

冲击波载荷作用下拉-弯耦合梁的 瞬态响应分析

夏品奇

(南京航空航天大学飞行器系 南京 210016)

摘要 采用大挠度弹性理论和中心差分法分析了拉压变形和弯曲变形之间存在弹性耦合的非线性薄梁结构对冲击波载荷作用的大挠度瞬态响应。为了充分描述冲击波载荷的强度大小,文中应用了冲击波载荷的冲量概念。通过进一步研究模态数、时间步长、拉-弯耦合、拉/弯刚度比、冲击波冲量对挠度响应的影响,得到了一些有用的结论。

关键词 冲击波 拉-弯耦合梁 瞬态响应

中图分类号 O347.3

1 引言

工程结构常会遇到受冲击波载荷作用的情况,如工程爆破冲击波对建筑物的作用,炸弹爆炸冲击波对工事及舰船的作用,导弹尾喷流冲击波对飞行器结构的作用等。冲击波对结构所造成的破坏也相当严重,如我国某型直升机进行导弹发射试验时,直升机蒙皮被导弹尾喷流冲击波掀起而遭到破坏,这一后果在试验前是未曾预料到的。因此,研究结构对冲击波载荷作用的瞬态响应应具有非常重要的意义。

结构对冲击波载荷的响应问题属冲击力学的研究范畴,目前国际上研究得十分活跃。Mofflin^[1]用有限条法研究了平板对冲击波载荷的响应问题,Jiang^[2]研究了圆柱壳体对冲击波载荷的响应。目前,绝大部分研究都采用弹-塑性理论,这主要考虑了冲击波载荷具有瞬时作用的特点。由于航空飞行器结构的变形只能限制在弹性变形范围内,不允许结构发生塑性变形,因而弹-塑性理论对研究航空结构的冲击波响应问题不适用,应采用大挠度弹性理论。

由于冲击波载荷具有初始值高、衰减快、持续时间短等特点,因此在衡量冲击波载荷的强度大小时,不能简单地用初值高低、衰减快慢或持续时间长短来衡量,为此,采用冲击波的冲量概念来综合描述冲击波载荷的强度大小。作者以拉压与弯曲变形耦合的薄梁结构为研究对象,采用非线性大挠度弹性理论和中心差分法,提出了一套求解结构对冲击波载荷作用的瞬态响应计算方法,并进一步研究了模态数、时间步长、拉-弯耦合、拉/弯刚度比及冲击波冲量对结构响应的影响,得到了一些有价值的结论。

2 运动微分方程

2.1 动力方程

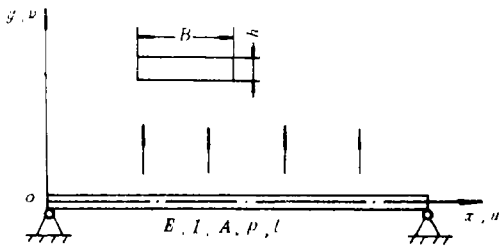


图 1 薄梁结构模型

Fig. 1 Structural model of thin beam

图 1 所示的薄梁结构模型,忽略剪切、转动惯量和波动的影响,梁的大挠度动力方程^[3]为

$$\rho A \ddot{v} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial m}{\partial x} \right) = f(t) \quad (1)$$

$$\rho A \ddot{u} - EA \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

式中: E 为弹性模量; I 为惯性矩; A 为截面积, $A = Bh$, B 和 h 分别是梁截面的宽度和厚度; l 为长度; ρ 为密度; $f(t)$ 为沿 x 方向均匀分布的横向载荷; u 和 v 分别为梁中性线上的点沿 x 和 y 方向的位移; t 为时间。

将(3)式代入(1)和(2)式,并规定位移量级为 $O(u) = O(v^2)$, 得如下动力方程

$$\rho A \ddot{v} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EA \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = f(t) \quad (4)$$

$$\rho A \ddot{u} - EA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (5)$$

2.2 模态展开

按照伽辽金法,位移 u 和 v 可表示为下列线性振型函数的迭加

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m X_j(x) T_{mj}(t) \quad (6)$$

