

应力波作用下颗粒介质的动力特性研究^{*}

王明洋 钱七虎

(南京工程兵工程学院 南京 210007)

摘要 运用微结构连续介质力学和多刚体系统动力学的理论方法,考虑了颗粒体的拓扑结构及颗粒体之间的局部非线性相互作用,通过引进恢复系数,导出了适合于大变形运动(包括平动和转动)情况下,颗粒体间的滑移和分离的宏观弹塑性本构关系。最后,还给出了几种规则排列条件下,颗粒介质的本构关系。

关键词 颗粒介质 恢复系数 微结构连续介质力学

中图法分类号 O347.4

1 前言

爆炸、冲击及天然地震所激发的应力波在周围介质中传播并产生振动,当应力波携带的能量足够大时就会引起介质及嵌固于其中的工程结构的变形和破坏。因此,无论是为了分析并控制地震波的传播,防御和减轻地震灾害,还是研究岩石动力学,以解决从岩石破碎到防护工程设计中的生产实际问题,都必须掌握应力波在地壳岩石中的传播规律。然而,地壳岩石性质及其结构千变万化,造成应力波在其中传播的情况极其复杂。尽管人们早已发现爆炸、冲击及天然地震的应力波在通过断层时产生了衰减,迄今为止,对这一复杂的地质因素还缺乏深入的研究。

受构造运动的强烈作用,断层中的透镜体可以看作是颗粒体。试验研究表明^[1],应力波在颗粒介质中传播时,不仅取决于颗粒体自身的物理力学性质及颗粒体间的填充物及孔隙率(不涉及液、气两相介质的影响),而且极大地受颗粒体拓扑结构及颗粒体局部的相互作用的影响。目前,可以用来反映上述影响的途径大致有两种,一是离散单元法,另一种是微结构连续力学分析法。

离散单元法起源于分子动力学,它是基于牛顿第二定律,根据每个颗粒与相邻颗粒相互作用的运动,建立运动过程并结合CAD技术来求解颗粒运动及其材料变形的数值方法。迄今已发展了多种离散单元法(包括刚块法、离散单元法、刚弹法),现在国外学者将离散单元法试图用于非连续介质的动力分析,包括强动载的模拟、应力波的传播、岩块破碎、爆炸的运动及原子冲击、武器效应和边坡稳定的动力分析^[2~3]。但从研究的情况看,远不能说已达到了成熟实用的地步,特别是对爆炸冲击现象,离散单元法很难反映非连续颗粒之间的接触冲击,颗粒能量逸失等动力效应情况。对于颗粒数目较多的颗粒介质,存在惊

* 国家自然科学基金资助课题。

1994年7月25号收到原稿,1995年5月26日收到修改稿。

人的计算费用,而且在计算过程中存在许多不确定参数,因此这一方法的有效性仍然取决于早期大量输入参数的可信程度,这是这种方法需要深入研究的问题。相对于这一方面,微结构连续力学分析法就显得优越了。

在微结构连续力学模型中,用于描述颗粒体变形特征是通过微观量(接触力、接触位移等)进行系统平均而得到的宏观连续变量(应力、应变)来表示的。

许多学者沿着这个方向进行了卓有成效的研究^[4~5],然而这些研究工作均假设:在颗粒介质间运动过程中接触点数量不变,没有考虑两颗粒体的转动效应;同时认为应变场是均匀的。因此,它们仅满足在低应力水平作用下,颗粒体拓扑结构变化很小的变形范围。

近年来,C. S. Chang 发表了一系列关于颗粒材料力学研究的文章,已逐步形成了一套较系统的微结构理论,在 C. S. Chang 的力学模型中^[6],没有涉及动力问题。我们运用微结构理论,通过引进恢复系数,导出了颗粒介质的弹性本构关系,并给出了几种特殊排列情况下颗粒介质的本构关系。

2 基本理论

2.1 动力接触模型

无论是颗粒与颗粒间还是颗粒与周围介质间的相互作用就其力学性质而言属于固体力学中的接触问题。由文献[7]的研究可知,准静态的接触变形理论适合于应力波最小谱波长远大于颗粒特征尺寸条件下的动力分析,本文的动力分析属于上述范畴,因此采用文献[7]给出的接触模型,如图1。

