

损伤弹性材料的有效模量及本构关系*

周光泉 樊坚强

(中国科学技术大学力学与机械工程系 合肥 230026)

摘要 考虑了微裂纹之间的相互作用,利用随机熔断丝网络(Random fuse network)作为模型,模拟了脆性材料在外载荷作用下,其有效模量随损伤的演变行为,并考察了系统含损伤的本构关系。发现在损伤初期,有效模量和损伤具有线性下降关系;而在后期,由于损伤局部化,有效模量迅速下降,提出了一个有效模量随损伤变化的非线性关系。讨论了利用网络模型来研究材料含损伤本构关系的可行性和优越性。

关键词 有效模量 本构关系 损伤 熔断丝网络

中图法分类号 TB301

1 引言

损伤对材料宏观性能的影响是在细观层次上研究损伤规律的目的之一,尤其是研究损伤对材料有效模量及本构关系的影响,不仅具有学术意义,而且具有工程应用价值。然而,由于损伤的复杂性及微裂纹相互作用在理论分析上所遇到的实际困难,大部分的工作是在连续介质范畴内利用平均化方法进行的^[1,2]。一般假定微裂纹在材料内部的分布是完全随机的,并且不考虑裂纹之间的相互作用。其中不少的结果认为,弹性模量随损伤呈线性下降关系,自愈性方法就是其中的代表^[3]。这种假设对于损伤初期可以认为是近似成立的,而在后期微裂纹之间的相互作用就不能简单地被忽略。

近十年来,在非线性和科学领域内,网络模型得到广泛的应用和发展^[4]。这种方法最大的优点就是其自然地考虑到了微裂纹之间的相互作用。网络一般由具有简单性质的单元构成,如梁^[5]、弹簧^[6,9]、熔断丝^[7]等。它们在受力或在电流作用下,相继断开形成损伤,并不断积累最后导致网络的破坏。熔断丝网络同弹簧网络具有一一对应的变量关系^[8]。利用这种网络模型来研究损伤材料的有效模量及本构关系的工作尚不多见。我们将利用熔断丝网络模型来半定量地讨论脆性材料在损伤破坏过程中的有效模量变化以及系统的本构关系。

2 模型

考虑一个 $L \times L$, 倾斜 45° 的熔断丝网络(如图1),其上下边界施加一恒定的电流(相当于常载)或一恒定的电压(相当于常位移),左右边界为周期性边界。定义:在电流作用下,网络中孤立单元的断开称之为成核;与裂纹尖端相邻的单元断开为该裂纹的扩展。

* 获国家自然科学基金重点项目“材料与结构动态响应”资助。

1995年2月23日收到原稿,10月19日收到修改稿。

假定每个单元的断开速率和作用在其上电流的 η 次方成正比,即

$$\tau_j \sim i_j^\eta \quad (1)$$

其中: η 是电流集中的敏感指数; i_j 和 τ_j 分别是第 j 个单元的电流和断开速率。

每个单元的断开概率 p_j 可表示为

$$p_j = \tau_j / \sum_{i=1}^N \tau_i = i_j^\eta / \sum_{i=1}^N i_i^\eta \quad (2)$$

其中: N 是当前损伤状态下系统中所有未断开单元的总数。

在整个模拟过程中,首先通过求解线性方程组得到网络中的电流分布,即每个单元上电流;其次通过 Monte-carlo 方法随机选取一个单元,并根据(2)式求出其断开的概率;然后在 $0 \sim 1$ 之间选取一个随机数 x ,如果该单元的断开概率 p_j 大于 x 则此单元就断开,否则重新选取单元直到找到一个断开单元为止;接下来重新计算电流的分布,重复上述过程直到系统发生断裂为止。

定义系统的损伤 P 为

$$P = N_f / N_T \quad (3)$$

其中: N_f 是当前损伤状态下系统中所有断开单元的总数, N_T 是单元总数。记网络在破坏时的损伤值为 P_c ,称为损伤阈值。

3 有效模量随损伤的演化关系

网络一旦遭到损伤,其系统模量也就是网络的电导率就会随之而降低,这等价于材料遭受损伤后弹性模量的降低。有效模量定义为当前损伤状态下,电流强度(相当于应力)和电压(相当于应变)的比值。

假定网络单元完全随机断开,即令 $\eta=0$ (相当于逾渗网络的形成过程),计算结果表明,有效模量随损伤呈线性下降关系,即

$$G/G_0 = 1 - 2P \quad (4)$$

其中: G 为有效模量, G_0 为初始模量。

由(4)式和 Budiansky 等^[3]的结果以及 Beale 等^[9]在弹簧网络中所得到的结果,我们可以相信,如果微裂纹在材料内部是随机分布的或损伤在材料内部是随机形成的,那么其宏观的弹性模量随损伤的响应应是线性下降关系。

