

冲击荷载作用下有限元方法 求解波动过程的精度研究

钱七虎 黄小平 唐德高 李志成

(南京工程兵工程学院 南京 210007)

摘要 研究了用动力有限元求解瞬态波动过程中产生的高频振荡和波形畸变的原因,提出了提高计算精度的有效方法及相应的确定单元尺寸及时间步长的方法。计算结果表明,作者提出的方法能有效地提高冲击荷载下波动问题求解精度。

关键词 冲击荷载 动力有限元 波动过程 精度

中国分类号 O 242.21

1 前言

研究常规武器的破坏作用、拆除爆破以及高速撞击等问题时,动力有限元是目前使用的最有效的方法之一。这一类问题的特点是荷载作用时间短(几分之一毫秒到几毫秒),输入荷载中包含有丰富的高频成分,因而在用动力有限元方法求解这一类瞬态波动过程时,会遇到一些特殊的困难。主要表现在:

(1)由于输入荷载波形(及其一阶导数)的间断特性而产生的系统动力响应的高频振荡,其中以加速度响应为最,速度响应次之。

(2)波在传播过程中所产生的波形畸变。

这两个基本问题都属于计算精度问题。

关于动力有限元问题的计算方法,以及相应的稳定性和精度分析,前人已作过大量的研究^{[1]~[5]}。文献[1]及[2]系统介绍了常用的几种直接积分方法,显式、隐式及隐显式混合积分格式的特点及适用性。归根到底,如果不考虑计算过程所带来的舍入误差以及由于网格尺寸不合适带来的刚度矩阵病态等问题,一种算法的稳定性与精度决定于:(1)积分格式与其中所用的参数;(2)时间步长;(3)计算对象所划分的网格尺寸。

多数文献中只叙述了关于算法稳定性及精度的一般性原理。对于瞬态冲击问题,由于输入荷载的波形与系统网格划分密切相关,如果不同时考虑荷载的频谱特性,在确定时间步长和网格划分时往往带有较大的盲目性。

求解波动过程常使用中心差分法或 Newmark 法,当采用 Newmark 平均加速度方法时,取 $\gamma=0.5, \delta=0.25$, 可得到最佳精度。但一些文献^{[4]:[5]}建议,为减少系统动力响应的振荡幅值,可使用带有算法阻尼的 Newmark 方法,取 $\gamma>0.5$ 。

对于冲击形荷载,高频分量的取舍控制了计算精度,引入过大的人工阻尼相当于无目标地滤去动力响应中的高频成分,因而是不可取的。

作者分析了有限元求解瞬态波动过程中产生高频振荡和波形畸变的原因,以及对计算精度的影响,提出了提高计算精度的若干有效方法及相应的确定时间步长与单元尺寸的步骤,并用实例进行说明。

2 冲击荷载作用下系统动力响应产生的高频振荡

所谓高频振荡是指在波的传播过程中介质质点速度及加速度波形绕某一基线的上下波动,而且这一波动频率位于波形频谱的“主瓣”之外。在所使用的计算参数及积分步长满足稳定性的条件下,这种振荡特性决定于输入荷载的频谱特性及系统所划分的网格尺寸。图1~图3示出了矩形脉冲、前峰锯齿形脉冲等两种具有典型间断特性的荷载波形及倒正弦脉冲荷载波形,在一维硬岩中传播时产生的速度响应的振荡现象,以及相应的振荡波形的傅里叶幅值谱。计算采用 Newmark 平均加速度方法($\gamma=0.5, \delta=0.25$),介质纵波速 $c_p=4000\text{m/sec}$,单元长度 0.1m (对应的有限元网格系统的最高自振频率为 12732Hz),时间步长取 $\Delta t=L/(8c_p)$, L 为单元长度,荷载作用时间 0.5ms 。

介质动力响应高频振荡的原因在于两个方面:

(1)对输入荷载波形进行离散采样所产生的吉布斯(Gibbs)现象。对于冲击荷载,输入作用时间 τ (即波通过某一点处的时间)相对于我们感兴趣的系统动力响应时间总是很短的。在计算时,每计算一步,对于输入荷载(连续波形)进行一次采样。设对荷载的采样点数为 n ,则输入波形的折叠频率为 $f_d=n/2\tau$ (Hz),输入荷载的频谱在 f_d 处被截断,即由于离散采样的结果。在实际使用的计算荷载中,高于 f_d 的频率分量已被舍去,因此对输入波形离散采样的结果已不能完全反映原输入波形(图4)。