图1中,颗粒看作刚体,其变形能反映在附加的力学元件上,弹簧代表局部的变形, μ 是摩擦系数, D_a^* 、 D_b^* 为辐射阻尼系数。

2.2 运动场的描述

如图2,设颗粒 a 及 b 在 c 处接触, x_a^c 、 x_b^c 和 x_c^i 分别是颗粒 a 、 b 及接触点 c 的整体坐标。颗粒 a 、 b 的速度矢量及角速度(以逆时针方向为正)分别是 \dot{U}_a^c 、 \dot{U}_b^c 、 $\dot{\theta}_a^c$ 和 $\dot{\theta}_b^c$ 。由刚体运动学关系,颗粒 a 、 b 在 c 处的运动速度分别为:

$$\dot{U}_a^{c^c} = \dot{U}_a^c + e_{i,jk} \dot{\theta}_a^c r_k^c \quad (1)$$

$$\dot{U}_b^{c^c} = \dot{U}_b^c + e_{i,jk} \dot{\theta}_b^c r_k^c \quad (2)$$

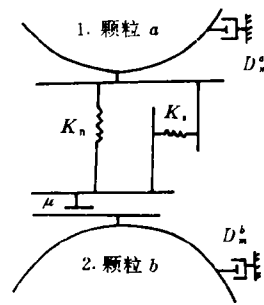
(1)(2)式中: $r_k^c = x_k^c - x_k^a$, $r_k^c = x_k^c - x_k^b$ 。

颗粒 a 相对于颗粒 b 在接触点 c 处的相对速度为:

$$\dot{U}_c^{ab} = \dot{U}_c^{b^c} - \dot{U}_c^{a^c} = \dot{U}_b^c - \dot{U}_a^c + e_{i,jk} (\dot{\theta}_b^c r_k^b - \dot{\theta}_a^c r_k^a) \quad (3)$$

式中 $e_{i,jk}$ 为三阶置换张量。

两颗粒间的相对转动将伴随着滑动的同时,可能产生滚动(在接触切平面内具有相对角速度)和扭转运动,但对类似断层透镜体带内颗粒接触点数较多的接触,如文献[5]研究



1. Granular a; 2. Granular b

图1 动力接触模型

Fig. 1 Dynamic contact model

表明的这种情况下, 上述运动效应可以忽略不计。

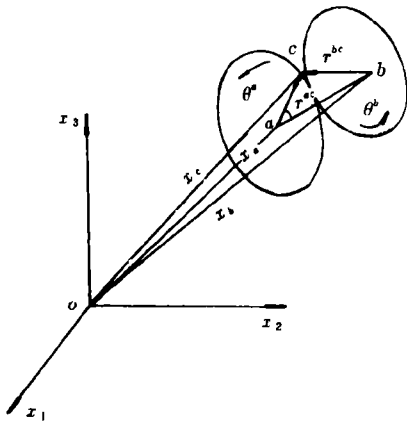


图 2 颗粒接触运动描述

Fig. 2 Description of contact motion for particulates

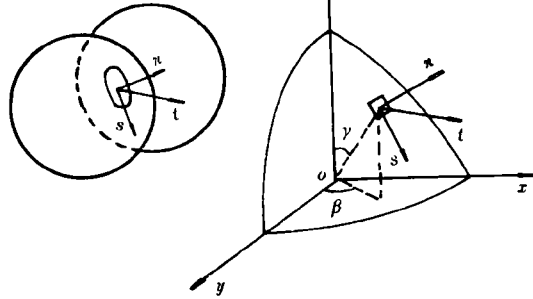


图 3 接触颗粒的局部坐标

Fig. 3 Local coordinate system for the interparticle contact

如图 3, 将(3)式的整体坐标系下的变量经坐标变换成接触处的局部坐标系下的法向和切向速度。

$$\dot{U}_i^\zeta = T_{ij} \dot{U}_j^{ab} \quad (4)$$

(4)式中, T_{ij} 为二阶坐标变换张量。对(4)式进行离散, 可得其对应的法向和切向位移为

$$\delta_i^\zeta(t + \Delta t) = \delta_i^\zeta(t) + \dot{U}_i^\zeta \Delta t \quad (5)$$