而从我们的模拟结果来看,损伤的形成并不是完全随机的,它存在一定的倾向性。尤其是在损伤后期,微裂纹之间的相互作用加强,损伤的主要形式表现为裂纹之间的相互连接,这将导致有效模量的迅速降低从而偏离来的线性下降关系。网络模型的最大优点就是直接地考虑了裂纹之间的相互作用,从而可以比较真实地反映损伤在后期的演化情形以及对系统模量的影响,所以这种网络模拟实际上是一种数值实验,所得到的结果具有一定的参考价值。图 2 是某一次计算的有效模量随损伤的变化关系图。从图中不难看出,在损

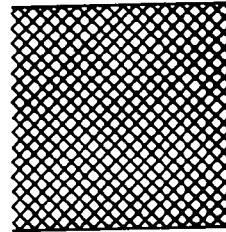


图 1 熔断丝网络模型

Fig. 1 Fuse network model

伤初期,由于微裂纹成核的随机性行为,损伤表现出相对的随机性,有效模量随损伤也成近似的线性下降关系;而在损伤后期,损伤的相对集中导致了有效模量的快速下降。图 3 是 η 取不同值时,有效模量随损伤的演化关系,可以看出有效模量随损伤的变化关系和电流集中敏感指数 η 密切相关。在损伤后期,有效模量的下降速度随 η 的增加明显加快。这些计算点可以很好地用下列公式来拟合(如图 2)。

$$(G/G_0)^\nu = 1 - A_0 P \tag{5}$$

其中: A_0 是常数, ν 是同 η 值相关的指数。

在拟合过程中,我们发现系数 A_0 和损伤阈值 P_c 存在很好的近似关系

$$A_0 \approx \frac{1}{P_c} \tag{6}$$

值得一提的是关系式(5)、(6)能较好地描述本文所有的计算结果,并且它们也能近似地描述弹簧网络系统中的模拟结果。将式(6)代入式(5)可得如下的标度关系

$$\frac{G}{G_0} \sim (P_c - P)^\delta \tag{7}$$

其中: δ 是标度指数。

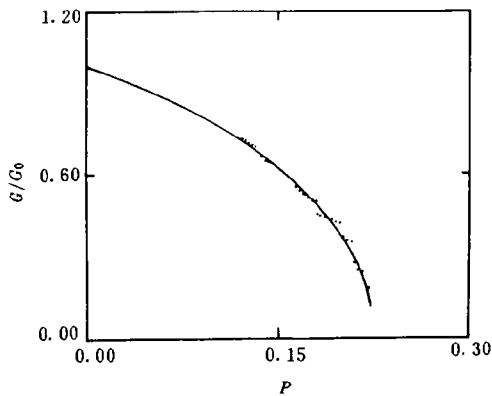


图 2 有效模量随损伤的变化关系
Fig. 2 Effective moduli vs damage
($\eta=2; L=30$; Dot: Simulation; Line: Fit)

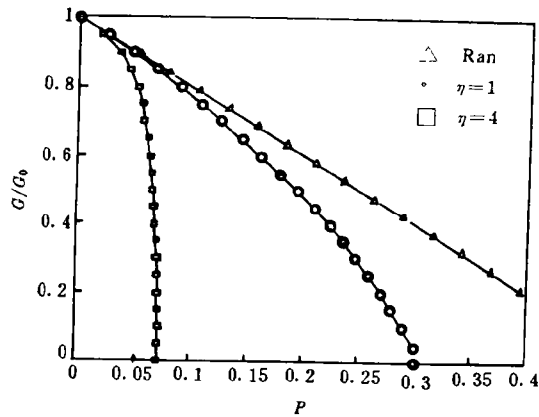


图 3 有效模量随损伤变化关系的比较 ($L=30$)
Fig. 3 Comparison of effective moduli vs damage ($L=30$)

图 4 是 $\eta=2$ 时 G/G_0 与 $P_c - P$ 的双对数图,从图中可以看出它们具有较好的线性关系,图中直线的斜率就是平均标度指数。这种标度关系在临界现象中广泛地存在着,它一般发生在临界点的附近,我们的标度关系却在远离破坏点时很好地成立。逾渗理论^[10]告诉我们,标度指数 δ 一般具有普适行为,即它是不依赖于网络单元形状的选取的。表 1 列出了不同 η 值所对应的平均标度指数。

综上所述,不管是利用平均化方法还是利用网络模拟方法,如果假定微损伤或微裂纹的形成是随机的,那么系统的有效模量和损伤将有线性下降关系;而如果考虑到微裂纹之间的相互作用以及微损伤形成的倾向性,那么系统的有效模量和损伤的关系将偏离原来

