

定态火焰在可燃预混气中产生的压力波

徐胜利 糜仲春^{a)} 汤明钧

(南京理工大学 南京 210094)

(^{a)}中国科技大学 合肥 230026)

摘要 火焰在可燃预混气中传播时,在火焰面前方产生一道压力波。忽略点火及火焰的初期加速,仅考虑火焰达到稳定传播速度的情况。用 Oppenheim 自相似解分析流场,得到相应的控制方程及定解条件;用自适应步长的四阶 Runge-Kutta 法对方程积分,讨论了流场压力波结构及弱激波近似——声波解;认为火焰为间断面,能量释放在火焰面后瞬时完成。利用火焰面两侧的能量关系,得到了火焰位置、燃速及对应 C-J 条件的火焰位置、C-J 燃速

关键词 自相似解 压力波 声波 火焰面

中图分类号 O347.4

1 引言

研究火焰在可燃混合气中产生压力波具有重要意义。可燃性物质在生产、运输及贮存过程中意外泄漏,在周围空气中形成预混气,在外界火源作用下产生燃烧及爆炸^[1];军事上的云爆武器就是利用易挥发的碳氢燃料产生云雾爆炸;燃烧安全中,火焰产生压力波是形成不稳定燃烧的重要原因^[2]。忽略两相作用,云雾燃烧可看作是预混气的燃烧。

Luckritz^[3]研究恒速传播火焰产生冲击波时,对一维拉氏方程用 Von Neumann-Richtmyer 二阶格式加入人工粘性的方法计算了流场参数,但处理低速火焰时得不到合理的物理解;Kuhl^[4]等人引入约化参数,用自相似方法分析了定态火焰诱导的压力波结构及相应条件下的火焰速度。以此为基础,Raju^[5]研究轴对称云雾爆炸场时用 Godunov 格式对欧氏守恒方程进行了数值模拟。

我们以 Kuhl^[4]等人的分析为基础,更正了某些公式推导的错误,用 Oppenheim^[6]自相似方法讨论了定态传播火焰在可燃预混气中产生的压力波。假设压力波阵面、火焰阵面为间断面,能量释放在火焰面后瞬时完成,讨论了压力波结构、火焰面位置、燃速及 C-J 燃速,为工程中的燃烧安全及事故防护提供预测。

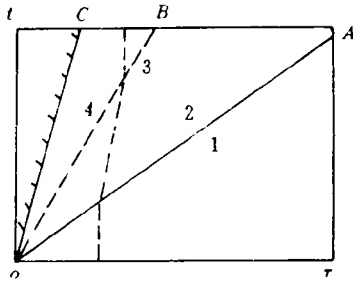
2 基本方程及定解条件

2.1 问题提出

$t=0$ 时,有一团可燃预混气,最大半径为 r_0 ,比热比 γ 为定值。忽略点火及火焰加速,

国家自然科学基金资助项目。

1993年12月27日收到原稿,1994年7月10日收到修改稿。



OA——激波阵面; OB——火焰阵面;
OC——活塞面
OA——Shock front; OB——Flame front;
OC——Piston face

图 1 流场波系图

Fig. 1 Wave diagram of flow field

压力波阵面; u, a 表示速度、声速。

守恒方程改写为以约化参数表示的自控形式 (autonomous form), 满足自相似条件的自控方程为

$$dZ/dF = [Z/(1 - F)] \cdot [\tilde{P}(F, Z)/\tilde{Q}(F, Z)] \quad (2)$$

$$d \ln x / dF = -D(F, Z) / \tilde{Q}(F, Z) \quad (3)$$

其中: $D(F, Z) = Z - (1 - F)^2$; $\tilde{Q}(F, Z) = (j + 1)(F - b_2) - (b_1 - F)(1 - F)F$;

$$\tilde{P}(F, Z) = b_4(b_3 - F)D(F, Z) + (\gamma - 1)\tilde{Q}(F, Z); b_1 = (2 + \lambda)/2;$$

$$b_2 = (\lambda + \omega)/(j + 1)\gamma; b_3 = (\lambda + 2)/b_4; b_4 = (j + 1)(\gamma - 1) + 2$$