式中 Δt 为时间增量。

2.3 局部的力-位移关系

按图 1 给定的接触模型, 弹簧的伸长量与接触力可以写成一般的关系, 设 f_i^ζ 为接触力, 则接触力与接触位移的关系为

$$f_i^\zeta = K_{ij}^\zeta \delta_j^\zeta - \bar{f}_i^\zeta \quad (6)$$

式中: δ_j^ζ 由(5)式给出; \bar{f}_i^ζ 是由于局部的塑性流动产生的松弛力; K_{ij}^ζ 为接触刚度。由接触理论, 对于同种材料的接触问题, 法向与切向刚度是不耦合的, 即使对不同的材料接触, 这种耦合效应也是很小的, 因此 K_{ij}^ζ 可写成

$$K_{ij}^\zeta = K_n^\zeta n_i^\zeta n_j^\zeta + K_s^\zeta (s_i^\zeta s_j^\zeta + t_i^\zeta t_j^\zeta) \quad (7)$$

式中: n_i^ζ, s_i^ζ 和 t_i^ζ 如图 3 所示。(6)式可以写成分量形式

$$f_n^\zeta = K_n^\zeta \delta_n^\zeta - \bar{f}_n^\zeta \quad (8)$$

$$f_s^\zeta = K_s^\zeta \delta_s^\zeta - \bar{f}_s^\zeta \quad (9)$$

在(8)式及(9)式的塑性动力分析中, 假如将颗粒材料的应变率效应、应变强化等因素均考虑进去, 问题将非常复杂。几十年来, 作为一阶近似的刚塑性理论用于分析塑性问题

一直都在进行,并在实际工程中得到了运用。但如文献[7]研究指出,对于应力波作用时间远大于任一颗粒最小自振周期的情况,采用一阶近似的刚塑性理论计算结果误差较大。因此,必须计及弹性效应以对一阶近似理论加以修正。然而,岩石颗粒的接触力与位移变形的关系十分复杂,暂时采用理想的弹塑性力与位移关系来简化(如图4)。另外,若采用有限元数值方法来处理局部的塑性变形,对于大量的颗粒接触实际上是不可能的。为此我们引进恢复系数来处理局部的塑性变形。

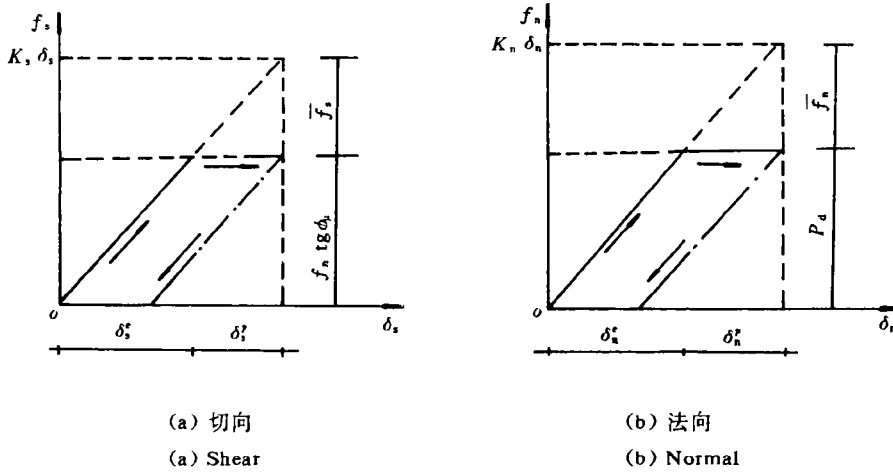


图4 摩擦接触的理想弹塑性本构关系

Fig. 4 Constitutive model for frictional contact

将(1)(2)式的速度变换到局部坐标系下为

$$V_i^{ac} = T_{ij} \dot{U}_j^{ac} \quad (10)$$

$$V_i^{bc} = T_{ij} \dot{U}_j^{bc} \quad (11)$$

在不失一般性情况下,以球形颗粒的平面运动为例,设两球体 a, b 的质量为 M^a, M^b , 半径分别为 R^a 和 R^b , 如图5, 此时(10)、(11)式可以写成法向的速度

$$V_n^{ac} = \dot{U}_i^{ac} e_i = \dot{U}_i^a e_i - \dot{\theta}^a R^a t_i e_i \quad (12)$$