显然,由于荷载作用时间 τ 为确定值,时间步长越大, n 越小,离散采样后,荷载波形的失真度也愈加严重。

(2)系统的有限高频响应。根据计算精度对时间步长的要求,应有 $\Delta t=[(1/20)-(1/10)]T_w^{[1]}$, T_w 为经有限元划分后系统的最小周期(亦即有限元网格的截止周期),或 $f_d=(5-10)f_w$, f_d 为荷载波形包含的最高频率, f_w 为系统的最高频率。由上式看到,为了保证计算精度,有限元网格的截止频率总是低于荷载波形的截止频率。在输入荷载作用下,初动过程之后,频率高于 f_w 的动力响应分量将逐渐消失,这就是系统的有限高频响应。

由以上分析,可知系统在瞬态荷载输入下的高频振荡的原因在于界面上的传播过程,输入波形中的高频分量损失,一是因为对输入波形离散采样,时间步长不可能无限小而引起,二是因计算系统的有限频响影响,即单元网格尺寸不能无限小而产生。

振荡频率:

设 $x(t)$ 与 $Z(\omega)$ 分别为单自由体系的位移时程及其傅氏幅值谱,则由微分定理有

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow Z(\omega) \\ V(t) = \dot{x}(t) &\longleftrightarrow j\omega Z(\omega) \\ A(t) = \ddot{x}(t) &\longleftrightarrow -\omega^2 Z(\omega) \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $V(t)$ 为质点速度; $A(t)$ 为质点加速度。

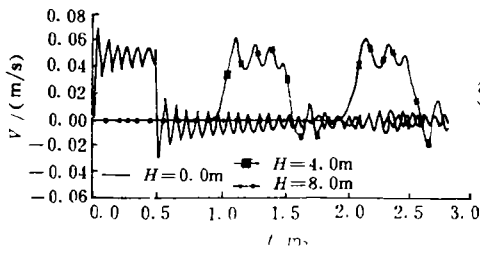


图 1(a) 矩形脉冲荷载作用下,一维硬岩在 $H=0.0, 4.0, 8.0$ m 处的速度响应比较

Fig. 1(a) Velocity responses in one dimensional hard rock at different depths of 0.0, 4.0, 8.0m under square impulse

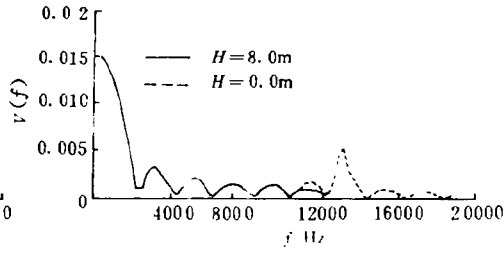


图 1(b) $H=0.0$ m 及 $H=8.0$ m 处速度响应傅里叶幅值谱比较 ($f_n=12732$ Hz)

Fig. 1(b) Comparison of the velocity spectra at the depths of 0.0m and 8.0m

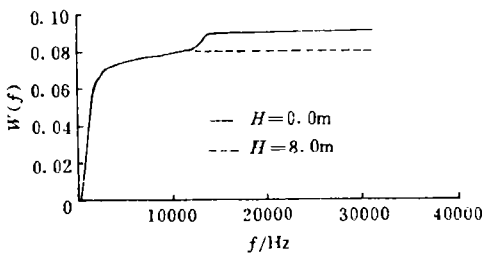


图 1(c) 与图 1(b)对应的谱功率比较
Fig. 1(c) Comparison of power integrations

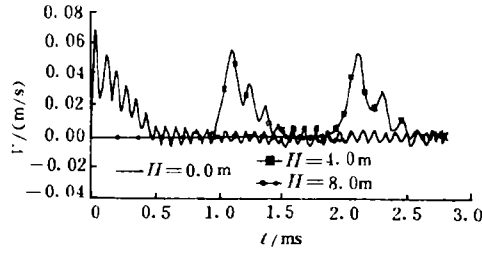


图 2(a) 前峰锯齿形脉冲荷载下一维硬岩在 $H=0.0, 4.0, 8.0$ m 处的速度响应比较
Fig. 2(a) Velocity responses in one dimensional hard rock at different depths of 0.0, 4.0, 8.0m under triangle impulse

