

激光辐照下有界圆厚板的热弹性弯曲响应分析^{*}

尹益辉 陈裕泽

(西南结构力学研究所 成都521信箱 610003)

摘要 考虑板弯曲运动的旋转惯性效应和剪切变形效应,建立了轴对称热能沉积作用下,边界固支或简支圆厚板的热弹性弯曲运动控制方程。利用数学变换和摄动法,导出了各种温度-力学边界条件下板的热弹性弯曲挠度及截面广义转角的解析公式。给出了在空间 Gauss 型分布激光束辐照下,板整体弯曲响应的代表性数值计算结果,直观显示了板弯曲挠度的时空变化规律。

关键词 激光辐照 圆厚板 热弯曲

中图分类号 O343.6

1 引言

激光辐照下结构的响应及失效,包括结构材料的局部热效应及相应的热损伤,结构整体的变形运动及其导致的整体响应及失效。对于板结构,前者包括板材的相变、裂纹、烧蚀成坑和洞穿,后者则是由板厚方向的温度梯度和平均温升所引起的板的整体变形运动及其结构强度或刚度失效。

近几年,在激光辐照下结构的整体响应及失效机理方面,国内外都进行了不少的研究。文献[1~5]通过理论、实验和有限元数值计算等方法,采用薄板模型,研究了圆板或方板在激光辐照下的弯曲变形规律及内力分布规律。文献[6]考虑板的旋转惯性和剪切变形的影响,分析了无界厚板在激光辐照下的弯曲波传播规律及面内热膨胀运动规律。总的说来,就板受激光辐照作用的整体响应及失效机理而言,无论在理论、实验和数值计算等方面都有一定程度的研究,但这些工作大多局限于薄板模型,局限于处理某种特定的温度与力学边界条件的问题。为了满足现代军事与民用工程日益发展的要求,对材料和结构特性的认识需要不断深入完善,因而针对各种温度和力学边界条件,研究受激光辐照作用板结构的响应问题也就势在必行。

本文在文献[2、6]的基础上,采用厚板模型,考虑板弯曲运动的旋转惯性和剪切变形的影响,从理论上分析了圆厚板在周边等温、绝热,简支、固支条件下,受激光辐照作用时的整体热弹性弯曲运动规律。通过典型算例,给出了这些规律的直观图象,得出了有关的规律性结论。

* 国家自然科学基金19132034和中国工程物理研究院科学基金资助项目。
1994年5月30日收到原稿,8月1日收到修改稿。

2 圆厚板的热弯曲响应解

2.1 轴对称热弯曲运动控制方程

研究如图 1 所示的圆厚板受空间轴对称分布热能沉积作用下的热弹性弯曲响应问题。这里,忽略材料物性常数随温度的变化。

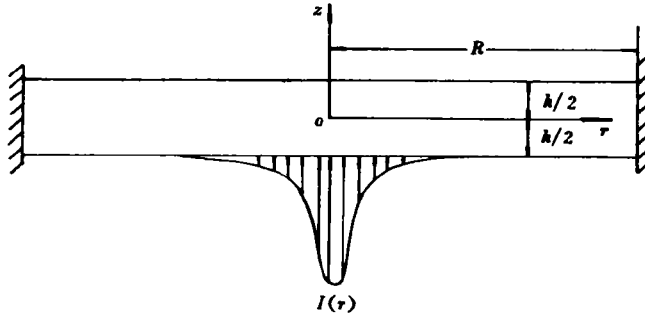


图 1 激光 Gauss 分布辐照板表面

Fig. 1 Gauss distribution of plate surface irradiated by laser

设板无初始变形和初始速度,周边受固支或简支约束条件,则从基本热弹性关系和小应变、小挠度 Timoshenko 板理论出发,导出极坐标中圆厚板的轴对称热弯曲运动控制方程为