$j = 0, 1, 2$ 分别表示平面、柱面及球面流动。 $x = r/r_2, \tau = t/t_2$ 为场坐标。 $\lambda = -2d \ln w_2 / d \ln r_2$ 为耗散系数, 表示压力波阵面速度变化对流场的影响; $\omega = -\rho'_1 = -d \ln \rho_1 / d \ln r_2$ 表示压力波前介质密度变化对流场的影响。我们讨论的压力波以稳定速度在波前为静止均匀的介质中传播, 即 $\lambda = 0, \omega = 0, u_1 = 0$, 方程 (2)、(3) 简化为

$$\frac{d \ln Z}{d \ln F} = \frac{2D + j(\gamma - 1)(1 - F)F}{D + jZ} \quad (4)$$

$$\frac{d \ln x}{d \ln F} = -\frac{D}{D + jZ} \quad (5)$$

方程 (4)、(5) 积分起点及终点分别为活塞表面及压力波阵面。

(a) 活塞边界

对于定态传播火焰, 其产生的压力波及引入的活塞均以定态速度向前传播。沿活塞表面 $F_p = 1, Z_p = K_c/\gamma$, 其中 K_c 为对应某一火焰速度的参数, 脚标 p 表示活塞表面。

(b) 压力波边界

在相平面中, Hugoniot 曲线为

仅考虑由中心传出一以恒定速度传播的火焰面, 火焰面在其前方诱导一个压力波, 火焰面与压力波之间的流场认为是等熵的, 用自相似方法求解, 引入等效活塞模型, 压力波的求解与火焰面的求解解耦。流场波系图见图 1, 图中 1、2、3、4 分别表示压力波阵面与火焰阵面两侧的状态。

2.2 基本方程及定解条件

根据 Oppenheim^[6,7] 自相似解的思想, 将一维不定常守恒方程变换到以广义冲击波坐标表示的形式。引入约化参数

$$F = (t/r\mu)u, \quad Z = (ta/r\mu)^2 \quad (1)$$

其中: F 表示流动参量, 相当于速度; Z 表示热力学量, 相当于温度; r, t 为空间、时间坐标; $\mu = (t_2/r_2)w_2, w_2 = dr_2/dt_2$, 脚标 2 表示

$$Z_2 = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{F_2 + \frac{2}{\gamma - 1} P_G}{F_2 + \frac{P_G - 1}{\gamma}} (1 - F_2) F_2 \quad (6)$$

其中: P_G 表示定容燃烧时, 单位质量介质能量释放的压比。脚标 2 表示压力波阵面。

Rayleigh 线为

$$Z_2 = (Z_1 + \gamma F_2)(1 - F_2) \quad (7)$$

其中: $Z_1 = 1/M_2^2 = \gamma$, M_2 为压力波阵面马赫数。

令 $P_G = 1$, 由(5)、(6)得 Rankine-Hugoniot 关系为

$$\begin{aligned} F_2 &= 2(1 - \gamma)/(\gamma + 1) \\ Z_2 &= [2(\gamma - 1)/(\gamma + 1)^2][(2\gamma/(\gamma - 1)) - \gamma][((\gamma - 1)/2) + \gamma] \end{aligned} \quad (7a)$$

3 压力波结构

如图 1, 介质由状态 2 经历等熵压缩变为状态 3, 压力波结构就是指等熵流场参数的确定。固定时间坐标, 有 $\tau \equiv 1$, 由式(1)及理想气体假设得

$$\begin{cases} u = Fw_2x \\ T/T_2 = (a/a_2)^2 = (p/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = (\rho/\rho_2)^{\gamma-1} = x^2 \cdot Z/Z_2 \end{cases} \quad (8)$$

由 $u_1 = 0$ 及式(1)得

$$F_1 = 0, Z_1 = (a_1/w_2)^2 = \gamma \quad (9)$$

压力波两边的参数比为

$$\begin{cases} \frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)\gamma} - 1 \right] \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2\gamma} \\ \frac{T_2}{T_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \end{cases} \quad (10)$$