式中:单位矢量 e_i, t_i 如图5所示, $e_i = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $t_i = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ 。显然存在如下关系: $t_i e_i = 0, t_i t_i = 1$, 则(12)式简化为(13)式, 同理(11)式简化为(14)式

$$V_n^{ac} = \dot{U}_i^a e_i \quad (13)$$

$$V_n^{bc} = \dot{U}_i^b e_i \quad (14)$$

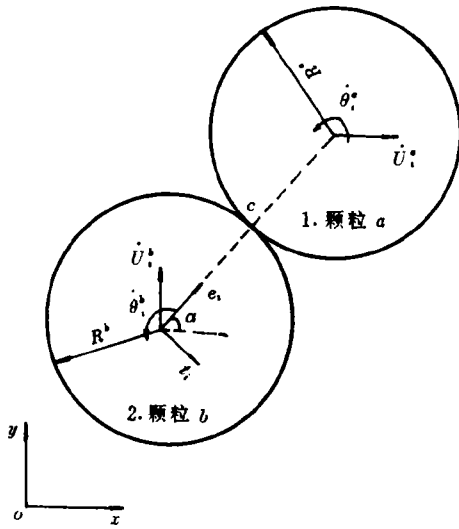
对于切向,将(10)、(11)式乘以 t_i 得

$$V_s^{ac} = \dot{U}_i^a t_i - \dot{\theta}^a R^a \quad (15)$$

$$V_s^{bc} = \dot{U}_i^b t_i + \dot{\theta}^b R^b \quad (16)$$

考虑法向及切向力 f_n^c, f_s^c , 由牛顿第二定律分别写出其法向及切向的运动方程为

$$f_n^c = M^a \frac{dV_n^{ac}}{dt} = -M^b \frac{dV_n^{bc}}{dt} \quad (17)$$



1. Granular a; 2. Granular b

图 5 两圆球颗粒接触

Fig. 5 Contact of two spheres

$$f_s^c = M^a \frac{d}{dt} (\dot{U}_i^a t_i - \dot{\theta}^a R^a) \\ = - M^b \frac{d}{dt} (\dot{U}_i^b t_i + \dot{\theta}^b R^b) \quad (18)$$

相对速度等于相对位移对时间的导数,

即

$$V_n^{bc} - V_n^{ac} = \frac{d\delta_n^c}{dt} \quad (19)$$

$$V_s^{bc} - V_s^{ac} = \frac{d\delta_s^c}{dt} \quad (20)$$

再由接触点 c 处的动量矩守恒可得

$$\frac{d}{dt} \{-M^a V_s^{ac} R^a + M^a [(R^a)^2 + (K^a)^2] \dot{\theta}^a\} \\ = \frac{d}{dt} \{M^b V_s^{bc} R^b + M^b [(R^b)^2 + (K^b)^2] \dot{\theta}^b\} \quad (21)$$

式中: K^a 和 K^b 为颗粒 a, b 的回旋半径。由 (17) 式可得

$$f_n^c = M \frac{d^2 \delta_n^c}{dt^2} \quad (22)$$

式中, $M = M^a M^b / (M^a + M^b)$ 。对 (22) 式关于 δ_n^c 积分给出

$$\frac{1}{2} M \{V_n^2 - (\frac{d\delta_n^c}{dt})^2\} = \int_0^{\delta_n^c} f_n^c d\delta_n^c \quad (23)$$

式中, $V_n = (V_n^{bc} - V_n^{ac})|_{t=0}$ 是接触开始两颗粒法向相对运动速度。当压缩变形达到最大值 δ_n^* 时, $d\delta_n^c/dt = 0$, 因此 (23) 式变为

$$\frac{1}{2} M V_n^2 = \int_0^{\delta_n^*} f_n^c d\delta_n^c \quad (24)$$

(24) 式代表局部变形所吸收的运动能。由 (18) 式及 (21) 式消去 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\theta}^b$, 则有

$$f_s^c = \frac{M^a}{1 + (R^a/K^a)^2} \cdot \frac{dV_s^{ac}}{dt} = - \frac{M^b}{1 + (R^b/K^b)^2} \frac{dV_s^{bc}}{dt} \quad (25)$$

令 $M_a^* = \frac{M^a}{1 + (R^a/K^a)^2}$, $M_b^* = \frac{M^b}{1 + (R^b/K^b)^2}$, $M^* = \frac{M_a^* M_b^*}{M_a^* + M_b^*}$, 由 (25) 式可得