的直线而迅速下降。我们可以将(5)式推广到具体的材料,即

$$\left(\frac{E}{E_0}\right)^v = 1 - A_0 P \quad (8)$$

其中: E 、 E_0 分别是含损伤和不含损伤材料的弹性模量, P 是损伤, v 是和材料相关的指数,系数 A_0 和损伤阈值 P_c 。满足下列关系:

$$A_0 = \frac{1}{P_c} \quad (9)$$

这个关系式为我们得到损伤阈值提供了另一条途径。式(8)、(9)能否描述真实材料还需要实验检验,不过它确实给我们解决损伤问题提供了一种方法。

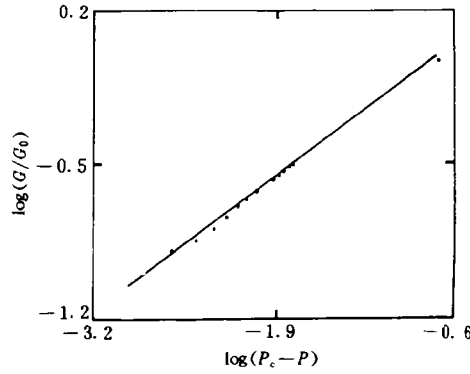


图 4 G/G_0 与 $P_c - P$ 的双对数图

Fig. 4 $\log(G/G_0)$ vs $\log(P_c - P)$

表 1 不同 η 值的平均标度指数 ($L=30, 20$ 计算结果平均)

Table 1 The average scaling indices of the different η

η	0	0.5	1	2	3	4	5
δ	1	0.84	0.66	0.47	0.33	0.28	0.23

4 含损伤材料的本构关系

对于我们所讨论的熔断丝网络,其本构关系就是系统的电流-电压关系。损伤的形成导致了网络的有效模量下降,相应地网络的本构关系也要发生变化。系统的宏观量在损伤演化过程中随时间的变化关系,已在常流(常应力)作用下材料发生的蠕变行为,以及在常压(常载)作用下,材料的应力松弛行为说明。在不同加载方式下系统的损伤演化,都存在和真实材料相一致的行为,这一点充分证明,我们所讨论的网络破坏和真实材料的破坏具有相同的地方,所以我们可以用网络模型来定性地讨论材料的破坏过程。研究损伤演化的目的之一就是为了解损伤对材料宏观性能的影响,即对系统本构响应的影响,也就是含损伤材料的本构关系。由于我们所选用的模型不能直接求出 $I-V$ 关系,所以需要通过一个转换。损伤对本构的影响是通过微裂纹在空间的分布和形态起作用的,如果不改变微裂纹的空间分布和形态的情况下,能将前述的单元断开概率转换成单元的断开阈值分布,这样,在电流的作用下就可以算出系统的本构关系曲线。Hansen 等^[11]首先提出了这种转换方法,具体实现过程如下:

- (1) 假定一开始网络中所有单元的断开阈值都相同(如都等于 1)。
- (2) 按照我们所讨论的概率断开准则和 Monte-Carlo 方法选取断开单元。
- (3) 将所有未断开单元的阈值进行更新,使得断开单元的阈值和作用在其上电流的比值为最小,即

$$\frac{t_j(\text{new})}{i_j} = \max\left(\frac{t_j(\text{old})}{i_j}, \frac{t_k}{i_k}\right) \quad (10)$$

其中： i_j 为第 j 个单元的电流； t_j 是第 j 单元的阈值； t_k 是断开单元的阈值； i_k 是断开单元上的电流。

(4) 重复式(2)、(3)步骤直到系统发生断裂为止，这样就形成了一个单元阈值分布的网络。计算这个网络的 $I-V$ 关系就可以得到系统的电流-电压关系。

通过这种转换方法，在两种网络内将形成完全一样的微裂纹分布，而系统的本构关系正是由这种分布决定的。图 5 是 $\eta=4$ 时常流作用下的本构关系曲线，这种算法的优点是可以知道每一个 $I-V$ 点所对应的损伤量。图 6 是损伤和电压的变化关系，知道这种对应关系后，就可以对本构关系进行描述。为了术语方便，以下将以理想弹性系统中的本构关系为例进行说明。

考虑一个理想弹性系统，它的应力-应变曲线如图 7，偏离直线的响应是由于损伤造成的，系统在一个损伤状态完全卸载时能恢复到原点，而不留下残余变形。描述这个弹性系统的含损伤本构关系，需要知道：(a) 系统的弹性模量和损伤的关系；(b) 损伤加载面和损伤的变化关系。具体如下：

