

圆柱壳在侧向非对称冲击载荷 下的塑性动力屈曲

黄承义 郑际嘉 刘土光

(华中理工大学船海系 武汉 430074)

摘要 采用塑性动力屈曲能量准则,对圆柱壳非均匀局部径向冲击下的塑性动力屈曲进行了研究。文中分别采用弹性的角弹簧和位移弹簧模拟非屈曲部分对屈曲部分的影响,推导了有关模态和临界速度的冲击公式,并与有关的实验结果进行了比较,分析了两种边界对塑性动力屈曲的影响。

关键词 塑性动力屈曲 圆柱壳 冲击载荷 弹性约束

中图分类号 O347.3

1 引言

自60年代起,圆柱壳在径向冲击载荷作用下的塑性动力屈曲问题引起了许多学者的兴趣,对其进行了较为广泛深入的研究^[1]。在现有的文献中,对圆柱壳承受均匀径向冲击载荷作用下的塑性动力屈曲研究较多,对圆柱壳承受非均匀局部径向冲击载荷作用下的塑性动力屈曲的研究不多。最近,顾王明^[2]采用塑性动力屈曲能量准则^[3]。对圆柱壳非均匀局部径向冲击下的塑性动力屈曲进行了初步的研究,理论计算与实验结果基本吻合,得到了一些有意义的结论。但文献[2]中所采用的局部动力塑性屈曲的计算模型过于简单,完全忽略了圆柱壳中未屈曲部分对屈曲部分的影响。本文对该计算模型进行了改进,将圆柱壳中非加载部分对加载屈曲部分的影响分别采用弹性的角弹簧和位移弹簧加以模拟,以期达到近似反映圆柱壳整体塑性动力屈曲响应的目的。计算结果表明,本文的计算值与有关的实验值更为吻合,同时通过比较这两种不同的弹簧对局部塑性动力屈曲的影响发现,位移弹簧的影响要大一些,而且与实验结果更为相符。

2 理论分析方法

2.1 基本假设与控制方程

在具体分析中,假设

- (1)材料为刚线性强化,且由强化引起的应力增量与初始屈服应力相比较小;
- (2)壳体的塑性变形较小,并恒为压应力;
- (3)塑性变形 $\omega_0(\theta, t)$, 大于屈曲变形 $\tilde{\omega}(\theta, t)$, 同时不考虑应变率反号;
- (4)局部屈曲塑性变形以外的部分仍属弹性变形。

1994年4月13日收到原稿,8月9日收到修改稿。

根据上述假设,取图 1 所示圆环的屈曲变形段为研究对象,则塑性变形方程为

$$\frac{E_s I}{r_0^3} \left[\frac{\partial^4 \omega_0}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \theta^2} \right] + s \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \theta^2} + \omega_0 \right) \right] = -m \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial t^2} \quad (1)$$

屈曲控制方程为

$$f(q, \tilde{\omega}) = \frac{E_s I}{r_0^3} \left[\frac{\partial^4 \tilde{\omega}}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} \right] + \frac{s}{r_0^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} + \tilde{\omega} \right] + m \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

式中: $I = h_0^3/12, m = \rho h_0, s = \bar{\sigma} h$, 其中 $\bar{\sigma}$ 为 $\theta_1/2$ 处最终塑性应变 $\bar{\epsilon}$ 所对应的应力。

2.2 塑性动屈曲的能量解法

根据文献[3]中的能量准则,不发动屈曲的充分条件为

$$F(q, \tilde{\omega}) = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \int_0^{t_f} f(q, \tilde{\omega}) \dot{\tilde{\omega}} dt d\theta > 0 \quad (3)$$

其中: $f(q, \tilde{\omega})$ 为屈曲控制方程(2); t_f 为结构响应时间; $\dot{\tilde{\omega}} = \partial \tilde{\omega} / \partial t$ 是屈曲位移速度; q 是载荷参数。

2.3 塑性动屈曲的计算力学模型

根据有关的实验结果^[1],圆柱壳在局部非均匀径向冲击下的壳体变形如图 1 所示。在 $[-\theta, \theta_1]$ 范围内圆柱壳发生塑性变形,其余部分的形状保持不变,可认为是弹性变形。故在圆柱壳的塑性动屈曲过程中,将弹性变形部分对塑性变形部分的影响分别简化为如图 2(a) 以及图 3(a) 所示的弹性的角弹簧和位移弹簧,它们的刚度系数可分别由图 2(b) 及图 3(b) 求得。