$$f_s^c = M^* \frac{d^2 \delta_s^c}{dt^2} \quad (26)$$

若 $V_s = (V_s^{bc} - V_s^{ac})|_{t=0}$ 是接触开始时切向相对运动速度, δ_s^* 表示切向位移的最大值, 同理有

$$\frac{1}{2} M^* V_s^2 = \int_0^{\delta_s^*} f_s^c d\delta_s^c \quad (27)$$

当变形达到最大值以后, 弹性恢复所做的功等于回弹的运动能, 有如下关系

$$\frac{1}{2}MV_n'^2 = \int_0^{\delta_n^c} f_n^c d\delta_n^c \quad (28)$$

$$\frac{1}{2}M^*V_s'^2 = \int_0^{\delta_s^c} f_s^c d\delta_s^c \quad (29)$$

(28)(29)式中,撇号“'”代表回弹的变量。

法向和切向恢复系数 e_n, e_s 分别定义如下

$$e_n = V_n'/V_n, \quad e_s = V_s'/V_s \quad (30)$$

根据(30)式及(24)、(27)、(28)、(29)式则有

$$e_n^2 = \frac{\int_0^{\delta_n^c} f_n^c d\delta_n^c}{\int_0^{\delta_n^c} f_n^c d\delta_n^c}, \quad e_s^2 = \frac{\int_0^{\delta_s^c} f_s^c d\delta_s^c}{\int_0^{\delta_s^c} f_s^c d\delta_s^c} \quad (31)$$

根据单向联系条件,若 $f_n^c < 0$, 则有 $f_n^c = 0, f_s^c = 0$ 。若 f_n^c 超过弹性限后某一值时,则接触处产生塑性变形。根据(31)式第一式及图4(b)可知

$$\int_0^{\delta_n^c} f_n^c d\delta_n^c = \frac{1}{2}P_d\delta_n^c \quad (32)$$

$$\int_0^{\delta_n^c} f_n^c d\delta_n^c = P_d\delta_n^c + \frac{1}{2}P_d\delta_n^c \quad (33)$$

(32)(33)式中: P_d 是平均接触动压力, δ_n^c, δ_n^p 分别为法向弹性变形位移和塑性变形位移。由(32)式与(33)式之比得

$$e_n^2 = \frac{\delta_n^c}{2\delta_n^c + \delta_n^p} \quad (34)$$

$$\delta_n^c = \delta_n^c + \delta_n^p \quad (35)$$

由(34)式及(35)式可推得

$$\frac{\delta_n^p}{\delta_n^c} = \frac{1 - e_n^2}{1 + e_n^2} \quad (36)$$

从(36)式可以看出,当 $e_n = 0$ 时,表示刚塑性,当 $e_n = 1$ 时,则表示完全弹性,这与恢复系数的定义是一致的。由于变形与材料参数及碰撞相对运动速度有关,所以从(36)式可推出恢复系数也与上述因素有关,由(8)式及图4可知

$$f_n^c = K_n^c \delta_n^c \left(1 - \frac{\delta_n^p}{\delta_n^c}\right) \quad (37)$$

将(36)式代入(37)式得

$$f_n^c = K_n^c \delta_n^c \frac{2e_n^2}{1 + e_n^2} \quad (38)$$

(38)式表示接触处法向的局部力与位移关系。若 $f_n^c \leq P_d$, 则(38)式中 $e_n = 1$ 。

对于切向位移情况,当切向力 f_s^c 达到某一最大值时,就会发生塑性剪切滑移,塑性滑动由 Mohr-Coulomb 定律控制。由下式确定

$$|f_s^c| \leq f_n^c \tan \phi_k \quad (39)$$

式中, ϕ_k 是颗粒体自身的内摩擦角,此时状态为无滑动弹性阶段。若切向力超过摩擦力,

即

$$|f_s^c| > f_n^c \tan \phi_s \quad (40)$$

则令

$$f_s^c = \mu f_n^c \text{sign}(f_s^c) \quad (41)$$

依(9)式及图 4(a),按照与法向类似的推导,则有

$$f_s^c = K_s^c \delta_s^c \frac{2e_s^2}{1+e_s^2} \quad (42)$$

为了准确确定恢复系数,就必须知道真实的接触力与位移的关系。然后按(31)式进行计算。遗憾的是这种关系还没有精确给定。文献[8]根据理想弹塑性的接触关系及 Hertz 理论,给出了法向恢复系数良好的近似表达式,即

$$e_n^2 = \frac{3\pi^{5/4} 4^{3/4}}{10} \left(\frac{P_d}{E^*} \right) \left(\frac{\frac{1}{2} M V_n^2}{P_d R^3} \right)^{1/4} \quad (43)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_a^2}{E^a} + \frac{1-\nu_b^2}{E^b}, \frac{1}{R} = \frac{1}{R^a} + \frac{1}{R^b}$$