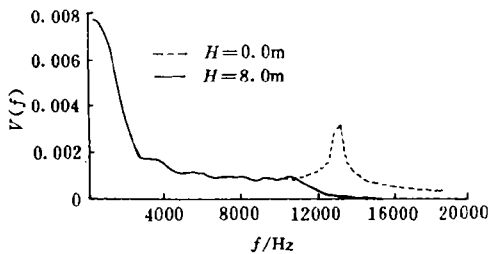


图 2(b) $H=0.0, 8.0$ m 处速度响应傅里叶幅值谱比较 ($f_n=12732$ Hz)

Fig. 2(b) Comparison of the velocity spectra at the depths of 0.0m and 8.0m

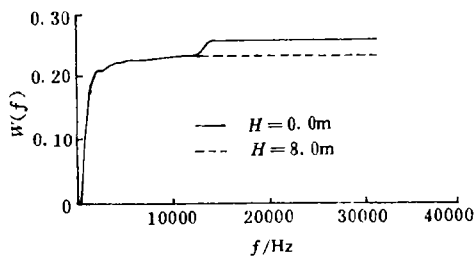


图 2(c) 与图 2(b)对应的谱功率比较
Fig. 2(c) Comparison of power integrations

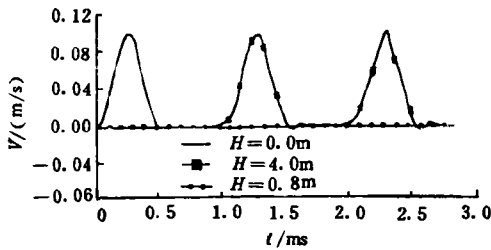
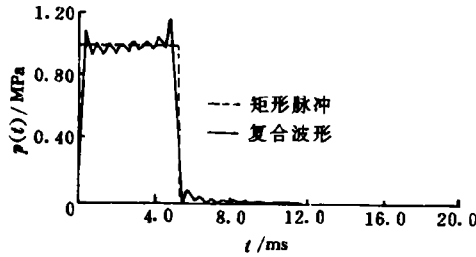


图3 倒正弦脉冲荷载下一维硬岩在 $H=0.0, 4.0, 8.0\text{m}$ 处的速度响应比较
Fig. 3 Velocity responses in one dimensional hard rock at different depths of $0.0, 4.0, 8.0\text{m}$ under inverse sine impulse



---Square impulse; —Compound Waveform
图4 矩形脉冲及取其有限个谐波分量合成波形的对比(Gibbs现象)(折叠频率 12732Hz)

Fig. 4 Comparison of square impulse and compounded waveform with finite frequency components

对多自由度系统,直接积分意味着对系统所有解耦合的单自由度体系用相同的时间步长求解动力平衡方程。当使用 Newmark 平均加速度方法时,波动过程中系统所有频率分量都不衰减(只有周期延长),但在波形主频谱(幅值谱的主瓣)以外速度响应与加速度响应的频率分量将由系统的最高频率所控制,主瓣以外的其它频率分量将被抑制。因此速度,尤其是加速度的振荡频率等于或接近于系统最高频率。在一维问题采用等长度单元且为集中质量矩阵的条件下,系统的最高频率为

$$f_{\max} = f_{\max}^* = c_p / \pi L' \quad (2)$$

式中: f_{\max}^* 为单元最高频率, c_p 为纵波速度, L' 为单元长。

图1中,前两种冲击荷载的振荡频率都等于 f_{\max}^* 。改变时间步长,振荡频率不变,在满足稳定性要求的条件下,振荡频率只决定于单元尺寸,与荷载波形和时间步长无关。

振荡幅值:

振荡幅值决定于输入荷载的谱特性。输入波形的间断性越强,其幅值谱的旁瓣幅值越大,则系统速度及加速度响应的振荡幅值也越大。例如,矩形脉冲的间断性最强,其幅值谱的旁瓣最大且衰减最慢,其振荡幅值也最大,以下依次为前峰锯齿脉冲,等腰三角形脉冲。倒正弦脉冲由于其频率分量主要集中于主瓣以内,旁瓣小,振荡幅值也最小(图3)。在频域范围内系统输入及响应的关系可表示为