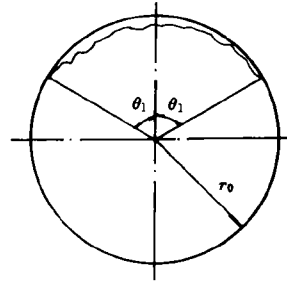


图 1 壳体变形图
Fig. 1 Profile of deformed cylindrical shell

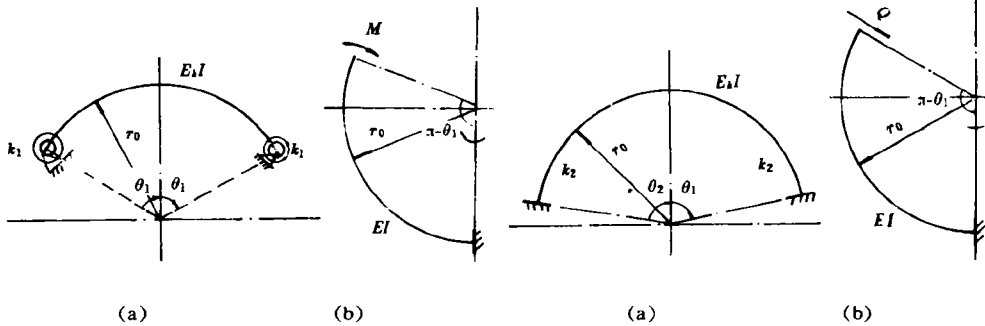


图 2 有转角边界条件影响的圆柱壳局部塑性动屈曲计算模型

Fig. 2 The calculating model of local plastic dynamic buckling of a cylindrical shell influenced by rotational boundary.

图 3 有位移边界条件影响的圆柱壳局部塑性动屈曲计算模型

Fig. 3 The calculating model of local plastic dynamic buckling of a cylindrical shell influenced by displaced boundary.

3 屈曲模态数及临界冲击速度与冲击强度

根据前述的两种力学计算模型,分别对它们进行屈曲模态数及临界冲击速度与冲击强度的计算。

3.1 考虑转角影响的塑性动屈曲模态数计算

由图2(a),其边界条件为

$$\tilde{\omega}(\theta, t)|_{\theta=\pm\theta} = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} + B^2 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta}\right)|_{\theta=\pm\theta_1} = 0 \quad (5)$$

其中, $B^2 = E/E_1(\pi - \theta_1)$ 。

取满足(4)式的 $\tilde{\omega}$ 为

$$\tilde{\omega} = e^{\mu} \left[c_1 \sin \frac{2n\pi\theta}{\theta_1} + c_2 (1 - \cos \frac{2n\pi\theta}{\theta_1}) \right]$$

代入(5)式得

$$\tilde{\omega} = e^{\mu} \left[-\frac{1}{B^2} \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right) \sin \frac{2n\pi\theta}{\theta_1} + (1 - \cos \frac{2n\pi\theta}{\theta_1}) \right] \quad (6)$$

则(6)式为满足(4)、(5)式的屈曲函数表达式。将其代入(3)式,利用分步积分,注意到 $\dot{\tilde{\omega}} = \tilde{p}\omega$, $\ddot{\tilde{\omega}} = \tilde{p}\dot{\tilde{\omega}}$, 并利用不等式

$$\int_0^{t_f} \dot{\tilde{\omega}} dt \geq \frac{1}{t_f} [\tilde{\omega}(t_f) - \tilde{\omega}(0)]^2$$

则得

$$F(q, \tilde{\omega}) \geq \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \frac{E_1 h_0^3}{24r_0^4} (\tilde{\omega}^{\prime 2} - \tilde{\omega}^2) d\theta + \frac{s}{2r_0^2} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} (\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^{\prime 2}) d\theta + \frac{m\tilde{p}}{t_f} \cdot \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \tilde{\omega}^2 d\theta$$

上式中, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}^{\prime 2}$ 均为 $t=t_f$ 时刻的值, $t=0$ 时刻的 $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}^{\prime 2}$ 则根据能量准则偏离的两个性质予以忽略。