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) T_{ni}(t) \quad (7)$$

式中: $X_j(x)$ 和 $Y_i(x)$ 分别为 x 和 y 方向的振型函数,由边界条件确定; $T_{mj}(t)$ 和 $T_{ni}(t)$ 为时间函数; m 和 n 分别为 x 和 y 方向的模态数。由于 $f(t)$ 沿 x 方向均匀分布,所以 x 方向的奇数模态项和 y 方向的偶数模态项响应为零,于是计算时可取 $j=2, 4, 6, 8, \dots$; $i=1, 3, 5, 7, \dots$ 。

对于两边简支梁结构,边界条件为 $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $v(0, t) = v(l, t) = 0$, 于是振型函数有如下形式

$$X_j(x) = (2/\rho A l)^{1/2} \cdot \sin(j\pi x/l) \quad (8)$$

$$Y_i(x) = (2/\rho A l)^{1/2} \cdot \sin(i\pi x/l) \quad (9)$$

式中, $(2/\rho A l)^{1/2}$ 是根据质量归一化得到的系数。

2.3 运动方程

将(6)、(7)式代入(4)、(5)式后应用伽辽金积分表达式并由线性模态的正交性可得如下两组等价的运动微分方程

$$M_{r,p} T_{r,p}(t) + K_{r,p} T_{r,p}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m K_{r,p,i} T_{r,i}(t) T_{r,j}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n K_{r,p,rs} T_{r,i}(t) T_{r,r}(t) T_{r,s}(t) - F_{r,p} = 0 \quad (10)$$

$$M_{u,q} \ddot{T}_{u,q}(t) + K_{u,q} T_{u,q}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n K_{u,q,r} T_{r,i}(t) T_{r,r}(t) = 0 \quad (11)$$

式中:

$$M_{r,p} = 1,$$

$$K_{r,p} = \frac{EI}{\rho A} \left(\frac{p\pi}{l} \right)^4,$$

$$K_{r,p,ij} = -EA \int_0^l Y_p(x) [Y'_i(x) X'_{jz}(x) + Y''_{ux}(x) X_{jz}(x)] dx,$$

$$K_{r,p,rs} = -\frac{3}{2} EA \int_0^2 Y_p(x) Y'_r(x) Y''_{rs}(x) dx,$$

$$F_{r,p} = f(t) \int_0^l Y_p(x) dx,$$

$$M_{u,q} = 1,$$

$$K_{u,q} = \frac{E}{\rho} \left(\frac{q\pi}{l} \right)^2,$$

$$K_{u,q,r} = -EA \int_0^l X_q(x) Y'_r(x) Y''_{rx}(x) dx$$

$$(P=1, 2, \dots, n, q=1, 2, \dots, m)。$$

为了便于方程(10)、(11)求解,作如下变量代换: $x_p(t) = T_{r,p}(t)$, $x_{n+q}(t) = T_{u,q}(t)$, 于是方程(10)、(11)可等价地表示为

$$M(g, g) \ddot{x}_g(t) + K_1(g, g) x_g(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_2(g, i, j) x_i(t) x_j(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N K_3(g, i, j, k) x_i(t) x_j(t) x_k(t) - F(g) = 0 \quad (12)$$

$$(g=1, 2, \dots, N, \quad N=n+m)$$

式中,各系数矩阵可根据方程(10)、(11)中的系数矩阵容易地得到,在此不再列出。

3 冲击波冲量

3.1 载荷特性

冲击波载荷特性主要通过实测来确定,一个典型的冲击波载荷特性可用图2来描述,首先载荷在一瞬间上升到一个正峰值,然后开始衰减并达到一个负峰值,再恢复到零水平。实际上正峰值要比负峰值大得多,分析时一般忽略负峰值的影响;另外,由于载荷上升到正峰值的时间远比载荷的衰减时间短,所以认为上升时间为零。于是在工程分析时常采用图3所示的载荷形式,并用下列指数公式描述冲击波载荷的变化规律