式中: $P_d \approx 3.0 Y_d$, Y_d 是动屈服强度, ν_a, ν_b 分别是颗粒 a, b 的泊松比, E^a 及 E^b 分别是颗粒 a, b 的弹性模量,其它符号与前述含义相同。

对于弹塑性接触冲击的切向恢复系数,迄今还没有近似表达式。作为工程应用上的一种近似,我们采用文献[9]的切向恢复系数与法向恢复系数的关系求出切向恢复系数(由文献[8]及本文颗粒为岩石材料可知,碰撞结束时一般为法向滞后状态),因此有如下关系

$$e_s = \alpha_s (1 + e_n) - 1 \quad (44)$$

(44)式中, α_s 与入射角及碰撞速度有关,写成具体表达式为

$$\alpha_s = \frac{7}{2} \mu \frac{\dot{U}_s^c}{\dot{U}_n^c} \quad (45)$$

式中: μ 是图 1 所示的摩擦系数, \dot{U}_s^c, \dot{U}_n^c 与(4)式中分量含义相同。

2.4 局部应力-应变关系

对于颗粒介质不能沿用连续介质中对应力、应变的定义。我们利用虚功原理导出的颗粒材料的平均应力、平均应变张量的概念来给出应力、应变的表达式。

由(5)式颗粒 a 对于颗粒 b 在接触点 c 处的相对位移增量为:

$$\Delta \delta_i^{ab} = \dot{U}_i^b \Delta t - \dot{U}_i^a \Delta t + e_{ijk} (\dot{\theta}_j^b r_k^b \Delta t - \dot{\theta}_j^a r_k^a \Delta t) \quad (46)$$

将(46)式中的 $\dot{U}_i^b \Delta t, \dot{U}_i^a \Delta t$ 用泰勒级数在接触点 c 处展开式相减后得

$$\dot{U}_i^b \Delta t - \dot{U}_i^a \Delta t = \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial x_j} (x^c) \Delta t r_j^{ab} + \dots \quad (47)$$

(47)式中, $r_j^{ab} = x_j^b - x_j^a$ 。

假设在一个微单元内,每个颗粒具有与平均转角增量相同的转角增量,则有

$$\dot{\theta}_j^b \Delta t = \dot{\theta}_j^a \Delta t = \dot{\theta}_j \Delta t \quad (48)$$

式中, $\dot{\theta}_j \Delta t$ 为微单元的平均转角增量。由(47)式及(48)式,(46)式可写为:

$$\Delta \delta_i^{ab} = (\dot{U}_{i,j} \Delta t - e_{ijk} \dot{\theta}_k \Delta t) r_j^{ab} + \dots \quad (49)$$

令 $\Delta \varepsilon_{ij} = U_{i,j} \Delta t - e_{i,j} \dot{\theta}_i \Delta t$, $\Delta \varepsilon_{ij}$ 此时称为应变增量, 则(49)式可表示为

$$\Delta \delta_i^{ab} = \Delta \varepsilon_{ij} r_j^{ab} + \dots \quad (50)$$

设在微单元内第 k 个接触点的虚位移为 $\Delta \delta_i^k$, 由(50)式接触力所做的虚功为(取一阶近似)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^k \Delta \delta_i^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^k \Delta \varepsilon_{ij} r_j^k \quad (51)$$

式中: 因子 $1/2$ 是表明每个颗粒计算两次, N 为微单元内中心处颗粒的接触点数, $\Delta \varepsilon_{ij}$ 为虚应变增量。因此, 单位体积内所做的虚功为

$$W = \frac{1}{2V} \sum_{i=1}^N f_i^k \Delta \varepsilon_{ij} r_j^k \quad (52)$$

此外, 在平均应力 $\bar{\sigma}_{ij}$ 作用下产生的虚应变增量 $\Delta \varepsilon_{ij}$ 所做的虚功可为

$$W = \bar{\sigma}_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} \quad (53)$$

式中, $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij} dV$ 。由(52)式及(53)式结合虚功原理有

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_{i=1}^N f_i^k r_j^k \quad (54)$$

将(54)式写成增量形式为

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_{i=1}^N \Delta f_i^k r_j^k \quad (55)$$

上式表明, 平均应力不仅与接触力有关, 而且与接触点数有关。如果对单个颗粒进行分析, 则 σ_{ij} 是围绕颗粒的局部应力; 如果对整个颗粒体进行分析, 则 σ_{ij} 代表的是平均应力。很显然, 只要接触力在微单元边界上保持连续, 在微单元边界上的应力也会自然保持连续条件。式中 Δf_i^k 由(38)式及(42)式的增量形式给出, 即

$$\Delta f_i^k = K_i^k \Delta \delta_i^k \frac{2e_i^2}{1+e_i^2} \quad i = n, s \quad (56)$$