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{Gh}{k_r} (\nabla^2 w + \frac{d\beta_r}{dr} + \frac{\beta_r}{r}) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{Gh}{k_r} (\beta_r + \frac{\partial w}{\partial r}) = D (\frac{\partial^2 \beta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_r}{\partial r} - \frac{\beta_r}{r^2}) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial t^2} - \frac{E\alpha_0}{1-\mu} \frac{\partial M_T}{\partial r} \\ & w(r, 0) = \frac{dw}{dt}(r, 0) = 0 \\ & \beta_r(r, 0) = \frac{d\beta_r}{dt}(r, 0) = 0 \\ & w(R, t) = \beta_r(R, t) = 0, \quad \text{当周边固支时} \\ & w(R, t) = [\frac{\partial \beta_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \beta_r - (1 + \mu)\alpha_0 \frac{12}{h^3} M_T]_{r=R} = 0, \text{当周边简支时} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

式中: E 、 G 分别是杨氏模量和剪切模量; μ 是泊松比; α_0 是线胀系数; D 、 J 分别是截面抗弯刚度和转动惯量; k_r 是反映剪切变形影响的量; ρ 为板材密度; h 、 R 分别是圆板厚度和半径; r 、 z 分别是径向和轴向坐标变量; t 是时间变量; w 、 β_r 分别是板的弯曲挠度和截面广义转角;而

$$M_T = \int_{-h/2}^{h/2} Tz dz, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

其中, T 是板内瞬态温度。

引入无因次参量和算子

$$\bar{r} = r/R, \quad \bar{t} = kt/\rho ch^2, \quad \bar{\alpha}_0 = \alpha_0 T_0,$$

$$\bar{w} = w/h, \quad \bar{M}_\tau = M_\tau/T_0 h^2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$$

其中: k, c 分别是板材的热传导系数和比热, T_0 是参考温度; 将式(1)用无因次变量表示为

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{h^2}{R^2} \nabla^2 \bar{w} + \frac{h}{R} \left(\frac{d\beta_r}{d\bar{r}} + \frac{\beta_r}{\bar{r}} \right) - \frac{k^2}{\rho c^2 h^2} \frac{k_r}{G} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = 0 \\ & \beta_r + \frac{h}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} = \frac{D}{R^2} \frac{k_r}{Gh} \left(\frac{\partial^2 \beta_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \beta_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\beta_r}{\bar{r}^2} \right) - \rho J \frac{k_r}{Gh} \left(\frac{k}{\rho ch^2} \right)^2 \frac{\partial^2 \beta_r}{\partial \bar{t}^2} - \frac{k_r}{Gh} \frac{E \bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \frac{h}{R} \frac{\partial \bar{M}_\tau}{\partial \bar{r}} \\ & \bar{w}(\bar{r}, 0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = \beta_r(\bar{r}, 0) = \frac{d\beta_r}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = 0 \\ & \bar{w}(1, \bar{t}) = \beta_r(1, \bar{t}) = 0, \quad \text{当周边固支时} \\ & \bar{w}(1, \bar{t}) = \left[\frac{\partial \beta_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\mu}{\bar{r}} \beta_r - 12(1 + \mu) \bar{\alpha}_0 \cdot \frac{R}{h} \bar{M}_\tau \right]_{\bar{r}=1} = 0, \quad \text{当周边简支时} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

2.2 弯曲变量的摄动法求解

用 Laplace 变换和有限 Hankel 变换法求解式(2), 并用摄动法处理周边约束的影响。首先令

$$\bar{w}^* = \int_0^\infty \bar{w}(\bar{t}) e^{-\tau \bar{t}} d\bar{t}, \quad \beta_r^* = \int_0^\infty \beta_r(\bar{t}) e^{-\tau \bar{t}} d\bar{t},$$

$$\tilde{\bar{w}} = \int_0^1 \bar{r} \bar{w}(\bar{r}) J_0(\bar{r} s_j) d\bar{r}, \quad \tilde{\beta}_r = \int_0^1 \bar{r} \beta_r(\bar{r}) J_1(\bar{r} s_j) d\bar{r}$$

因为, 在对应于周边等温或绝热的瞬态温度场 $T(r, z, t)$ 的表达式中^[2], s_j 分别是方程 $J_0(s_j) = 0$ 和 $J_1(s_j) = 0$ 的非负根, 所以, 弯曲变量的求解也需要针对不同的周边温度条件分别进行。这里, $J_0(s_j)$ 和 $J_1(s_j)$ 分别是零阶和一阶 Bessel 函数。