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (13)$$

式中:特征参数 p_0 为载荷初始峰值; τ 为载荷衰减时间; a 为载荷衰减系数, t 为载荷作用时间。 τ 和 a 越小, 载荷衰减得越快。

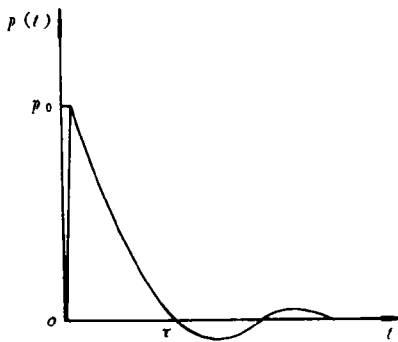


图2 实测冲击波载荷 $p(t)$
Fig. 2 Blast load measured $p(t)$

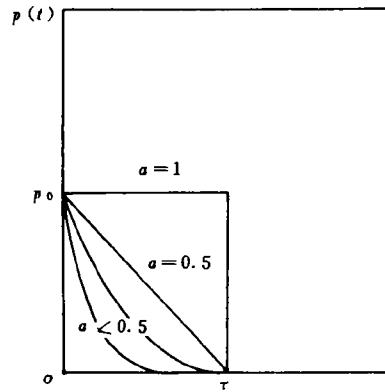


图3 简化冲击波载荷 $p(t)$
Fig. 3 Blast load simplified

3.2 冲击波冲量

由于冲击波载荷具有初值高、衰减快、持续时间短(往往在 1ms 左右)等特点,且冲击波载荷的大小由 p_0 、 τ 、 a 等参数决定,所以在衡量冲击波载荷的强度大小时,不能简单地用初值高低、衰减快慢或持续时间长短来衡量,为此采用冲击波冲量的概念,来描述冲击波载荷的强度大小。冲击波冲量(用符号 I_b 表示)定义为冲击波载荷对时间的积分,即

$$I_b = \int_0^{\tau} p(t) dt \quad (14)$$

将式(13)代入式(14)经积分可得冲击波冲量为

$$I_b = p_0 \tau a \quad (15)$$

I_b 的量纲为[力·时间]。从表达式(15)可以看出,冲击波冲量综合了冲击波载荷的初始值 p_0 、持续时间 τ 及衰减系数 a 各特征参数,因此充分反映了冲击波载荷的强度大小,它构成了冲击波载荷的一个特性指标。 I_b 越大,冲击波载荷的强度越大。

4 响应求解

采用中心差分法求解薄梁结构在冲击波载荷作用下的瞬态挠度响应。根据中心差分法,在时刻 t_0 有如下的基本关系式

$$\ddot{x}_i(Q) = \frac{1}{\Delta t} [\dot{x}_i(Q + \frac{1}{2}) - \dot{x}_i(Q - \frac{1}{2})] \quad (16)$$

$$\dot{x}_i(Q) = \frac{1}{\Delta t} [x_i(Q - \frac{1}{2}) + x_i(Q + \frac{1}{2})] \quad (17)$$

$$\dot{x}_i(Q + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\Delta t} [x_i(Q + 1) - x_i(Q)] \quad (18)$$

式中, Δt 为定步长时间间隔。

将式(16)~(18)代入方程(12), 可得如下响应计算公式

$$\begin{aligned} \frac{M(g, g)}{\Delta t^2} x_r(Q+1) &= \frac{M(g, g)}{\Delta t} \dot{x}_r(Q - \frac{1}{2}) + \frac{M(g, g)}{\Delta t^2} x_r(Q) \\ &\quad - [K_1(g, g)x_r(Q) + \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^N K_2(g, i, r')x_i(Q)x_r(Q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N K_3(g, i, r, s)x_i(Q)x_r(Q)x_s(Q)] + F(g, Q) \quad (19) \end{aligned}$$

因此, 从 $x_r(Q)$ 和 $\dot{x}_r(Q - \frac{1}{2})$ 出发, 由式(19)、(18)可求得 $x_r(Q+1)$ 和 $\dot{x}_r(Q + \frac{1}{2})$ 。当 $Q=0$ 时, 有初始值 $\dot{x}_r(-\frac{1}{2}) = \dot{x}_r(0)$ 。在求得方程(12)中的 $x_r(t)$, 即方程(10)、(11)中的 $T_{rp}(t)$ 和 $T_{rs}(t)$ 后, 由式(6)、(7)即可得到梁的挠度响应。