结合式(8)、(10), 有

$$\begin{cases} \frac{T}{T_1} = x^2 \frac{Z}{\gamma} \\ \frac{p}{p_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[\frac{2\gamma}{(\gamma - 1)\gamma} - 1 \right] \left(x^2 \frac{Z}{Z_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2\gamma} \left(x^2 \frac{Z}{Z_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \frac{u}{a_1} = \frac{Fx}{\sqrt{\gamma}} \end{cases} \quad (11)$$

给定 K_c 值, 对方程(3)、(4)用自适应步长的四阶 Runge-Kutta 法积分, 利用(11)式, 得到压力波后流场的参数解。为保证积分的稳定性, 用 $\ln F$ 、 $\ln Z$ 及 $\ln x$ 为积分变量, 且发现积分对步长变化尤为敏感。

当 $M_2 \rightarrow 1$, $F=0$, $Z=1$, 方程(4)、(5)在该点存在奇异。对于这类弱压力波, 我们将数值积分解与声波解比较。

4 声波解

声波方程

$$\partial^2 \varphi / \partial t^2 = (a_1^2 / r^j) (\partial / \partial r) [r^j (\partial \varphi / \partial r)] \quad (12)$$

其中:

$$u = -\partial \varphi / \partial r, \quad p - p_1 = \rho_1 \partial \varphi / \partial t \quad (12a)$$

φ 为速度势函数。声波为线性波, 满足自相似解, 有

$$\varphi(r, t) = tf(r/a_1 t) = tf(x) \quad (13)$$

其中: $x = r/r_2 = r/a_1 t$ 。由(13)、(12)得

$$x(1-x^2)f'' + jf' = 0 \quad (14)$$

边界条件为

$$x = x_p, u = u_p = a_1 x_p, p = p_1 \quad (15)$$

积分式(14)并结合(12a), 有

$$u/a_1 = (x_p/x)^j (1-x^2)/(1-x_p^2)^{\frac{j}{2}} \cdot a_1 x_p \quad (16)$$

$$\frac{p}{p_1} = \begin{cases} 1 + \frac{\gamma x_p^2}{\sqrt{1-x_p^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} & j=1 \\ 1 + \frac{2\gamma x_p^3}{1-x_p^2} \cdot \frac{1-x}{x} & j=2 \end{cases} \quad (17)$$

在相平面上, 由式(1)并注意到 $\tau=1, y=1$, 有

$$F(x) = (u/a_1 x) = (x_p/x)^{j+1} (1-x^2)/(1-x_p^2)^{\frac{j}{2}} \quad (18)$$

$$Z(x) = \frac{Z_1}{x^2} \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{\gamma x_p^2}{\sqrt{1-x_p^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{\frac{j-1}{\gamma}} & j=1 \\ \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{2\gamma x_p^3}{1-x_p^2} \cdot \frac{1-x}{x}\right)^{\frac{j-1}{\gamma}} & j=2 \end{cases} \quad (19)$$

对给定的 K_c 值, 在相平面上以 x/x_p 代替 x 对方程(5)积分, 确定 x_p, x 后, 代入式(18)、(19), 即可求出相平面声波解的对应点。

5 火焰面方程

对应图1介质的热力学过程见图2所示。1~2表示压力波的绝热压缩, 2~3表示等熵压缩, 3~4表示 Rayleigh 过程, 4~f表示反应的 Hugoniot 曲线, f与F表示相应状态下的定压过程。坐标系固定于火焰阵面, 由连续方程得

$$v_d = v_4/v_3 = \rho_3/\rho_4 = w_3/S \quad (20)$$

v, ρ, w_3, S 分别表示介质的比容、密度、火焰面速度及燃烧速度。Rayleigh 过程为

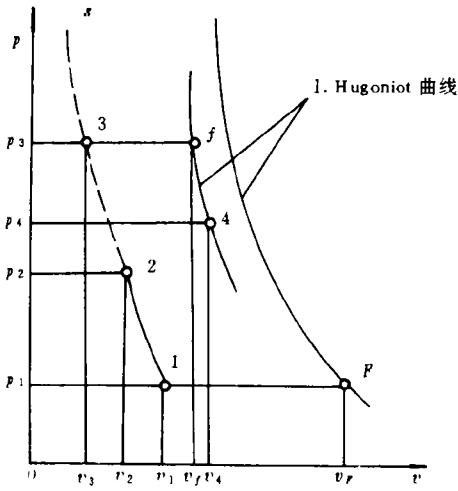
$$(p_4 - p_3)/(v_4 - v_3) = -(\rho_3 u_3)^2$$