2.2.1 周边满足等温条件的解

对式(2)中第一个方程进行 Laplace 变换和零阶有限 Hankel 变换, 第二个方程进行 Laplace 变换和一阶有限 Hankel 变换, 注意到, 这里 s_j 是方程 $J_0(s_j) = 0$ 的正根, 整理后得到

$$\left\{ \begin{aligned} & \beta_r^* = \frac{\xi_1 \tau^2 + \zeta_1}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \left\{ \frac{E \bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \frac{\tilde{\bar{w}}}{s_j} + \varepsilon \cdot \frac{E h J_1(s_j)}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{d\beta_r^*}{d\tau} + \beta_r^* \right)_{\bar{r}=1} \right\} \\ & \tilde{\bar{w}}^* = \frac{\bar{s}_j G/k_r}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \left\{ \frac{E \bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \frac{\tilde{\bar{w}}}{s_j} + \varepsilon \cdot \frac{E h J_1(s_j)}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{d\beta_r^*}{d\tau} + \beta_r^* \right)_{\bar{r}=1} \right\} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

式中:

$$A = \rho J \left(\frac{k}{\rho ch^2} \right)^2 \frac{k^2}{\rho c^2 h^2}, \quad B = \frac{G \rho J}{k_r} \left(\frac{k}{\rho ch^2} \right)^2 \bar{s}_j^2 + \frac{Gh}{k_r} \frac{k^2}{\rho c^2 h^2} + \frac{k^2 D}{\rho c^2 h^4} \bar{s}_j^2,$$

$$C = \frac{G}{k_r} \frac{D}{h^2} \bar{s}_j^4, \quad \xi_1 = \frac{k^2}{\rho c^2 h^2}, \quad \zeta_1 = \frac{G}{k_r} \bar{s}_j^2, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{R^2}$$

这里, 已利用初值条件

$$\bar{w}(\bar{r}, 0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = \beta_r(\bar{r}, 0) = \frac{d\beta_r}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = 0$$

以及位移边值条件

$$\bar{w}(1, \bar{t}) = 0,$$

和等温边界条件

$$T(1, \bar{z}, \bar{t}) = [T(R, z, t) - T_0]/T_0 = 0$$

取 ε 为小参数, 令

$$\begin{aligned} \beta_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \beta_{rn}, & \bar{w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{w}_n \\ \beta_r^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \beta_{rn}^*, & \bar{w}^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{w}_n^* \\ \overset{1}{\beta}_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overset{1}{\beta}_{rn}, & \tilde{w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{w}_n \end{aligned}$$

在 Laplace 变换和 Hankel 变换象空间对式(3)进行摄动法求解, 得到象变量的各级摄动近似解, 然后进行相应的逆变换并求和, 最后得到

$$\begin{cases} \beta_r = 2 \sum_j \frac{J_1(\bar{r}s_j)}{[J_1(s_j)]^2} \left\{ \overset{1}{\beta}_{r0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{R}\right)^{2n} \cdot \overset{1}{\beta}_{rn} \right\} \\ \bar{w} = 2 \sum_j \frac{J_0(\bar{r}s_j)}{[J_0(s_j)]^2} \left\{ \tilde{w}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{R}\right)^{2n} \cdot \tilde{w}_n \right\} \end{cases} \quad (4)$$

式中, 对于周边固支情况, 有

$$\begin{cases} \overset{1}{\beta}_{r0} = \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \bar{s}_j \bar{M}_T \right\} \\ \overset{1}{\beta}_{rn} = \frac{EhJ_1(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2) \cdot 12(1 - \mu^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left(\frac{d\beta_{r,n-1}}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \\ \tilde{w}_0 = \frac{\bar{s}_j G/k_r}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \bar{s}_j \bar{M}_T \right\} \\ \tilde{w}_n = \frac{(G/k_r)Eh\bar{s}_j J_1(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2) \cdot 12(1 - \mu^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left(\frac{d\beta_{r,n-1}}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \end{cases} \quad (5)$$

对于周边简支情况, 有

$$\begin{cases} \overset{1}{\beta}_{r0} = \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \bar{s}_j \bar{M}_T \right\} \\ \overset{1}{\beta}_{rn} = - \frac{EhJ_1(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2) \cdot 12\mu(1 + \mu)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left(\frac{d\beta_{r,n-1}}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \\ \tilde{w}_0 = \frac{\bar{s}_j G/k_r}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \bar{s}_j \bar{M}_T \right\} \\ \tilde{w}_n = - \frac{(G/k_r)Eh\bar{s}_j J_1(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2) \cdot 12\mu(1 + \mu)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left(\frac{d\beta_{r,n-1}}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \end{cases} \quad (6)$$