5 算例分析

为了说明上述理论, 作者进行了一系列的数值计算, 包括模态数、时间步长、拉-弯耦合、拉/弯刚度比和冲击波冲量等对挠度响应的影响。结构参数和载荷参数如不作说明均取如下数值: $E=6.98 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, $l=250.0 \text{ mm}$, $B=25.0 \text{ mm}$, $h=2.0 \text{ mm}$, $\rho=2.66832 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{mm}^4$, $p_0=0.5 \text{ MPa}$, $\tau=1.0 \text{ ms}$, $a=0.3$, $\Delta t=0.0001 \text{ ms}$ 。

5.1 模态数的影响

对于连续体梁结构, 自由度数具有无穷多个, 但前几阶模态的响应占总响应的主要成分。为了取得合适的前几阶模态数, 使计算结构能满足精度的要求, 又不使计算时间过长, 作者计算了模态数对挠度响应的影响。图4为模态数取四种情况时的挠度响应曲线, 分别为: (1) $i=1, j=2$; (2) $i=1, 3, j=2, 4$; (3) $i=1, 3, 5, j=2, 4, 6$; (4) $i=1, 3, 5, 7, j=2, 4, 6, 8$ 。从图4看出, 后三种情况的挠度曲线很接近, 第一种情况的挠度曲线相差较大, 如果以(4)的最大挠度值为参考, 即么(1)、(2)、(3)的最大挠度值对(4)的相对误差分别为 -4.758% 、 -0.684% 、 -0.168% , 由此, 在本文的其它计算中, 模态数均取第三种情况能获得很高的精度。

5.2 时间步长的影响

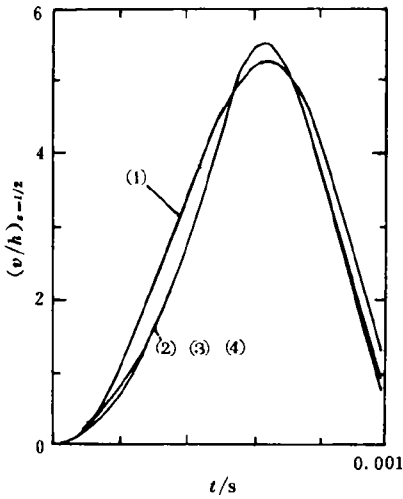
中心差分法计算响应是条件稳定的, 时间步长过大将导致计算过程的发散; 时间步长过小将使计算费时, 因此选取合适的时间步长大小很重要。从理论上讲, 时间步长满足下列条件, 计算过程即可稳定

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (20)$$

式中 T_n 为 n 自由度系统的最小固有周期。

对于文中所取的模态数, 梁的第六阶纵向固有周期最小, $\Delta t_{cr}=0.005186 \text{ ms}$, 而在计算实践中, 当取 $\Delta t_{cr}=0.005 \text{ ms}$ 时, 计算过程即可稳定; 当取 $\Delta t=0.006 \text{ ms}$ 时, 计算过程发散。为了进一步研究时间步长对挠度响应的影响, 作者分别计算了 $\Delta t=0.0001, 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.005 \text{ ms}$ 时挠度响应的大小, 如图5所示。这五种情况的挠度曲线几乎重合, 如果以 $\Delta t=0.0001 \text{ ms}$ 时的最大挠度值为基准, 那么其余时间步长时的最大挠度值对基准

值的相对误差依次为：-0.025%、-0.049%、-0.069%、-0.320%。由此可见，在保证计算过程稳定条件下，时间步长大小对计算结果影响很小，作者在其它算例中取 $\Delta t = 0.0001\text{ms}$ 可得到足够的精度，从节省机时的角度，还可对 Δt 进行放大。



(1) $i=1, j=2$; (2) $i=1, 3, j=2, 4$;
 (3) $i=1, 3, 5, j=2, 4, 6$;
 (4) $i=1, 3, 5, 7; j=2, 4, 6, 8$
 图 4 模态数对挠度的影响