结合式(1)、(20), Rayleigh 过程为

$$P_d = (p_4/p_3) = 1 + [(\gamma_3/Z_3)(1-v_d)/v_d^2] \quad (21)$$

v 及 P 表示比容比与压力比。脚标 d 表火焰阵面。

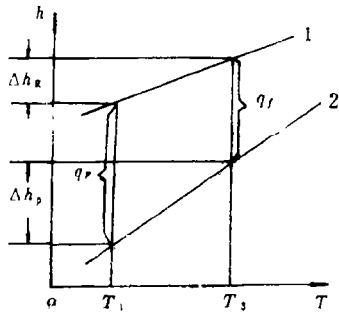
Zajac^[8]考虑到真实气体效应, 认为 Hugoniot 曲线在 $p-v$ 平面仍为双曲线



1. Hugoniot curve

图 2 对应于图 1 的 $p-v$ 热力学过程图

Fig. 2 Thermodynamic process corresponding to Fig. 1



1. 反应物; 2. 生成物;

1. Reactants; 2. Products

图 3 火焰前后介质焓温图

Fig. 3 Enthalpy change across flame front.

$$\frac{(P_d + \beta_4)(v_d - \beta_4)}{(1 + \beta_4)(v_f - \beta_4)} = 1 \quad (22)$$

其中: $\beta_4 = (\gamma_4 - 1)/(\gamma_4 + 1)$, 由式(21)、(22)得 v_f 与 v_d 关系为

$$v_f = v_d + \frac{\gamma_3}{Z_3} \frac{(1 - v_d)(v_d - \beta_4)}{(1 + \beta_4)v_d^2} \quad (23)$$

火焰面作间断处理, 能量释放在火焰面后瞬时完成, 能量关系如图 3 所示。

$$q_f = q_r - \Delta h_p + \Delta h_R \quad (24)$$

q 表示热量, Δh 表示焓变。脚标 P, R 表示生成物、反应物。由理想气体焓关系得

$$q_f = q_r + (a_3^2 - a_1^2)/(\gamma_3 - 1) \cdot [1 - \gamma_4(\gamma_3 - 1)\Omega/\gamma_3(\gamma_4 - 1)] \quad (25)$$

其中: $\Omega = \Omega_3/\Omega_4$ 为分子量之比。

v_f, v_r 与各对应过程的能量释放有关,

$$v_r = \frac{2\beta_4}{1 + \beta_4} \left(\frac{1 + \beta_3}{2\beta_3} + Q \right) \quad (26)$$

将式(22)中 β_4 脚标 4 改为 3 即确定 $\beta_3, Q = (\gamma_3 q/a_1^2)$, v_r 改写为

$$v_r = \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_4} \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_3 - 1} + \frac{\gamma_3 q_r}{a_1^2} \right) \quad (27)$$

同理有

$$v_f = \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_4} \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_3 - 1} + \frac{\gamma_3 q_f}{a_3^2} \right) \quad (27a)$$

由式(1)及(20)得

$$v_d = 1/(1 - F_3) \quad (28)$$

综合式(25)~(28), 得相平面上与能量释放对应的火焰面方程

$$v_r = \frac{x_3^2 Z_3}{Z_1} \left[\frac{1}{1 - F_3} - \frac{\gamma_3 F_3}{\gamma_4 Z_3} \left(1 + \frac{\gamma_4 - 1}{2} F_3 \right) \right] - 2 \left(\frac{2\gamma_3}{\gamma_4} \cdot \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_3 - 1} - \Omega \right) \left(\frac{x_3^2 Z_3}{Z_1} - 1 \right) \quad (29)$$