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} Z_1(\omega) & & H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \cdots & H_{1n}(\omega) & F_1(\omega) \\ \{Z(\omega) = Z_2(\omega) = [H(\omega)] \cdot \{F(\omega)\} = & H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \cdots & H_{2n}(\omega) & F_2(\omega) \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ Z_n(\omega) & & H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) \cdots & H_{nn}(\omega) & F_n(\omega) \end{matrix} \\ & \{V(\omega)\} = j\omega[H(\omega)] \cdot \{F(\omega)\} \\ & \{A(\omega)\} = -\omega^2[H(\omega)] \cdot \{F(\omega)\} \end{aligned} \quad (3)$$

上式中: $\{Z(\omega)\}$ 、 $\{V(\omega)\}$ 、 $\{A(\omega)\}$ 分别为系统位移、速度、加速度响应的谱向量,对应于系统所有 n 个模态的动力响应, $\{F(\omega)\}$ 为输入波形的谱向量, $[H(\omega)]$ 为系统的频响函数矩

阵,前已指出,振荡频率等于系统最高频率 ω_n 。由式(3)则可看出,振荡幅值与 $F_n(\omega_n)$ 的值,即输入频谱中对应于 ω_n 的幅值有关。图5是取单元长度为0.21m和0.23m时,一维岩体表面速度响应波形的比较(矩形脉冲荷载),这两种单元长度所对应的系统截止频率分别为6063Hz及5535Hz。在输入波形幅值谱图上,它们对应的幅值比为1:2.25[见图6(b)],相应地,速度响应振荡幅值比为1:2.8。本例说明了减少振荡,在确定系统网格尺寸时对输入荷载频谱特性的依赖程度。当由网格尺寸确定的系统截止频率刚好对应于输入荷载幅值谱的“谷值”时,系统动力响应的振荡较小,反之亦然。本例中,单元长度变化了1/10,而振荡幅值增加到原来的三倍。

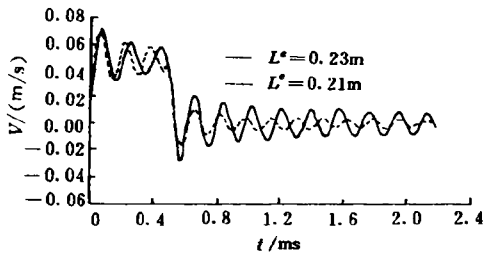
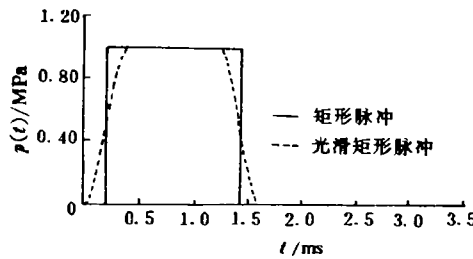


图 5 矩形脉冲下,单元长度为 0.21m 及 0.23m 时的速度响应比较
Fig. 5 Comparison of velocity responses of two finite element meshes with the element lengths of 0.21m and 0.23m



— Square impulse; --- Smoothed square impulse
图 6(a) 矩形脉冲及在间断处平滑处理后的矩形脉冲对比

$$f(t) = [1 - \cos(5\pi t/\tau)]/2, (0 \leq t \leq \tau/5)$$

$$f(t) = \{1 - \cos[5\pi(t-\tau)/\tau]\}/2, (\tau \leq t \leq 1.2\tau)$$

Fig. 6(a) Comparison of square impulse and smoothed square impulse

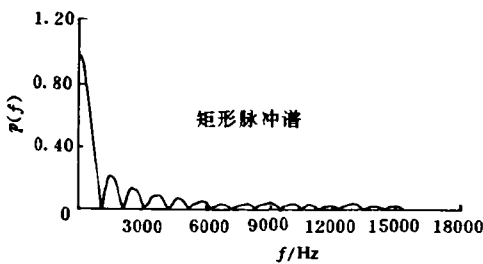
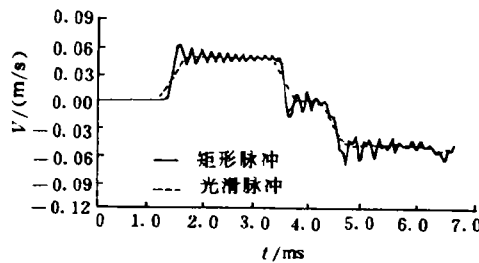