将 $\tilde{\omega}$ 及其各阶导数代入上式, 得出不发生屈曲的条件式为

$$\begin{aligned} \frac{E_1 h_0^3}{24r_0^2} \left[\frac{1}{B^4} \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right)^6 + \left(1 - \frac{1}{B^4}\right) \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right)^4 - \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right)^2 \right] + \frac{s}{2r_0^2} \left[3 + \left(\frac{1}{B^4} - 1\right) \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right)^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{B^4} \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right)^4 \right] + \frac{m\tilde{p}}{t_f} \left[\frac{1}{B^4} \left(\frac{2n\pi}{\theta_1}\right)^2 + 3 \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

在(7)式中令 $x = (2n\pi/\theta_1)^4$, 并对其求导, 得屈曲波数方程为

$$\begin{aligned} \frac{E_1 h_0^3}{24r_0^2} \left[\frac{1}{B^4} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{B^4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] + \frac{s}{2r_0^2} \left[\left(\frac{1}{B^4} - 1\right) \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{B^4} \right] + \frac{m\tilde{p}}{t_f} \cdot \frac{1}{B^4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

通常 $x = (2n\pi/\theta_1)^4 \gg 1$, 忽略小量简化求解(8)式得

$$x^{1/2} = (2n\pi/\theta_1)^2 \doteq 8r_0^2 s / E_1 h_0^3 \quad (9)$$

将(9)式代入(7)式, 注意到 $(2n\pi/\theta_1) \gg 1$, 忽略小量得

$$\frac{p}{t_f} = \frac{4}{3} \cdot \frac{s^2}{E_s \rho h_0^3} / [1 + 2 / (1 + \frac{1}{B^4} \cdot \frac{8r_0^2 s}{E_s h_0^3})] \quad (10)$$

将屈曲控制方程(2)对 θ 求导两次,并将(6)式代入,由 $\sin \frac{2n\pi}{\theta_1} \theta, \cos \frac{2n\pi}{\theta_1} \theta$ 的任意性,令其系数为零,得如下方程

$$\frac{E_s h_0^3}{12r_0^4} [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^4 - (\frac{2n\pi}{\theta_1})^2] + \frac{s}{r_0^2} [- (\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + 1] + \rho h_0 p^2 = 0$$

将(9)式代入上式,忽略小量得

$$p^2 = 8s^2 / 3E_s \rho h_0^4$$

将上式代入(10)式则有

$$\frac{1}{t_f^2} = \frac{2}{3} s^2 / E_s \rho h_0^3 [1 + 2 / (1 + \frac{1}{B^4} \cdot \frac{8r_0^2 s}{E_s h_0^3})]^2 \quad (11)$$

3.2 考虑位移影响的塑性动屈曲模态数计算

由图3(a)所示的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} |_{\theta=\pm\theta_1} = 0 \\ (\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} + b^2 \tilde{\omega}) |_{\theta=\pm\theta_1} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

取满足 $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} |_{\theta=\pm\theta_1} = 0$ 的 $\tilde{\omega}$ 表达式为

$$\tilde{\omega} = e^{\mu} [c_1 \cos \frac{2n\pi}{\theta_1} \theta + c_2 (\frac{2n\pi}{\theta_1} |\theta| - \sin \frac{2n\pi}{\theta_1} \theta)]$$

则满足(12)式的 $\tilde{\omega}$ 取为

$$\tilde{\omega}(\theta, t) = e^{\mu} \{ (\frac{2n\pi}{\theta_1} |\theta| - \sin \frac{2n\pi}{\theta_1} \theta - \frac{1}{b^2} [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^3 + b^2 \theta_1 (\frac{2n\pi}{\theta_1})] \cos \frac{2n\pi}{\theta_1} \theta \}$$

其中, $b^2 = r_0^3 k_2 / E_s I = E / E_s [\frac{1}{2} (\pi - \theta_1) - \frac{1}{4} \sin 2\theta_1]$.

采用与上一节完全一样的步骤,得到不发生屈曲的条件式为

$$\begin{aligned} & \frac{E_s h_0^3}{24r_0^4} \{ (\frac{2n\pi}{\theta_1})^4 + \frac{1}{b^4} (\frac{2n\pi}{\theta_1})^6 [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + b^2 \theta_1]^2 - 3(\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 - \frac{1}{b^4} (\frac{2n\pi}{\theta_1})^4 \\ & \times [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + b^2 \theta_1]^2 \} + \frac{s}{2r_0^2} \{ \frac{2}{3} \theta_1^2 (\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + 1 + \frac{1}{b^4} [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^3 + b^2 \theta_1 (\frac{2n\pi}{\theta_1})]^2 - 3(\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 \\ & - \frac{1}{b^4} (\frac{2n\pi}{\theta_1})^4 [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + b^2 \theta_1]^2 \} + \frac{mp}{t_f} \{ \frac{2}{3} \theta_1^2 (\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + 1 + \frac{1}{b^4} (\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 \\ & \times [(\frac{2n\pi}{\theta_1})^2 + b^2 \theta_1]^2 \} \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