而

$$\begin{aligned} \tau_a &= \tau_a(\bar{s}_j) = \left[\frac{B(\bar{s}_j) + \sqrt{B^2(\bar{s}_j) - 4AC(\bar{s}_j)}}{2A} \right]^{1/2} \\ \tau_b &= \tau_b(\bar{s}_j) = \left[\frac{B(\bar{s}_j) - \sqrt{B^2(\bar{s}_j) - 4AC(\bar{s}_j)}}{2A} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

结合式(4)、(5)、(6)可见, 当周边等温时, 固支和简支边界条件下板弯曲问题具有相

同的零级近似解 \bar{w}_0 和 $\beta_{r,0}$, 且它们仅由热载荷源引起, 不受边界约束的影响, 其量值与板材线膨胀系数密切相关。而以后各级近似解的摄动量, 都仅与前一级近似转角摄动量的梯度在边界上的值相关, 且固支边界条件和简支边界条件下的解, 二者偶数级近似摄动量的符号相同, 奇数级近似摄动量的符号相反, 其量值比为 $1/1-\mu : 1/\mu$ 。这一情况反映了固支条件和简支条件对摄动近似解的不同影响情况。

2.2.2 周边满足绝热条件的解

与等温边界条件下的求解一样, 对式(2)进行同样的数学变换。这里, 注意到 s_j 是方程 $J_1(s_j) = 0$ 的非负根, 整理后得到

$$\begin{cases} \bar{w}^* = \frac{\bar{s}_j G/k_r}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \cdot \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1-\mu} \bar{s}_j \bar{M}_r^* + \varepsilon \cdot \left\{ \frac{\xi_2 \tau^2 + \zeta_2}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \cdot \frac{G}{k_r} J_0(s_j) \left(\frac{d\bar{w}^*}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \right. \\ \quad \left. + \frac{\xi_3 \tau^2 + \zeta_3}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \cdot \frac{G}{k_r} J_0(s_j) \cdot \frac{R}{h} \beta_r^* \right\}_{r=1} \\ \beta_r^* = \frac{\xi_1 \tau^2 + \zeta_1}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \cdot \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1-\mu} \bar{s}_j \bar{M}_r^* + \varepsilon \cdot \left\{ \frac{(G/k_r)^2 \cdot h \bar{s}_j J_0(s_j)}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \left(\frac{d\bar{w}^*}{d\bar{r}} + \frac{R}{h} \beta_r^* \right)_{r=1} \right. \\ \quad \left. - \frac{\xi_1 \tau^2 + \zeta_1}{A\tau^4 + B\tau^2 + C} \cdot \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \bar{s}_j J_0(s_j) \cdot \frac{R}{h} \beta_r^* \right\}_{r=1} \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\xi_2 = \xi_3 = \rho J \left(\frac{k}{\rho c h^2} \right)^2$; $\zeta_2 = \frac{Gh}{k_r} + \frac{D}{h^2} \bar{s}_j^2$, $\zeta_3 = \frac{Gh}{k_r}$ 。

这里, 也已利用初值条件

$$\bar{w}(\bar{r}, 0) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = \beta_r(\bar{r}, 0) = \frac{d\beta_r}{d\bar{t}}(\bar{r}, 0) = 0$$

而位移边值条件都还保留在式(7)中。

同样, 在 Laplace 变换和 Hankel 变换象空间对式(7)进行摄动法求解, 然后进行相应逆变换及求和, 得到

$$\begin{cases} \beta_r = 2 \sum_j \frac{J_1(\bar{r}s_j)}{[J_1'(s_j)]^2} \left\{ \beta_{r,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{R} \right)^{2n} \beta_{r,n} \right\} \\ \bar{w} = 2 \sum_j \frac{J_0(\bar{r}s_j)}{[J_0'(s_j)]^2} \left\{ \bar{w}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{R} \right)^{2n} \cdot \bar{w}_n \right\} \end{cases} \quad (8)$$