计算时, 由活塞表面开始逐点积分, 由方程

(29) 确定给定 v_r 值条件下的火焰面位置 $\ln F_3$ 与 $\ln x_3$, 对应的燃烧速度为

$$S = x_3 w_2 (1 - F_3) \quad (30)$$

每一 K_c 值, 都对应极限燃烧速度, 即 C-J 燃速 S_{C-J} 。由假设 $u_4 = 0$, 对于 C-J 条件, $w_3 = a_4$, 由式(1)及理想气体假设知

$$Z_4 = (\gamma_4/\gamma_3) P_d v_d Z_3$$

令 $Z_4 = 1$, C-J 条件下火焰面位置满足

$$Z_3 = (\gamma_3/\gamma_4) (1 - F_3) (1 + \gamma_4 F_3) \quad (31)$$

火焰面方程为

$$v_F = \frac{\gamma_3}{\gamma_4} \left(\frac{S_{C-J}}{a_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{(1-F_3)^2} \left[1 + \frac{\gamma_4-1}{2} (2-F_3)F_3 \right] - \left(\frac{2\gamma_3}{\gamma_4} \cdot \frac{\gamma_4-1}{\gamma_3-1} - \Omega \right) \left[\frac{\gamma_3}{\gamma_4} \cdot \left(\frac{S_{C-J}}{a_1} \right)^2 \cdot \frac{1+\gamma_4 F_3}{1-F_3} - 1 \right] \quad (32)$$

C-J 燃速的计算方法是：(1) 给定 v_F 值，由式(29)式得出 $\ln F_3, \ln Z_3$ 与 $\ln x_3$ ，由式(30)得到 S ；(2) 将(1)得到的 F_3, S 代入式(31)，看(31)式是否满足，若满足，则 F_3 与 S 为对应 C-J 条件的值；否则，重复(1)、(2)，直到得到的 F_3, S 满足方程(31)为止。

6 结果分析

计算取 $v_F = 7, a_1 = 345\text{m/s}, p_1 = 0.101\text{Mpa}, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.3, \gamma_4 = 1.2, \Omega = 1$ 。

图 4、图 5 表示相平面的积分曲线。图 4 的曲线自下而上， K_c 值变大；图 5 的曲线自上而下， K_c 值变大。 K_c 值越大，压力波阵面与活塞表面偏离越大。 $K_c=20$ ，图 4 中积分曲线与 Rankine-Hugoniot 曲线近似相切。图中的圆点表示声波解。从图中看出， $K_c \geq 7$ 时，积分解与声波解接近，说明在弱冲击波条件下，非线性的压力波与线性的声波解相容。

图 6~图 9 表示等熵压缩流场参数沿自相似线的分布。从图中看出，自压力波阵面后到火焰阵面，介质的速度 u 、温度 T 、压力 p 及密度 ρ 均单调增加。以 $K_c=2$ 压力分布为例，压力波阵面后的压力 p_2 约为 0.157Mpa ，火焰阵面压力 p_3 约为 0.1925Mpa 。 K_c 值越大，对应的压力波阵面与火焰阵面后的压力越小。以 $K_c=20$ 为例，压力波阵面后的压力大约为 0.101Mpa ，火焰阵面后的压力约为 0.114Mpa 。

图 10 表示 K_c 值固定时，燃速 S 与比容比 v_F 之间的关系。图中虚线为对应的燃速极限——C-J 燃速。 v_F 相同， K_c 越小， S 值越大，对于碳氢燃料， v_F 近似为 7，对应图中点划线。 K_c 值相同， v_F 越大，对应的燃速 S 越小，而且 $\ln S$ 与 $\ln v_F$ 几乎呈线性关系，即 S 与 v_F^{-k} 成正比， k 为正数。

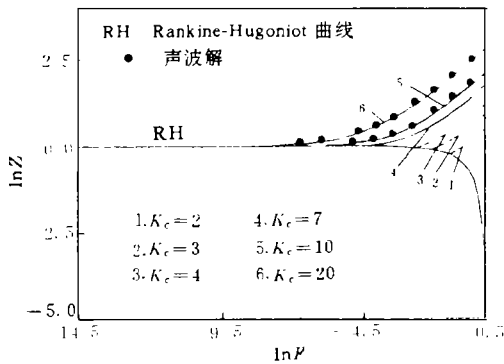


图 4 相平面 $Z=Z(F)$ 的积分曲线 ($j=2, v_F=7$)
 Fig. 4 Integral curve of equation $Z=Z(F)$ in phase plane ($j=2, v_F=7$)