因此, 对在第 M 个微单元内, 平均应力增量及平均应变增量可写为

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^M = \frac{1}{2V^M} \sum_{i=1}^N \Delta f_i^k r_j^k \quad (57)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^M = (U_{i,j}^M - e_{i,j} \dot{\theta}_i^M) \Delta t \quad (58)$$

式中, V^M 为第 M 个微单元的体积。

设第 M 个微单元的中心处颗粒的序号与单元序号一致, 即为 M , 其相邻某一颗粒的序号为 k , 根据(50)式有如下近似关系

$$\Delta \delta_i^{Mk} = \Delta \varepsilon_{ij}^M r_j^{Mk} \quad (59)$$

(59)式是一线性关系, 它相当于给非线性位移场施加了一约束而得到的线性位移场。为了得到非线性位移场, 可以通过解除约束的办法来得到。由于相邻颗粒对中心颗粒的相互作用, 区域中心颗粒并非处于静止状态, 而是处于动平衡状态。由此导致一附加的位移增量 $\Delta \delta_i^*$, 这样在第 M 个微单元内, 在第 k 颗粒与 M 颗粒之间有

$$\Delta \delta_i^{Mk} = \Delta \varepsilon_{ij}^M r_j^{Mk} + \Delta \delta_i^* \quad (60)$$

$\Delta \delta_i^*$ 由力的平衡条件确定, 即

$$\Delta \delta_i^* = T_{ijm}^M \Delta \varepsilon_{jm}^M \quad (61)$$

式中, $T_{ijm}^M = -(\sum_{k=1}^N K_{ij}^{Mk})^{-1} (\sum_{k=1}^N K_{ij}^{Mk} r_{mk}^{Mk})$, 将(61)式代入(60)式得

$$\Delta \delta_i^{Mk} = (\delta_{ij} r_{mk}^{Mk} - T_{ijm}^M) \Delta \varepsilon_{jm}^M \quad (62)$$

式中, δ_{ij} 为二阶置换张量。根据(56), (57~58)及(62)式得局部的应力应变增量关系为

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^M = C_{ijkl}^M \Delta \varepsilon_{kl}^M \quad (63)$$

式中: C_{ijkl}^M 为第 M 个微单元的刚度。

$$C_{ijkl}^M = \frac{1}{2V^M} \sum_{s=1}^N \bar{K}_{ij}^{Ms} (\delta_{jk} r_{ls}^{Ms} - T_{jkl}^M) r_{is}^{Ms} \quad (64)$$

式中, \bar{K}_{ij}^{Ms} 为等效接触刚度, 其分量为

$$\bar{K}_n^{Ms} = K_n^{Ms} \frac{2e_n^2}{1 + e_n^2}, \quad \bar{K}_s^{Ms} = K_s^{Ms} \frac{2e_s^2}{1 + e_s^2}$$

2.5 总体的应力-应变关系

设总的平均应力, 应变为 $\Delta \bar{\sigma}_{ij}, \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}$, 由平均应力, 应变概念, 文献[10]有

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (65)$$

式中, $C_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{M=1}^{NM} V^M C_{ijkl}^M, V = \sum_{M=1}^{NM} V^M, NM$ 为总的微单元数。

在求 C_{ijkl} 刚度张量过程中, 为了考虑局部应变张量增量 $\Delta \varepsilon_{ij}^M$ 的不均匀性, 文献[6]在不均匀颗粒介质中的随机分布研究中引进概率密度函数, 运用自洽合分析方法(Self-Consistent Method)较好解决了这一问题。设概率密度为 H_{ijkl}^M , 则 $\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}$ 与 $\Delta \gamma \varepsilon_{ij}^M$ 的关系为

$$\Delta \varepsilon_{ij}^M = H_{ijkl}^M \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (66)$$

将(66)式代入(65)式中, 则刚度张量为

$$C_{ijkl} = \frac{1}{V} \sum_{M=1}^{NM} V^M C_{ijmna}^M H_{mnkl}^M \quad (67)$$

有关 H_{mnkl}^M 的详细推导可参见文献[11]。

2.6 几种特殊排列情况的本构关系

对于规则排列的球形颗粒, 可以运用上述公式得出其本构关系。我们只对二维对称接触进行推导, 它包括两种接触方式, 一种是菱形四点接触, 另一种是六角密集接触。在二维情况下, 应力应变关系为