在(13)式中,对 $x = (2n\pi/\theta_1)^2$ 求导,注意到 $(2n\pi/\theta_1)^2 \gg 1$,忽略 x 的低阶量得关于 x 的二次方程.求解此二次方程,略去一负根,得

$$x = (2n\pi/\theta_1)^2 = 48r_0^2 s / 5E_s h_0^3 \quad (14)$$

塑性屈曲运动的终止时间 t_f 为

$$1/t_f^2 = 216s^2 / 625E_s \rho h_0^4 \quad (15)$$

3.3 有转角边界的临界冲击速度与冲击强度计算

由塑性变形方程(1), 令 $\omega_0(\theta, t) = R(\theta)T(t)$, 其齐次方程为

$$R'' + D_4 R' + \lambda R = 0 \quad (16)$$

其中: λ 为待求常数, $D_4 = D_1/D$, $D = E_1 h_0^3 / 12 r_0^4$, $D_1 = E_1 h_0^3 / 12 r_0^4 + (s/r_0^2)$ 。

由(16)式对应的特征方程的根为

$$r^2 = [-D_4 \pm \sqrt{D_4^2 - 4\lambda}] / 2$$

对于本文研究的塑性动力屈曲问题, λ 应小于零, 则(16)式的通解为

$$R(\theta) = C_1 \text{ch} \alpha_1 \theta + C_2 \text{sh} \alpha_1 \theta + C_3 \cos \alpha_2 \theta + C_4 \sin \alpha_2 \theta \quad (17)$$

根据 $R(\theta)$ 的定解条件, 由(4)、(5)两式得

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \text{th} \alpha_1 \theta_1 \text{tg} \alpha_2 \theta_1 - B^4 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \text{th} \alpha_1 \theta_1 \text{tg} \alpha_2 \theta_1 + B^4 \alpha_1 \alpha_2 [(\text{th} \alpha_1 \theta_1)^2 - (\text{tg} \alpha_2 \theta_1)^2] = 0$$

$$\text{其中, } \alpha_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{D_4^2 - 4\lambda} - D_4}}{2} > 0; \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{D_4^2 - 4\lambda} + D_4}}{2}; \quad \alpha_2^2 = \alpha_1^2 + D_4. \quad (18)$$

令 $y = \alpha_1 \theta_1$, 并注意到(18)式, 得如下超越方程

$$(2y^2 + D_4 \theta_1^2)^2 \text{th} y \text{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2} + B^4 D_4 \text{th} y \text{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2} + B^4 \theta_1^2 y \cdot \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2} [(\text{th} y)^2 - (\text{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2})^2] = 0 \quad (19)$$

采用弦截法, 并依据后面所列参数得 y 的前三个根为: $y_1 = 9.414$, $y_2 = 13.78$, $y_3 = 20.17$, 则 α_1 对应的前三个根为: 8.99, 13.16, 19.28; α_2 对应的前三个根为 30.01, 31.5, 34.52。

由(17)式及 $R(\theta)$ 的定解条件(4)、(5)式得

$$\begin{cases} C_{1n} = -\frac{\cos \alpha_{2n} \theta_1}{\text{ch} \alpha_{1n} \theta_1}, & C_{2n} = \frac{B^2 [a_{1n} \cos \alpha_{2n} \theta_1 \text{th} \alpha_{1n} \theta_1 + a_{2n} \sin \alpha_{2n} \theta_1]}{(\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2) \text{sh} \alpha_{1n} \theta_1} \\ C_{3n} = 1, & C_{4n} = \frac{B^2 [a_{1n} \text{th} \alpha_{1n} \theta_1 \text{ctg} \alpha_{2n} \theta_1 + a_{2n}]}{\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2} \end{cases}$$