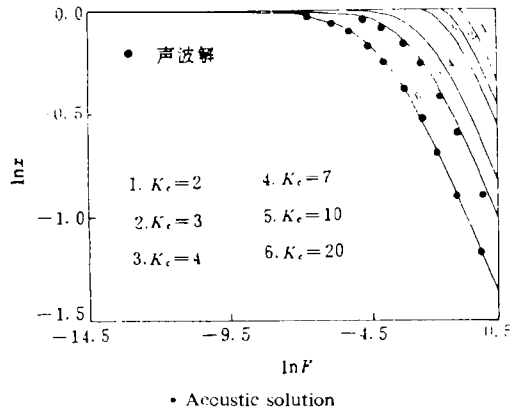


图 5 相平面上 $x=x(F)$ 的积分曲线 ($j=2, v_F=7$)
 Fig. 5 Integral curve of equation $x=x(F)$ in phase plane ($j=2, v_F=7$)

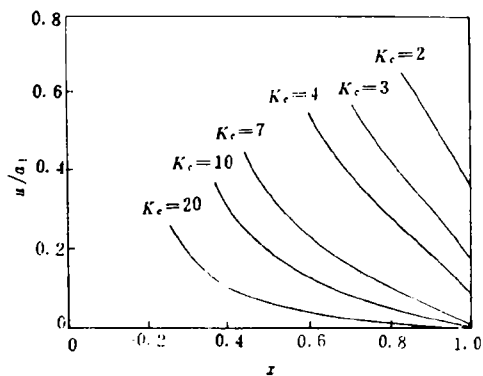


图 6 自相似解流场的速度分布 ($j=2, \nu_F=7$)

Fig. 6 Velocity distribution in self-similar flow field ($j=2, \nu_F=7$)

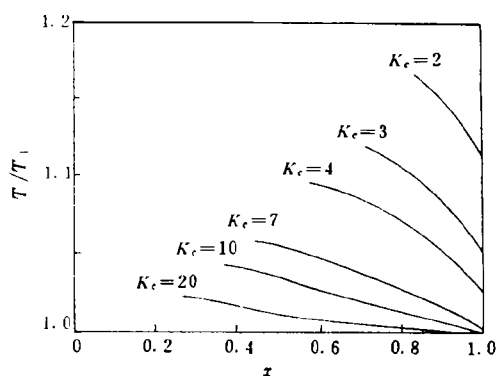


图 7 自相似解流场温度分布 ($j=2, \nu_F=7$)

Fig. 7 Temperature distribution in self-similar flow field ($j=2, \nu_F=7$)

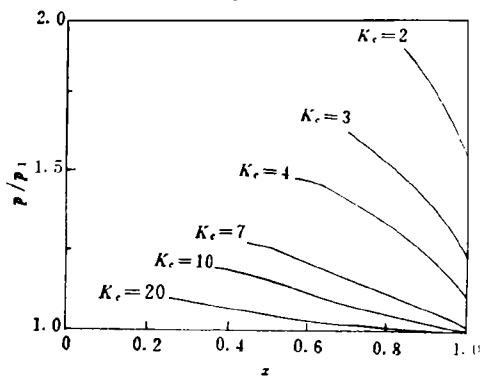


图 8 自相似解流场的压力分布 ($j=2, \nu_F=7$)

Fig. 8 Pressure distribution in self-similar flow field ($j=2, \nu_F=7$)