式中, 当周边满足固支条件时, 有

$$\begin{cases} \beta_{r,0} = \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1-\mu} \bar{s}_j \bar{M}_r \right\} \\ \beta_{r,n} = \frac{(G/k_r)^2 h \bar{s}_j J_0(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left(\frac{d\bar{w}_{n-1}}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \\ \bar{w}_0 = \frac{\bar{s}_j G/k_r}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E\bar{\alpha}_0 h}{1-\mu} \bar{s}_j \bar{M}_r \right\} \\ \bar{w}_n = \frac{J_0(s_j) G/k_r}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_2 \tau_a^2 - \zeta_2}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_2 \tau_b^2 - \zeta_2}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left(\frac{d\bar{w}_{n-1}}{d\bar{r}} \right)_{r=1} \end{cases} \quad (9)$$

当周边满足简支条件时, 有

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{r0} &= \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E \bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \bar{s}_j \bar{M}_T \right\} \\
 &\quad - \frac{D}{h^2} \bar{s}_j J_0(s_j) \frac{1 + \mu}{\mu} \frac{12 \bar{\alpha}_0}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \bar{M}_T |_{r=1} \\
 &\quad + \left(\frac{G}{k_r} \right)^2 \frac{1 + \mu}{\mu} h \bar{s}_j J_0(s_j) \frac{12 \bar{\alpha}_0}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \bar{M}_T |_{r=1} \\
 \beta_{rn} &= \left(\frac{G}{k_r} \right)^2 \frac{h \bar{s}_j J_0(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left(\frac{d \bar{w}_{n-1}}{d \bar{r}} \right)_{r=1} \\
 &\quad + \frac{ER \bar{s}_j J_0(s_j)}{12 \mu (1 - \mu^2)} \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_1 \tau_a^2 - \zeta_1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_1 \tau_b^2 - \zeta_1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left(\frac{d \beta_{r,n-1}}{d \bar{r}} \right)_{r=1} \\
 &\quad - \left(\frac{G}{k_r} \right)^2 \cdot \frac{R}{\mu} \frac{\bar{s}_j J_0(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left(\frac{d \beta_{r,n-1}}{d \bar{r}} \right)_{r=1} \\
 \bar{w}_0 &= \frac{\bar{s}_j G / k_r}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{1}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} - \frac{1}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} \right\} * \left\{ \frac{E \bar{\alpha}_0 h}{1 - \mu} \bar{s}_j \bar{M}_T \right\} \\
 &\quad + \frac{G}{k_r} \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \frac{12 \bar{\alpha}_0 J_0(s_j)}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_3 \tau_a^2 - \zeta_3}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_3 \tau_b^2 - \zeta_3}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \bar{M}_T |_{r=1} \\
 \bar{w}_n &= \frac{G}{k_r} J_0(s_j) \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_2 \tau_a^2 - \zeta_2}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_2 \tau_b^2 - \zeta_2}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left(\frac{d \bar{w}_{n-1}}{d \bar{r}} \right)_{r=1} \\
 &\quad - \frac{G}{k_r} \frac{R}{\mu h} J_0(s_j) \frac{1}{A(\tau_a^2 - \tau_b^2)} \left\{ \frac{\xi_3 \tau_a^2 - \zeta_3}{\tau_a} \sin \tau_a \bar{t} - \frac{\xi_3 \tau_b^2 - \zeta_3}{\tau_b} \sin \tau_b \bar{t} \right\} * \left(\frac{d \beta_{r,n-1}}{d \bar{r}} \right)_{r=1}
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

结合式(8),比较式(9)和(10)可见,当周边满足绝热温度条件时,简支边界条件下的零级近似解不仅由热载荷源引起,而且也受到边界上温度矩的影响。若取周边上的温度矩为零,则这时的零级近似解就简化成固支边界条件下的零级近似解,即仅是由热载荷源引起,且可通过对简支边界条件下的相应解简化而得。在简支边界条件下,其它各级近似解的摄动量,不仅与边界处前一级近似挠度摄动量的梯度有关,而且也与转角摄动量的梯度有关;同样,若取其中各级近似的转角摄动量在边界处梯度为零,则其解也直接简化成为固支边界条件下的相应近似解。