图 6(b) 矩形脉冲的傅氏幅值谱(荷载作用时间 $\tau=1.2\text{ms}$)
Fig. 6(b) Spectrum of square impulse



— Square impulse; --- Smoothed impulse
图 6(c) 图 6(a)中两种输入下速度响应比较
Fig. 6(c) Comparison of velocity responses under the two impulses shown in Fig. 6(a)

3 波在传播过程中的畸变

对于无阻尼一维弹性介质,波通过任一点处的应力时程或速度时程具有与输入荷载相似的波形。在冲击荷载下,由于有限元网格的滤波性质,由计算得到的速度(应力)波形在传播过程中将发生畸变。图1~图3也示出了三种典型的脉冲荷载在一维硬岩($\rho=2600\text{kg/m}^3$, $c=4000\text{m/sec}$)中传播时,不同深度处的计算速度波形。可以看到,间断特性最强的荷载波形,在传播过程中发生的畸变也最严重。在波形上表现为:

- (1)波形变得越来越光滑,升压时间及下降段变长,尖峰被“磨圆”;
- (2)波的最大值降低;
- (3)波的通过时间变长。

这说明,部分高频分量幅值在不断减小,直到被全部滤去,经过刚壁反射后,这种滤波过程还在进行。波形畸变必然导致波所携带的能量(功率)损失,从而影响计算精度。以速度波形为例,其功率可表达为:

$$W = \int_{t_1}^{\tau} \dot{V}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}^2(\omega) d\omega \quad (4)$$

式中:第一等式为能量积分,第二等式为 Parseval 等式; t_1 为波前到达时间; τ 为波通过的时间长度; $\dot{V}(t)$ 为速度时程; $\dot{V}(\omega)$ 为 $\dot{V}(t)$ 的傅氏幅值谱。

图1(b)及图2(b)是矩形脉冲波、前峰锯齿波在 $H=0.0\text{m}$ 处和 $H=8.0\text{m}$ 处速度波幅值谱。可以看出,在系统截断频率之前,在两个不同深度处的速度幅值谱图重合,当 $f > f_c$ 时, $H=8.0\text{m}$ 处的速度幅值谱接近于0,说明在 $H=8.0\text{m}$ 处波形中高于系统截止频率的谐波分量已被全部(或大部)滤去。

图1(c)用图2(c)是上述两种波在 $H=0.0\text{m}$, 8.0m 处的速度功率图。按(4)式在频域内积分求得,任一频率点 f_c 对应的纵坐标值表示波形中所有频率低于 f_c 的谐波分量所具有的功率之和。这两种波都具有强间断性质,因而有较大的功率损失,损失的功率都对应于频率高于系统截止频率的谐波成分。

几种脉冲波形中,以倒正弦脉冲最为“光滑”,因而几乎不发生波形的畸变,在传播过程中最大幅值保持不变,功率损失也很轻微(图3)。

4 提高计算精度的措施及确定单元尺寸的方法

从以上分析可以看到,对于冲击荷载作用下的波动问题,提高计算精度的关键在于克服波形畸变与高频振荡。波形畸变与高频振荡是由于在时空域内离散,导致输入波形高频分量损失的必然结果,并不是由于计算方法引入“额外”的“伪振荡”。振荡特性不仅反映了网格尺寸的合理程度,更与输入波形频谱特性有关,应将输入波形、单元尺寸、时间步长作为一个整体考虑。

实例与理论表明:将脉冲荷载波形简化成如矩形、三角形(包括锯齿形)、折线形那样由直线线段组成的形状,是为了获得解析解的需要,这样处理的结果,人为添加了输入波形的高频成份,加大了原有高频成分的幅值,真实的荷载波形总是比较光滑的。

就对荷载波形的量测技术而言,由于传感器的高频响应范围的限制,不可能量测到类

似于具有 0 升压时间或带有尖峰的波形。为了进行简化分析才把实测波形表达成具有间断点或具有一阶不连续导数的解析表达式。在进行数值计算时,这种简化不仅是多余的,也是不合理的。

鉴于上述理由,不仅可以,而且应该在计算之前,先对所提供的具有间断特性的荷载波形进行平滑处理。这相当于在计算前先行滤去荷载中的部分高频成分,可使用以下几种方法:

(1) 滑动滤波

滑动滤波是褶积滤波中最简单的一种。

设输入荷载为 $f(t)$, 离散采样后得荷载数列:

$$\{f(t)\} = [f(0), f(\Delta t), f(2\Delta t), \dots, f(n\Delta t)]^T \quad (5)$$

滑动滤波后得到新的荷载数列:

$$\{x(t)\} = [x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(n\Delta t)]^T \quad (6)$$

式中:

$$x(i\Delta t) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m f[(i+k)\Delta t] \quad (7)$$

滑动滤波能有效地改变荷载的间断特性,削去波形中的尖峰,当 n 足够大且 m 不太大时(例如 n 大于 128, $m \leq 30$)原荷载的冲量不变。

(2) 在间断附近用连续函数代替原波形(见例 1)。

(3) 对于作用时间特别短的脉冲,可根据冲量相等的原则,用频带宽、旁瓣小的函数代替原波形。例如用倒正弦脉冲代替三角形脉冲或半正弦脉冲,两种波形满足

$$\int \tau_1 f_1(t) dt = \int \tau_2 f_2(t) dt \quad (8)$$

当保持压力峰值不变时,可调整 τ_2 。当保持荷载作用时间时,可调整 $f_{2\max}$ 。对弹性系统,在两种情况下,都能保证系统位移响应不变。对弹塑性系统,则宜使 $f_{2\max} = f_{1\max}$ 。

确定时间步长及网格尺寸的原则:

(1) 对输入波形进行傅里叶分析,作出其幅值谱图。在谱图中选择网格系统的截断频率下限值 f_{∞} , 选择的原则是在频域截断后,保留频率成份所组成的波形仍能基本恢复原始波形。

当截止频率过高,导致单元尺寸太小,过多地增加计算费用时,或波形的幅值谱随频率增长。衰减不明显时(如矩形脉冲的谱图那样),就有必要对原始波形进行光滑处理,在得到新的波形谱图上确定系统的截断频率下限值 f_{∞} 。

(2) 以 f_{∞} 作为单元的最高频率,计算单元尺寸。

Irons 等已经证明,系统有限元网格的最高频率小于或等于网格中最小单元的最高频率,即

$$[f_{\infty}]_{\max} \leq [f_{\infty}]_{\max} \quad (9)$$

对于一维单元,上式等式成立。

因此当单元尺寸按 f_{∞} 计算时,仍不能保持系统实际截止频率高于或等于 f_{∞} , f_{∞} 只是其下限值。

(3) 时间步长

对于一维波动问题,当取等长度单元时,系统截止频率为

$$f_{\infty} = 2c_p/L^e \quad (10)$$

式中, c_p 为纵波波速。

时间步长按下式确定

$$\Delta t = \frac{1}{n} \cdot \frac{L^e}{c_p} \quad (11)$$

式中, n 为一维波通过长度为 L^e 的单元所用的时间步数。由此获得输入波形的采样频率为

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = \frac{nc_p}{L^e} \quad (12)$$

则波形折叠频率为

$$f_f = \frac{1}{2}f_s = \frac{nc_p}{2L^e} \quad (13)$$

波形折叠频率与系统截止频率之比为

$$f_f/f_{\infty} = n/4 \quad (14)$$

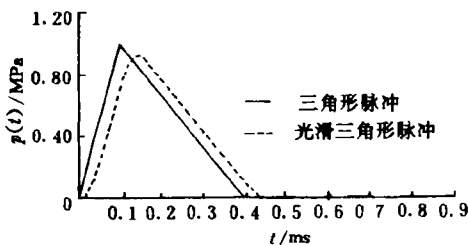
按上面所述,当系统截止频率 f_{∞} 确定之后,必须保证 $f_f \geq f_{\infty}$, 即 $n \geq 4$, 计算才是有意义的, 否则由于离散采样, 输入波形中就不包含频率低于 f_{∞} 的谱分量。

计算表明, 宜取 $n \geq 8$, 即输入波形的折叠频率为系统截止频率的两倍。

上述确定时间步长的原则也适用于二维及三维问题。

5 算例

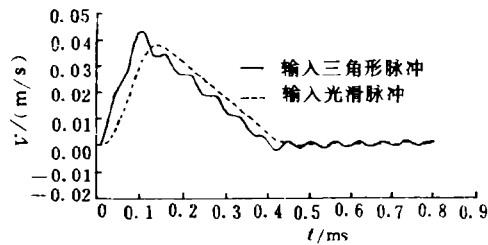
例 1, 矩形脉冲 用方法 2 在间断处平滑, 平滑前后的波形对比见图 6(a), 系统平滑处理前后的速度及加速度波形对比见图 6(c)。平滑处理后, 完全消除了动力响应的振荡特性, 获得了速度响应的精确解。