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} \\ \Delta \sigma_{yy} \\ \Delta \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} \\ \Delta \varepsilon_{yy} \\ \Delta \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (68)$$

通过推导, 二维对称接触的刚度系数可以统一表示为下式:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \xi_1 K_n + \xi_5 K_s, & C_{22} &= \xi_2 K_n + \xi_5 K_s, & C_{33} &= \xi_6 K_n + (\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_5) K_s / 4, \\ C_{31} &= C_{13} = \xi_3 K_n + (\xi_4 - \xi_3) K_s / 2, & C_{32} &= C_{23} = \xi_4 K_n + (\xi_3 - \xi_4) K_s / 2, \\ C_{21} &= C_{12} = \xi_5 (K_n - K_s), & \xi_1 &= \beta \sum_{k=1}^{\sqrt{2}} \cos^4 \theta_k, & \xi_2 &= \beta \sum_{k=1}^{\sqrt{2}} \sin^4 \theta_k, \\ \xi_3 &= \beta \sum_{k=1}^{\sqrt{2}} \cos^3 \theta_k \sin \theta_k, & \xi_4 &= \beta \sum_{k=1}^{\sqrt{2}} \sin^3 \theta_k \cos \theta_k, & \xi_5 &= \beta \sum_{k=1}^{\sqrt{2}} \sin 2\theta_k \end{aligned}$$

式中: $\beta = 4 / [(1+e)\pi]$, e 是孔隙比。至于三维规则排列, 利用上述公式也可推导, 我们不再赘述。

3 结 论

1. 颗粒介质间的相互作用就其本质来说属于固体力学中的接触问题, 在研究应力波通过颗粒介质衰减规律建立动力接触模型时, 若应力波的最小谱波长远大于颗粒特征尺寸, 采用本文的图 1 给出的模型是合理简单的。

2. 我们通过引进恢复系数给出了颗粒之间局部的弹塑性接触力与位移的关系, 大大简化了复杂的非线性动态接触问题, 系统导出的颗粒介质宏观弹塑性本构关系, 使研究颗粒介质的动力响应朝工程实用迈进了一步。

3. 文中推导的特殊排列下的本构关系, 清楚地说明颗粒材料的动力性能不仅与材料本身的物理力学特性有关, 而且与其拓扑结构(排列方式)和荷载大小有关。

4. 文中涉及的恢复系数, 因此, 有必要展开对恢复系数的理论与试验研究。

参 考 文 献

- 1 Shukla A, Damania C. *Exp Mech*, 1987, 27(8): 268~281
- 2 Walton Otis R. University. of California Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCRL-52915, 1987.
- 3 Williams I W. *Numerical Methods in Geomechanics*, Innsbruck Berkely, 1988, 1799~1808
- 4 Duffy J, Mindlin R D. *J Appl Mech*, ASME. 1957, 24: 585~593
- 5 Chang C S, Misra A. *J Engrg Mech*, ASCE, 1989, 115(4): 704~720
- 6 Chang C S, Misra A. *J Engrg Mech*, ASCE. 1992, 118(8): 1692~1707
- 7 王明洋. 爆炸应力波通过地质构造断层的动力学模型理论与试验研究: [博士学位论文]. 南京: 南京工程兵工程学院, 1994
- 8 Johnson K L. *Contact Mechanics* Cambridge. Cambridge University press, 1986
- 9 吕茂烈. 固体力学学报, 1984, 4(1): 318~329
- 10 Hill R. *J Mech Physics Solids*, 1967, 15(2): 79~95
- 11 Mura S. *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff, The Hague the Netherlands. 1982

STUDIES ON THE DYNAMIC PROPERTIES FOR GRANULAR MEDIUM UNDER STRESS WAVE

Wang Mingyang, Qian Qihu

(*Nanjing Engineering Institute, Nanjing, 210007*)

ABSTRACT In this paper, taking into account the topological structure and local non-linear dynamic interaction of interparticles and introducing coefficient of restitution, a macro-elasto-plastic relation with sliding and separation of particles under large deformation is derived with the multiple rigid dynamics and micro-mechanics approach. At last, the constitution relations are given for the special arrangements of the particles.

KEY WORDS granular medium, coefficient of restitution, micro-mechanics