综合分析比较式(4)~(10),可见,在各种温度和力学边界条件的解中,周边绝热、简支条件的解在结构及意义上具有一般性,其它边界条件下的解可认为是这一情况的解在结构及意义上的简化。如前所说,由式(8)和(10)给出的这一情况的各级近似解,不仅反映了热载荷源的作用,而且也反映了边界温度以及变形梯度的影响。即使零级近似解,其中也有含边界温度矩的项。而其它各种温度和力学边界条件下的解在结构上都要简单些,其零级近似解仅反映热载荷源的作用,与边界上的温度和力学条件无关。

3 典型算例及结果分析

3.1 问题描述

如图 1 所示,设圆板表面受到空间 Gauss 型分布、时间矩形分布的激光束辐照,即在文献[2]的温度场公式中,

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{T}_0 \exp(-\bar{r}^2/\bar{r}_0^2) [H(\bar{t}) - H(\bar{t} - \bar{t}_w)] \quad (11)$$

这里, \bar{T}_0 为无因次化的光斑中心光强; \bar{r}_0 为无因次化的光斑等效半径; \bar{t}_w 为无因次化的激光辐照时间。对于具体的温度-力学边界条件问题,将式(11)代入相应的板内温度场和板

的弯曲变量表达式,即得到可用于计算分析的解析公式。本文仅以在周边等温、固支条件下圆板的弯曲挠度为例进行数值计算和分析。

选取如下的材料参数和几何参数

$$\rho = 2.7, \quad k = 0.38, \quad c = 0.22, \quad E = 7 \times 10^{10},$$

$$\mu = 0.35, \quad \alpha_{s0} = \alpha_{s1} = 0, \quad \alpha_B = 100, \quad k_r = 1.2,$$

$$h = 2, \quad R = 10, \quad \bar{r}_0 = 0.1, \quad T_0 = 300^\circ \text{K}, \quad \bar{h}_0 = \bar{h}_1 = 0.001.$$

其中,所有未给单位的量均为 SI 标准单位;而 α_{s0} 、 α_{s1} 分别是板上下表面对激光的面吸收系数; α_B 是板对激光的体吸收系数; \bar{h}_0 、 \bar{h}_1 分别是板上下表面的无因次化 Biot 系数。注意到,对于激光束为空间 Gauss 型分布的情况,当 $\bar{r}_0 = r_0 : R = 0.1 \ll 1$, 且 t_w 不是很大时,圆板周界处截面转角的梯度将是一个相对微小量,这样,变量的零级近似解即能反映该变量的时空变化规律及基本量值。因此,下面仅就挠度的零级近似解进行计算和分析。