设 $\omega_0(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\theta) A_n(t)$, 代入(1)式, 注意到(16)式, 在方程两边同乘 $R_k(\theta)$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_2}{D} - \lambda_n \right) \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_k(\theta) R_n(\theta) A_n(t) d\theta + \frac{m}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_n(\theta) R_k(\theta) \ddot{A}_n(t) d\theta \\ = \frac{D_3}{D} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_k(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $D_2 = s/r_0^2$, $D_3 = -s/r_0$ 。

由 $R_n(\theta)$, $R_k(\theta)$ 的正交条件

$$\begin{cases} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_n(\theta) R_k(\theta) d\theta = 0, & k \neq n \\ \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_n(\theta) R_k(\theta) d\theta = M_n, & k = n \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
 M_n &= C_{1n}^2 \left[\frac{1}{2\alpha_{1n}} \operatorname{sh} 2\alpha_{1n} \theta_1 + \theta_1 \right] + C_{2n} \left[\frac{1}{2\alpha_{1n}} \operatorname{sh} 2\alpha_{1n} \theta_1 - \theta_1 \right] \\
 &+ \left[\theta_1 + \frac{1}{2\alpha_{2n}} \sin 2\alpha_{2n} \theta_1 \right] + C_{2n}^2 \left[\theta_1 - \frac{1}{2\alpha_{2n}} \sin 2\alpha_{2n} \theta_1 \right] \\
 &+ 2C_{1n} \left[\frac{2\alpha_{1n}}{\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2} \cos \alpha_{2n} \theta_1 \operatorname{sh} \alpha_{1n} \theta_1 + \frac{2\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2} \sin \alpha_{2n} \theta_1 \operatorname{ch} \alpha_{1n} \theta_1 \right] \\
 &+ 2C_{2n} C_{4n} \left[\frac{2\alpha_{1n}}{\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2} \sin \alpha_{2n} \theta_1 \operatorname{ch} \alpha_{1n} \theta_1 - \frac{2\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2} \cos \alpha_{2n} \theta_1 \operatorname{sh} \alpha_{1n} \theta_1 \right]
 \end{aligned}$$

令

$$Q_n = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_n(\theta) d\theta = \frac{2}{\alpha_{1n}} C_{1n} \operatorname{sh} \alpha_{1n} \theta_1 + \frac{2}{\alpha_{2n}} \sin \alpha_{2n} \theta_1 \quad (21)$$

则将(20)式化为

$$\ddot{A}_n(t) + d_n^2 A_n(t) = \frac{D}{m} \frac{Q_n}{M_n} \quad (22)$$

式中：

$$d_n^2 = \frac{D}{m} \left(\frac{D_2}{D} - \lambda_n \right) \quad (23)$$

则(22)式在如下初始条件的约束下，

$$\begin{cases} A_n(0) = 0 \\ \dot{A}_n(0) = \frac{1}{M_n} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} R_n(\theta) v(\theta) d\theta \end{cases} \quad (24)$$

其解为

$$\begin{aligned}
 A_n(t) &= -\frac{D}{m} \frac{Q_n}{M_n} \frac{1}{d_n^2} \cos d_n t + \frac{\dot{A}_n(0)}{d_n} \\
 &\times \sin d_n t + \frac{D}{m} \frac{\theta_n}{M_n} \frac{1}{d_n^2}
 \end{aligned}$$

类似文献[1]，设初速度为

$$v(\theta) = v_0 \cos \theta \quad (25)$$

将(25)式代入(24)式积分后得

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_n(0) &= \frac{v_0}{M_n} \dot{A}_n^*(0) = \frac{v_0}{M_0} \left\{ C_{1n} \left[\frac{2\alpha_{1n}}{1 + \alpha_{2n}^2} \cos \theta_1 \operatorname{sh} \alpha_{1n} \theta_1 \right. \right. \\
 &+ \frac{2}{1 + \alpha_{2n}^2} \sin \theta_1 \operatorname{ch} \alpha_{1n} \theta_1 + \frac{\sin(1 - \alpha_{2n}) \theta_1}{1 - \alpha_{2n}} \\
 &\left. \left. + \frac{\sin(1 + \alpha_{2n}) \theta_1}{1 + \alpha_{2n}} \right] \right\} \quad (26)
 \end{aligned}$$

因此塑性内凹变形 $\omega_0(\theta, t)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}
 \omega_0(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \operatorname{ch} \alpha_{1n} \theta + C_{2n} \operatorname{sh} \alpha_{1n} \theta + \cos \alpha_{2n} \theta + C_{4n} \sin \alpha_{2n} \theta) \\
 &\times \frac{1}{M_n d_n} \left[\frac{D_3}{m} \frac{Q_n}{d_n} (1 - \cos d_n t) + v_0 \dot{A}_n^*(0) \sin d_n t \right]
 \end{aligned}$$

