta_l(p)$ 的第 α 列元素用 $F_i^{(*)}$ 代替而得到, ξ_l 是 $\Delta_l(p) = 0$ 的第 l 个根, $p_{1k} = ip_k$, $p_{2k} = -ip_k$ ($l = \sqrt{-1}$, $p_k = 2\pi k/T_0$, T_0 为参考周期); 对于 φ_a^* , $g_{ik}^{(*)}(\xi) = a_{ik}^{(*)}(\xi)$, $k_a = k_p$, 对于 $\psi_{a_i}^*$, $g_{ik}^{(*)}(\xi) = b_{ik}^{(*)}(\xi)$, $k_a = k_c$; $\Delta_{2l}^{\alpha}(p)$ 是由 $\Delta_{2l}^{\alpha}(p)$ 中的 $\bar{\Phi}_0(p)$, $\bar{p}^{(*)}$, $\bar{q}_l^{(*)}$ 分别用 a_k , $p_{ik}^{(*)}$, $q_{ik}^{(*)}$ 代替而得到, 而 $a_{ik}^{(*)}(\xi)$, $b_{ik}^{(*)}(\xi)$ 是用把 $g_{a\alpha}(r, \theta, t)$, $g_{a\alpha}^{(i)}(r, \theta, t)$ 展为 $P_l(\cos\theta) \sin p_k t$ 的级数的系数代替(22c)中的 $g_{jlm}^{(i)}$, $p_{jlm}^{(i)}$ 而得到的, $p_{ik}^{(*)}$, $q_{ik}^{(*)}$ 是用把 $\sigma_{ir}^{(i)}(r_b, \theta, t)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r_b, \theta, t)$ 展为 $\sin p_k t$ 的级数的系数代替(26c)式中的 $\bar{\sigma}_{ir}^{(i)}(r_b, \theta, t)$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)}(r_b, \theta, t)$ 而得到的, a_k 是把 $\Phi_0(t)$ 展为 $\sin p_k t$ 的级数的系数。

5 数值计算

我们对图 3 所示的入射波波形情况作了数值计算。在给定入射波的应变场时, 设平面冲击 P 波的应变为 $\epsilon_l^i(t - z/c)$, 而球面冲击波对应的第一应变不变量 $\theta_l = \epsilon_a^i + \epsilon_b^i + \epsilon_c^i = (1/r_1) \theta_0^i(t - r_1/c)$, 则式(25d, e)中的函数 $\bar{\Phi}_0(p)$ 与应变的关系为

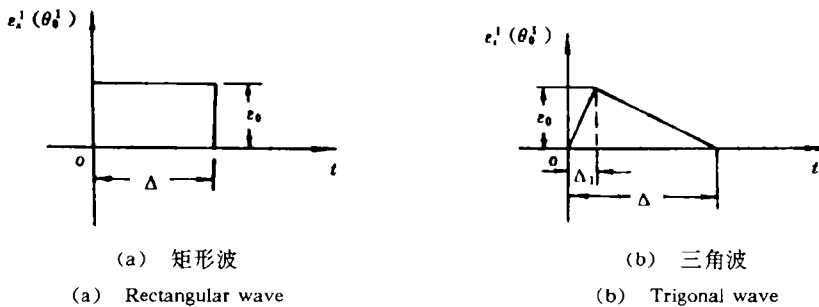
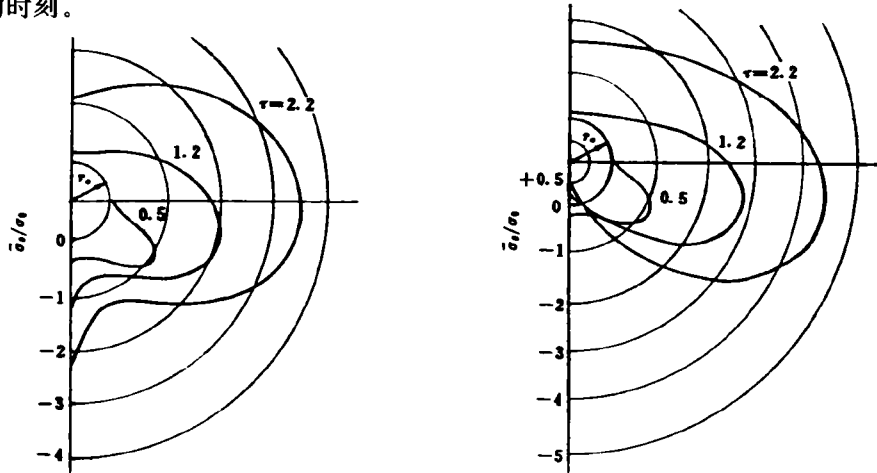


图 3 入射波波形
Fig. 3 Incident waves form

$$\bar{\Phi}_0(\rho) = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}'_i(\rho)/k_i^2 & \text{(平面冲击 P 波)} \\ \tilde{\theta}'_i(\rho)/k_i^2 & \text{(球面冲击波)} \end{cases}$$