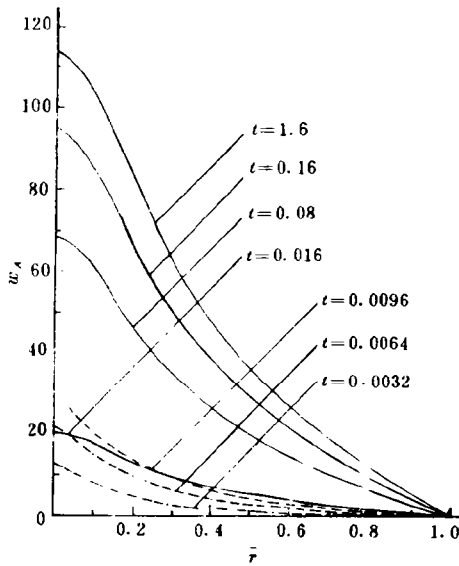


图 2 a 挠度-位置关系

Fig. 2 a Deflections vs distance

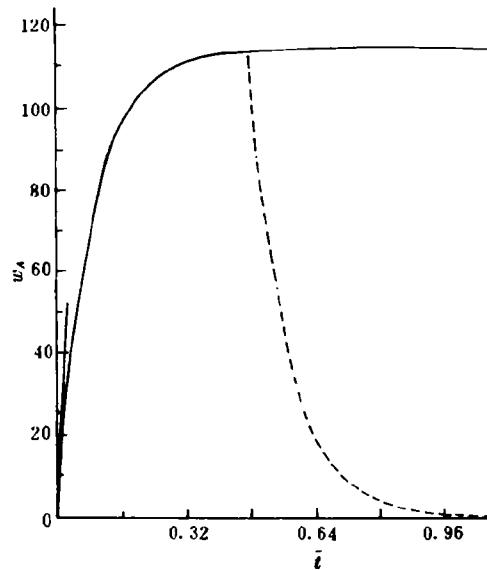


图 2 b 挠度-时间关系

Fig. 2 b Deflections vs time

图 2a 给出了在激光连续辐照下,几个代表性时刻板弯曲挠度的空间分布规律,其中,实线为本文的理论结果,虚线是对文献[1]中采用薄板模型的有限元计算结果进行与本文相同的无因次处理而得的相应结果。由于本文模型与文献[1]中的模型在材料特性及几何尺寸上均有差异,因而理论结果与有限元计算结果在量值上不能精确比较,但是,由图可见,二者显示出板弯曲挠度在空间分布上具有完全相同的规律。图 2b 给出了板中心挠度随时间的变化规律,其中,实线表示激光连续辐照作用的情况,虚线表示在 3 秒时刻停止辐照后板的变形不断恢复的情况,带“×”的曲线也是文献[1]中针对薄板的有限元计算结果,这里也作了同样的无因次处理。从图中可以看到,有限元计算曲线与理论计算曲线具有一致的变化规律,而所反映出的在板中心,薄板运动速率比厚板运动速率要大,这也是

合乎情理的。

4 小 结

作者导出的理论公式,对于各种温度-力学边界条件下弹性圆板的轴对称热弯曲问题均适用;在模型中,忽略了温度改变对材料性能的影响,这在温升不太大时得以允许。所得代表性的理论计算结果揭示了在激光辐照下圆厚板的整体热弹性弯曲运动规律,并通过比较表明,这些规律与文献中相关的有限元数值计算结果一致。

综合起来小结如下:

(1)导出了各种温度-力学边界条件下受轴对称激光束辐照作用圆厚板的轴对称热弹性弯曲挠度和截面广义转角的摄动解公式。

(2)针对激光束为空间 Gauss 型分布的典型情况,理论计算曲线直观给出了板弯曲运动规律,即在加热过程,板向光束来流方向凸出,初期,运动速率较大,在一定时间以后,速率很快变缓慢;在热卸载以后,板的变形不断恢复,其运动速率的变化与加热过程的情况一样。

(3)本文的理论结果和文献中相近的有限元计算结果在规律上取得一致。

参 考 文 献

- 1 Imbrie P, Allen D. AIAA-89-0181
- 2 Shen P I-W, Rosser. W A. AIAA-83-1720
- 3 Paramasiuam T, Reismann H. AIAA-85-0391
- 4 陈裕泽,尹益辉. 强激光与粒子束, 1992, 4(4): 605~611
- 5 周益春. 激光诱导反冲塞效应的实验与理论研究:[博士论文]. 北京:中国科学院力学研究所, 1994
- 6 尹益辉,陈裕泽. 爆炸与冲击, 1994, 14(2): 119~128
- 7 Sneddon I N, 著:何衍璇,等译. 富利叶变换. 北京:科学出版社, 1958, 94~104
- 8 曹志远. 板壳振动理论. 北京:中国铁道出版社, 1989, 198~208
- 9 Nowinski J L. Theory of Thermoelasticity with Application. Netherlands: Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1978, 407~446

ANALYSIS OF THERMOELASTICITY BENDING RESPONSE OF CIRCULAR THICK PLATE IRRADIATED BY LASER

Yin Yihui, Chen Yuze

(Southwest Institute of Structural Mechanics, P. O. Box 521, Chendu, 610003)

ABSTRACT The controlling equations of thermoelasticity bending motion of the clamped or simply supported circular thick plate with axially symmetric thermal deposit are found in consideration of the effects of rotary inertia and shearing deformation. With the help of mathematical transformation and perturbation methods, the expressions of deflection and rotating angle of the plate are obtained for various boundary conditions of temperature and mechanics. The typical nu-

merical calculated results of the whole bending response of the plate irradiated by Gauss distributed laser are given and the law of bending deflections vs time and space is shown directly.

KEY WORDS laser radiation, circular thick plate thermo-bending