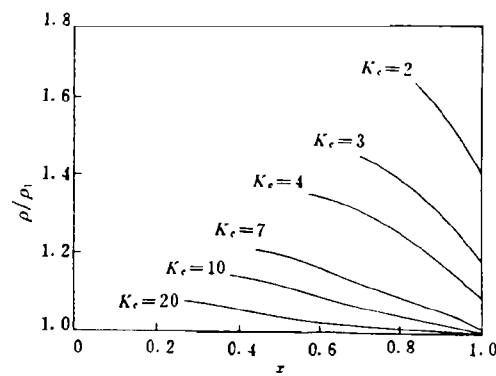
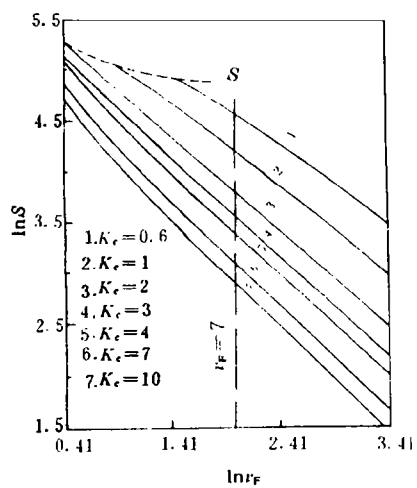


图 9 自相似解流场密度分布 ($j=2, \nu_F=7$)

Fig. 9 Density distribution in self-similar flow field ($j=2, \nu_F=7$)



1. C-J flame velocity

图 10 燃烧速度与比容比之间的关系 ($j=2, a_1=345 \text{ m/s}$)

Fig. 10 Relationship between ν_F and S ($j=2, a_2=345 \text{ m/s}$)

7 结 论

1) 本文用自相似方法得到了相平面中以约化参数表示的控制方程及边界条件。利用自适应步长的四阶 Runge-Kutta 法求解方程得到了压力波结构, 火焰面位置及燃速, 所有解均可包含几何因素。

2) 本文自相似解的结果具有清晰的物理意义。介质经压力波绝热压缩, 状态参数突跃增加; 经过等熵压缩后, 状态参数继续单调增加, 直到火焰阵面为止。弱冲击波条件下, 非线性的压力波解与线性声波解相容。

3) 低速定态火焰在可燃预混气中诱导的压力波, 用数值方法对守恒方程直接求解, 往往得不到合理的物理解。本文方法可作为其它数值方法求解气云爆炸场的初始条件, 也可用来校对其它方法得到的结果。

致谢: 本文得到王继海教授的热情帮助。

参 考 文 献

- 1 Strehlow R A. Unconfined Vapour-Cloud Explosions — An Overview. In: 14th Int Symp on Combust, Pittsburgh: Combust Institute, 1973, 1189~1200
- 2 Law C K. Elements of Combustion Physics. Berkley: University of California, 1987, Chap 9
- 3 Luckritz R T. An Investigation of Blast Waves Generated by Constant Velocity Flames. [Ph D Thesis]. College Park Md: Univ of Maryland, 1977
- 4 Kuhl A L, et al. Pressure Waves Generated by Steady Flames. In: 14th Int Symp on Combust, Pittsburgh: Combust Institute, 1973, 1201~1215
- 5 Raju M S N. The Blast Waves from Unconfined Axisymmetrical Vapour Cloud Explosion. [Ph D Thesis]. Illinois, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1982
- 6 Oppenheim A K, et al. A Systematic Exposition of the Conservation Equations for Blast Waves. J Appl Mech, 1971, 38: 783~794
- 7 Oppenheim A K, et al. J Fluid Mech, 1972, 52(4): 657~682
- 8 Zajac L J, et al. Thermodynamic Computation for the Gasdynamic Analysis of Explosion Phenomena. Combust Flame, 1969, 13: 537~550

PRESSURE WAVES GENERATED BY STEADY FLAME PROPAGATING IN PREMIXED COMBUSTIBLE GAS

Xu Shengli, Mi Zhongchun^{a)}, Tang Mingjun

(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094)

^{a)} University of Science and Technology of China, Hefei, 230026)

ABSTRACT Pressure waves can be generated by a steady flame which propagates in premixed gases. Under condition of steady flame, self-similar approach is used to analyze the flow field by neglect of ignition process and initial flame acceleration. The adaptive 4th-order Runge-Kutta method is applied to integrate the equations with boundary conditions in phase plane. The structure of pressure wave, flame position and flame speed are obtained. when Mach number of the pressure wave approaches unity, integral solution is compatible with the acoustic solution.

KEY WORDS self-similar, pressure wave, acoustic wave, flame front