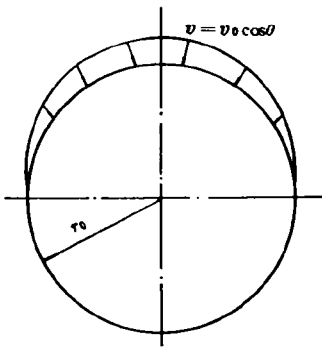


图4 初速度分布图

Fig. 4 Initial velocity distribution

容易验证,对于常见的壳体参数, $\omega_0(\theta, t)$ 级数表达式中第一项是主导项(其幅值比第二项大10倍以上)。为简化计算,近似取一项,由 $\dot{\omega}_0(\theta_1, t_f) = 0$,得

$$\operatorname{tg} d_1 t_f = -\frac{m}{D_3} \frac{A_1^*(0)}{\theta_1} d_1 v_0 \quad (27)$$

由(11)式可得 t_f 的值代入(27)式,即得临界速度 v_0 的值。临界冲击强度 I 由下式得

$$I = \rho h_0 v_0 \quad (28)$$

3.4 有位移边界的临界冲击速度与冲击强度计算

采用与上一节完全相同的步骤,可得满足边界条件(12)式的超越方程为

$$\begin{aligned} & y^2 (y^2 + D_4 \theta_1^2)^{3/2} (2y^2 + D_4 \theta_1^2)^2 (\operatorname{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2}) \operatorname{th} y + b^4 \theta_1^4 [- (y^2 + D_4 \theta_1^2)^{3/2} \\ & \times \operatorname{th} y \operatorname{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2} - y^3 \operatorname{th}^2 y + y (y^2 + D_4 \theta_1^2) (\operatorname{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2})^2 \\ & + y^2 \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2} \times \operatorname{th} y \operatorname{tg} \sqrt{y^2 + D_4 \theta_1^2}] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $y = \alpha_1 \theta_1$ 。

则此超越方程的前三个根为: $y_1 = 0.45, y_2 = 9.415, y_3 = 13.78$,对应的 α_1 的前三个根为:0.43, 8.99, 13.16, 对应 α_2 的前三个根为:28.64, 30.01, 31.5。

这里我们可以发现一个有趣的现象,由(29)式得到的后两个根与(19)式得到的前两个根完全一致。这说明,位移边界条件主要影响 $\omega_0(\theta, t)$ 级数中的第一项,而对 $\omega_0(\theta, t)$ 级数中其余项影响较小。因此我们可以认为,在我们所考虑的位移边界中同时也部分包含有转角边界影响的变形模式。

在定解条件(12)式约束下,(17)式各系数为

$$\begin{cases} C_{1a} = \frac{a_{2a} \sin a_{2a} \theta_1}{a_{1a} \operatorname{sh} a_{1a} \theta_1}, & C_{2a} = \frac{-b^2 \operatorname{ctg} a_{2a} \theta_1 (\frac{a_{2a}}{a_{1a}} \operatorname{cth} a_{1a} \theta_1 \sin a_{2a} \theta_1 + \cos a_{2a} \theta_1)}{a_{1a} (\alpha_{1a}^2 + \alpha_{2a}^2) \operatorname{ch} a_{1a} \theta_1} \\ C_{3a} = 1, & C_{4a} = \frac{b^2 (\frac{a_{2a}}{a_{1a}} \operatorname{cth} a_{1a} \theta_1 \sin a_{2a} \theta_1 + \cos a_{2a} \theta_1)}{a_{2a} (\alpha_{1a}^2 + \alpha_{2a}^2) \sin a_{2a} \theta_1} \end{cases}$$

则由(21)(24)式可求得 $Q_1, A_1^*(0)$,由(15)及(23)式可得 t_f, d_1 的值。再由(27),(28)式求得临界冲击速度 v_0 及临界冲击强度 I 。

4 算例与讨论

为便于同有关实验结果文献[1]及计算结果文献[2]进行比较,取与之相同的参数:

$r_0/h_0 = 24, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3, E_s = 2275 \text{ MPa}, E = 69 \text{ GPa}, h_0 = 3.2 \text{ mm}, \bar{\sigma} = 270 \text{ MPa}, \theta_1 = \pi/3$ 。