Fig. 4 Influence of mode numbers on deflection

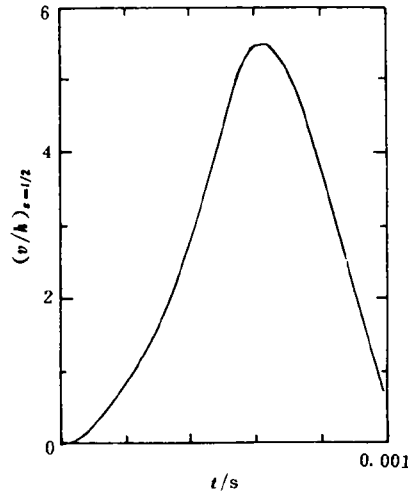


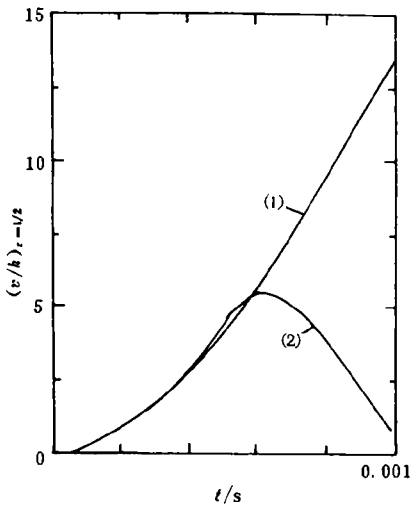
图 5 时间步长 Δt 对挠度的影响
 Fig. 5 Influence of time step Δt on deflection

5.3 拉-弯耦合的影响

对于象简谐激励或梁的厚度较大等情况，由于梁的拉压变形远小于弯曲变形，故常略去拉压变形的影响而使问题得到简化。对于冲击波载荷作用薄梁的情况，由于载荷的作用时间短、强度大，梁的拉压刚度小，所以分析时必须考虑拉压与弯曲变形之间弹性耦合。在方程(1)中令 $e=0$ ，方程(1)即为不耦合的动力方程，计算时只要去掉耦合方程(10)中的二次和三次非线性项，方程(10)就成为纯弯曲变形的动力方程。图6为在其它条件相同情况下拉-弯变形不耦合和耦合的挠度响应曲线，两条曲线相差甚大，不耦合时的最大挠度值要比耦合时的最大挠度值大得多，当耦合时的挠度响应达到最大值时，不耦合时的挠度响应还远没有达到最大，因此拉-弯耦合对梁的挠度响应的影响很大。

5.4 拉/弯刚度比的影响

为了进一步研究拉-弯耦合程度对挠度响应的影响，作者计算了在不同拉/弯刚度比 EA/EI 下挠度响应的大小。图7为在其它条件相同情况下，梁的厚度分别取 2.5mm、2.0mm、1.5mm，使 EA/EI 分别为 1.92、3.00、5.33 时的挠度响应曲线。 EA/EI 分别从 1.92 增加到 3.00 和从 3.00 增加到 5.33，最大挠度值分别增加了 39.64% 和 53.25%，因此对于薄梁结构，拉/弯刚度比越大，梁对冲击波载荷的挠度响应越大。