—Triangle impulse; ---Smoothed triangle impulse

图 7(a) 三角形脉冲及平滑处理后的三角形脉冲 ($\tau_{\text{升}} = 0.0937\text{ms}$, $\tau_{\text{降}} = 0.30025\text{ms}$)

Fig. 7(a) Comparison of triangle impulse and smoothed triangle impulse



—Triangle impulse; ---Smoothed impulse

图 7(b) 图 7(a) 中两种输入下速度响应比较

Fig. 7(b) Comparison of velocity responses under the two impulses shown in Fig. 7(a)

例 2, 三角形脉冲 用方法 1, 即滑动滤波法对波形平滑, 平滑后, 频谱特性大为改善, 但保留了原有波形的基本特征[图 7(a)], 图 7(b) 为系统速度响应比较, 振荡基本消除, 且获得更精确的解。

例3,三角形脉冲及半正弦脉冲等可根据冲量相等、脉冲最大幅值相等的原则,用倒正弦脉冲代替原三角形脉冲,计算结果可以完全消除畸变,避免功率损失。

6 结 论

(1)高频振荡与波形畸变是冲击荷载作用下影响波动有限元分析精度的两个基本现象,波形畸变导致波形所携带的能量减少。

(2)高频振荡与波形畸变的原因是输入波形中高频分量的损失,这是对输入波形离散采样和系统有限高频响应的结果。

(3)输入波形的频谱特征及网格尺寸决定系统的振荡特性,振荡频率等于或接近于系统截止频率,为提高计算精度,必须根据输入波形的频谱分布确定单元尺寸。

(4)对输入波形进行平滑处理,是提高冲击荷载作用下,波动有限元分析精度的有效途径,文中提出了三种实用的平滑处理方法,均可得到预期的效果。

(5)对于瞬态荷载下的波动有限元分析,确定单元尺寸及时间步长的次序是:

- i. 根据输入波形或平滑处理后的波形幅值谱图选择系统截止频率;
- ii. 由截止频率计算单元尺寸;
- iii. 由式(11)确定时间步长。

(6)本文以一维波动过程为例,但所述的改进计算精度方法也适用于二维或三维问题。

参 考 文 献

- 1 Bathe K J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982, 499~556
- 2 Belytschko T, Hughes T J K. Computational Methods for Transient Analysis. Elsevier Science Publishers, 1983, 1~155
- 3 巴 特 K J, 威尔逊 E L 著. 有限元分析中的数值法. 北京: 科学出版社, 1985, 308~363
- 4 方 秦, 陈志龙. 显式 Newmark 法求解波动问题精度探讨. 岩土工程学报, 1993, 1(2): 10~15
- 5 王勖成, 邵 敏. 有限元法基本原理与数值方法. 北京: 清华大学出版社, 1988, 312~389
- 6 应怀樵著. 波形和频谱分析与随机数据处理. 北京: 中国铁道出版社, 1985, 1~305
- 7 [英]纽兰 D E 著; 方 同, 等译. 随机分析与谱分析概论. 北京: 北京机械工业出版社, 1978, 55~84
- 8 孙 钧, 汪炳鉴编著. 地下结构有限元解析. 上海: 同济大学出版社, 1987, 358~386

A STUDY OF SOLUTION ACCURACY OF F. E. M. ON WAVE PROPAGATION PROBLEMS UNDER SHOCK LOADING

Qian Qihu, Huang Xiaoping, Tang Degao, Li Zhicheng

(*Nanjing Engineering Institute, Army Corps of Engineer, Nanjing, 210007*)

ABSTRACT F. E. M. (the finite element method) is the mostly adopted approach in solving wave propagation problems under shock loading. The factors which cause the high frequency oscillation of the system on dynamic responses are studied in this paper.

An effective way to reduce the oscillation amplitude, to avoid the power lose, the step for determining the finite element mesh as well as the time interval in direct integration are proposed.

Examples show that the solution accuracy of F. E. M. under shock loading are greatly improved by using the proposed method.

KEY WORDS shock load, dynamic F. E. M., wave propagation, accuracy