将各有关的结果列于表1。

表1 有关的计算结果与实验结果

Table 1 Associated calculating results and experimental results

各类比较项	角位移边界计算	线位移边界计算	实验结果 ^[1]	计算结果 ^[2]
模态数 n	3.9	4.27	4~5	3.1
塑性运动持续时间 t_f	5.58×10^{-5}	5.0×10^{-5}	—	10.17×10^{-3}
临界速度 v_0	134.2	87	—	107.9
临界冲击值 I	1158	759	840	932

从表1中可以看到,由本文计算得到的两种情况下的屈曲模态数较文献[2]中计算得到的屈曲模态数与实验值更为符合,其中在位移边界条件影响下的屈曲模态数与实验值完全相符。但在该条件下计算得到的冲击强度 I 值与实验值相比要低一些。根据前述 $\omega_0(\theta, t)$ 级数取项的误差估计,如果在 $\omega_0(\theta, t)$ 的级数中再取两项,则冲击强度 I 的计算值将会与实验值具有较好的一致性。

同时,通过对表1中本文的两种边界条件下的计算结果的比较可以看到,两种边界条件下计算得到的模态数与塑性运动持续时间 t_f 非常接近。但在转角边界条件下冲击载荷计算值比位移边界条件下的冲击载荷值要大,而且比文献[1]中实验值要大得多。因此在此类问题中,采用转角边界条件估算冲击载荷值,将得到使结构易于屈曲的载荷值,而采用位移边界条件估算冲击载荷将得到偏于安全的载荷值。

表1中文献[2]计算得到的塑性运动持续时间 t_f 与本文的计算差两个数量级,文献[2]文计算有误,应为 10.17×10^{-5} 。

5 结 论

作者在分析非均匀局部径向冲击载荷作用下的圆柱壳塑性动力屈曲中,通过采用动力屈曲能量准则,运用弹性端边界条件,近似模拟分析圆柱壳的整体塑性动屈曲,给出了在不同边界条件下的屈曲模态和临界冲击速度的计算公式。计算结果表明,对于本文研究的小变形局部塑性动屈曲而言,能量准则是非常有效的,理论计算与实验结果具有较好的一致性,而且方法简单,适合于工程应用。通过比较两种边界条件下的计算结果发现,两者的屈曲模态数和塑性运动持续时间 t_f 非常接近。但采用转角边界条件估算得到的冲击载荷值易于使壳体屈曲,而采用位移边界条件估算得到的冲击载荷值偏于安全。从这点上说,应优先考虑位移边界条件的影响。

参 考 文 献

- 1 Lindberg H E, Florence A L. Dynamic Pulse Buckling Theory and Experiment, Martinus Nijhoff, Dordrecht The Netherland 1987, 152~155
- 2 顾王明,刘士光,郑际嘉. 非均匀径向冲击下圆柱壳塑性动屈曲. 力学与实验, 1993, 15, (6): 35~38
- 3 Wang R, Ru C Q. An Energy Criterion for the Dynamic Plastic Buckling of Circular Cylinders under Impulsive Loading. In: Reid S R, ed. Metal Forming and Impact Mechanics. Pergaman Press, 1985, 213~223
- 4 茹重庆,王 仁. 关于冲击载荷下圆柱壳塑性屈曲的两个问题. 固体力学学报, 1988, 9(1): 62~66
- 5 Pauli Pedersen. Influence of Boundary Conditions on the Stability of a Column under Non-conservative load. Int J Solids, Structures, 1977 13(5): 445~455

**DYNAMIC PLASTIC BUCKLING OF CYLINDRICAL
SHELLS UNDER NONUNIFORM LOCAL
RADIAL IMPULSIVE LOADING**

Huang Chengyi, Zheng Jijia, Liu Tuguang

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074)

ABSTRACT In this paper, the energy criterion is used to study the dynamic plastic buckling of cylindrical shells, which are locally subjected to a nonuniform radial impulsive loading. Elastic boundary conditions are used to model the influence of the non-buckling parts of the shell on the buckling parts. Calculating formulas for the number of mode and critical velocity are given and the calculating results are compared with that of experimental. The effects of two kinds of boundary conditions on the plastic buckling are analysed.

KEY WORDS dynamic plastic buckling, cylindrical shells, impulsive loading, elastic boundary conditions.