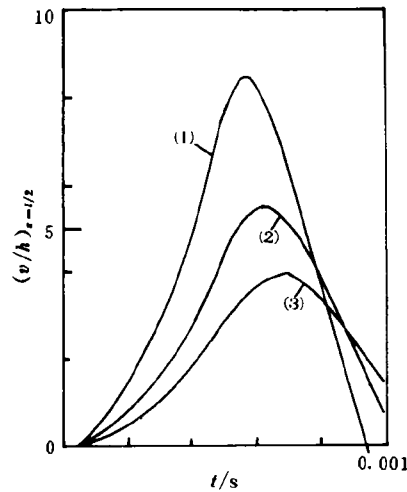


(1)不耦合;(2)耦合

(1)No coupling;(2)Coupling

图 6 拉-弯耦合对挠度的影响

Fig. 6 Influence of tension-bending coupling on deflection

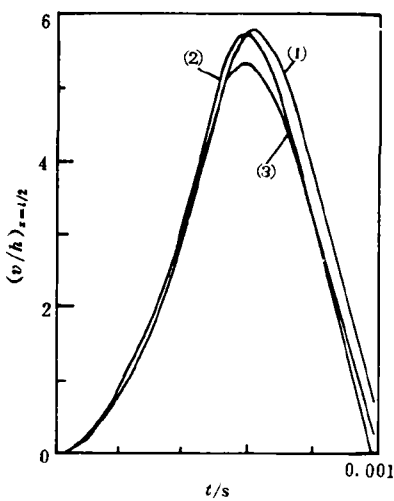


(1) $EA/EI=5.33$;(2) $EA/EI=3.00$;(3) $EA/EI=1.92$

图 7 拉/弯刚度比 EA/EI 对挠度的影响

Fig. 7 Influence of tension-bending stiffness ratio EA/EI on deflection

5.5 冲击波冲量的影响



(1) $I_b=0.1848\text{MPa}\cdot\text{ms}$;(2) $I_b=0.1568\text{MPa}\cdot\text{ms}$;

(3) $I_b=0.1320\text{MPa}\cdot\text{ms}$

图 8 冲击波冲量 I_b 对挠度的影响

Fig. 8 Influence of blast impulse I_b on deflection

为了研究冲击波载荷的强度对梁的挠度响应的影响,并进一步说明文中采用的冲击波冲量概念的合理性,作者分别计算了三组具有不同特征参数的冲击波载荷作用下梁的挠度瞬态响应,见图 8,载荷的特征参数和梁的最大挠度值见表 1。从表 1 和图 8 看出,不论冲击波载荷的初始值 p_0 、持续时间 τ 、衰减系数 a 怎样变化,只要冲击波载荷的冲量大,梁的挠度响应就大,因此,冲击波冲量很好地反映了冲击波载荷的强度大小。

表 1

Table 1

组号	参 数				
	初始值 p_0/MPa	持续时间 τ/ms	衰减系数 a	冲 量 $I_0/(\text{MPa} \cdot \text{ms})$	中点挠度 $(v/h)_{\text{max}}$
(1)	0.48	1.1	0.35	0.1848	5.824
(2)	0.56	0.7	0.40	0.1568	5.765
(3)	0.66	1.0	0.20	0.1320	5.365

6 结 论

(1)文中采用的冲击波冲量能综合地反映冲击波的强度大小。冲击波的冲量越大,梁的挠度响应越大。

(2)梁的拉-弯变形耦合对冲击波载荷作用下薄梁的瞬态响应影响很大,计算时必须考虑,并且拉/弯刚度比越大,梁的挠度响应越大。

(3)用中心差分法计算响应时,所取时间步长必须小于梁的最小固有周期,在满足这一条件下计算才能保证稳定,且时间步长的大小对计算精度影响很小。

(4)在分析梁对冲击波载荷的瞬态响应时,梁的模态数取前六阶即可达到很高的精度。

参 考 文 献

- 1 Mofflin D S, Olson M D, Anderson D L. Finite Strip Analysis of Blast Loaded Plates. Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Europe-US Symposium, Norway, 1985. 539~553
- 2 Jiang J, Olson M D. Nonlinear-Dynamic Analysis of Blast Loaded Cylindrical Shell Structures. Computers & Structures, 1991, 41(1): 41~52
- 3 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley-Interscience, 1979.

TRANSIENT RESPONSE OF TENSION-BENDING COUPLED BEAM UNDER BLAST LOADING

Xia Pinqi

(Department of Aircraft Engineering Nanjing
University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

ABSTRACT The large-deflection transient response of nonlinear thin beam structure with tension-bending coupling to blast loading is analysed by the theory of large deflection elastic beam and central difference method in this paper. An impulse concept is adopted to fully describe the intensity of blast loading. Some very useful conclusions are obtained from further investigations of the influences of mode number, time step, tension-bending coupling, tension/bending stiffness ratio and blast impulse on the deflection responses.

KEY WORDS blast, tension-bending coupled beam, transient response