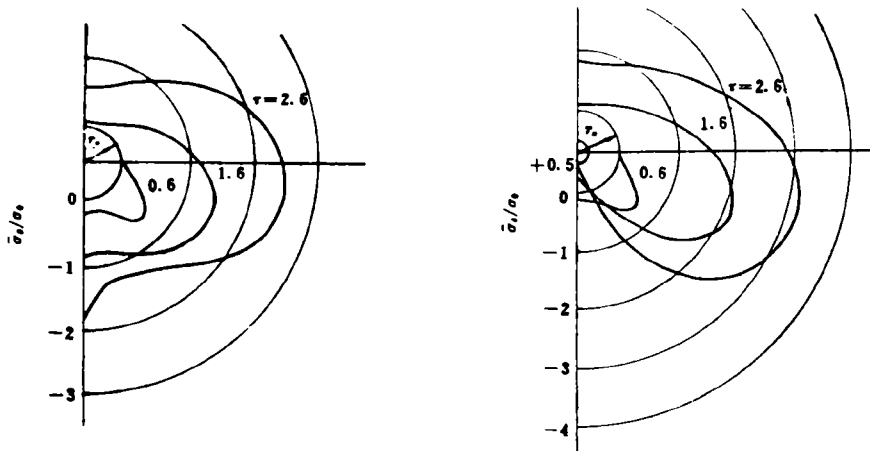
入射波参数: $\Delta_1/\Delta=0.2, c_s\Delta/2r_0=5$, 岩土参数: $\bar{E}=7000\text{MPa}, \bar{\alpha}/\bar{E}=-8.0, \bar{\beta}/\bar{E}=16.0, \bar{\gamma}/\bar{E}=10.0, \bar{\rho}=2600\text{kg/m}^3$, 泊松比 $\nu_s=0.25$ 。球壳结构参数: $\bar{E}_s=1.76\times 10^4\text{MPa}, \bar{\rho}_s=2300\text{kg/m}^3$, 泊松比 $\nu_s=0.2$, 中径 $R=3\text{m}$, 中径厚度比 $h/R=0.2$ 。图 4,5 给出的应力结果对应于一至三阶渐近解, σ_0 是入射波引起的 σ_0 的幅值, $\tau=c_s t/2r_0$ 。时刻 $t=0$ 对应于入射波到达球壳结构的时刻。



(a) 对平面冲击 P 波的应力 $\bar{\sigma}_\theta$ 响应 (b) 对球面冲击波的应力 $\bar{\sigma}_\theta$ 响应
 (a) Stress $\bar{\sigma}_\theta$ due to plane shock P-wave (b) Stress $\bar{\sigma}_\theta$ due to spherical shock wave

图 4 球壳内表面对矩形冲击波的应力响应

Fig. 4 Response of stress $\bar{\sigma}_\theta$ on the inner surface of spherical shell to rectangular shock wave



(a) 对平面冲击 P 波的应力 $\bar{\sigma}_\theta$ 响应 (b) 对球面冲击波的应力 $\bar{\sigma}_\theta$ 响应
 (a) Stress $\bar{\sigma}_\theta$ due to plane shock P-wave (b) Stress $\bar{\sigma}_\theta$ due to spherical shock wave

图 5 球壳内表面对三角冲击波的应力响应

Fig. 5 Response of stress $\bar{\sigma}_\theta$ on the inner surface of spherical shell to trigonal wave

6 结 语

由解析法给出的非线性岩土中球壳结构对冲击波动力响应的渐近解可避免数值法庞大的计算工作量及离散引起的可能的数值模拟的失真。数值计算表明,球壳对球面冲击波的应力响应比对平面冲击P波的应力响应更大一些,这是入射波的曲率效应所致。本文的解答可直接用于计算球壳对其他形式的冲击波的响应问题,这仅依赖于将入射波展开为球谐函数的级数。

参 考 文 献

- 1 El-Akily N, Datta S K. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1980, 8: 469~476
- 2 方 秦, 钱七虎. 爆炸与冲击, 1988, 8(4): 289~298
- 3 房营光, 孙 钧. 地震工程与工程振动, 1992, 9(3): 55~64
- 4 刘晶波, 姚 玲. 爆炸与冲击, 1993, 13(1): 9~17
- 5 Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamics (Vol. I) - Linear Theory. New York: Academic Press, 1975: 431~456
- 6 黄用宾等. 摄动法简明教程. 上海: 上海交通大学出版社, 1986: 37~48
- 7 Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. New York: McGraw-Hill, 1953: 26~41

ANALYSES OF DYNAMIC RESPONSE OF A SPHERICAL SHELL IN NONLINEAR GEO-MEDIUM TO SHOCK WAVES

Fang Yingguang

(Guangdong Institute of Technology, Guangzhou, 510090)

ABSTRACT This paper deals with the dynamic response of spherical shell in nonlinear elastic geo-medium to shock waves using the methods of small parameter perturbation and Laplace-transform. The asymptotic linear equations are derived from nonlinear ones of the system by perturbation, and reduced to a series of decoupled linear wave equations by Stokes-Helmholtz vector resolution theorem. The analytical solutions of each wave equation are given by the eigenfunctions and Laplace-transform. Finally, the stress results are presented for the case of plane and spherical shock waves.

KEY WORDS nonlinear geo-medium, dynamic response, Stokes-Helmholtz vector resolution theorem, plane shock waves, spherical shock waves