定义损伤加载面 $f_d(\epsilon_d)$ 为

$$f_d = \epsilon - \epsilon_d \tag{11}$$

其中： $\epsilon_d = \epsilon_d(P)$ 是损伤状态变量， ϵ 是应变。在 $\Delta f_d < 0$ 时表示弹性卸载；在 $\Delta f_d \geq 0$ 时表示损伤加载，即 $\epsilon < \epsilon_d$ 时，有

$$d\sigma = E(\epsilon_d)d\epsilon \tag{12}$$

其中： $E(\epsilon_d)$ 是损伤状态为 ϵ_d 时系统的弹性模量。

当 $\epsilon \geq \epsilon_d$ 时，首先求出损伤加载面，即

$$d\epsilon_d = d\epsilon \tag{13}$$

然后求出在这种损伤状态下系统的弹性模量

$$dE = E'(\epsilon_d)d\epsilon \tag{14}$$

接下来就可以求出该状态下的应力，即

$$\sigma = E(\epsilon_d)\epsilon \tag{15}$$

上述的描述中需要知道 $E = E(\epsilon_d)$ 的关系，这个关系可以通过它们和损伤的关系求

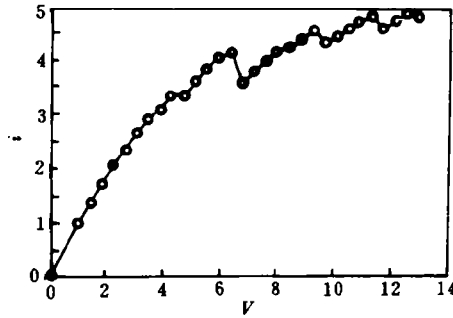


图 5 含损伤材料的本构关系 ($\eta=4, L=60$)
Fig. 5 Constitutive relation with damaged variable ($\eta=4, L=60$)

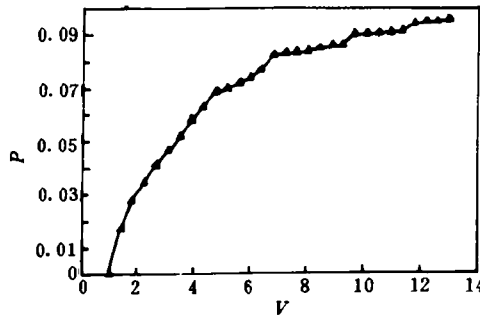


图 6 损伤和电压的变化 ($\eta=4, L=60$)
Fig. 6 Damage vs Voltage ($\eta=4, L=60$)

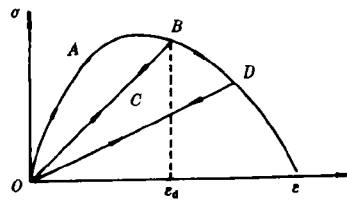


图 7 含损伤材料的本构关系示意图
Fig. 7 Schematic of constitutive relation with damaged variable

出,即

$$\begin{cases} E = E(P) & (16) \\ \varepsilon_d = \varepsilon_d(P) & (17) \end{cases}$$

(16)式可以由(8)式得到,(17)式可以由图6得到,而损伤 P 是时间和外应力的函数,这样整个弹性系统含损伤的本构关系描述就完备了。上述的描述方法虽然粗糙,但它为研究材料的本构关系提供了另一种思路。这种方法的主要优点是它直接地考虑了裂纹间的相互作用,这一点用其他方法是很难办到的。

5 总 结

通过引入熔断丝网络模型,考虑微裂纹之间的相互作用,考察了脆性材料在损伤破坏过程中的有效模量的演变行为以及本构关系,其结论主要有:

(1)在损伤初期,损伤的形成和分布较为随机,所引起的系统模量下降和损伤具有线性关系;而在后期,由于损伤的局部化,系统模量迅速下降,它和损伤满足下列非线性关系

$$\left(\frac{E}{E_0}\right)' = 1 - A_0 P$$

其中: A_0, ν 是参数。

(2)可以利用网络模型来半定量地讨论材料含损伤的本构关系,这种方法的主要优点是考虑了裂纹之间的相互作用,其结果可以为建立更可靠的分析模型提供基础。

参 考 文 献

- 1 黄筑平,杨黎明,潘客麟. 材料的动态损伤和失效. 力学进展,1993,23(4):433~467
- 2 Krajcinovic D, Mallick K, Basista M, et al. Elastic Moduli of Perforated Plates in the Neighborhood of Critical State. *Int J Solids Structures*, 1992, 29(14/15):1837~1847
- 3 Budiansky B, O'Connell R J. Elastic Moduli of a Cracked Solid. *Int J Solids Structures*, 1976, 12(2):81~97
- 4 Herrmann H J, Roux S, Eds. *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*. North-Holland, 1990
- 5 Roux S, Guyon E. Mechanical Percolation. *J Phys Lett*, 1985, 46(11):L999~L1004.
- 6 Kantor Y, Webman I. Elastic Properties of Random Percolating System. *Phys Rev Lett*, 1984, 52(21):1891~1894
- 7 Arcangelis L D, Redner S, Herrmann H J. A Random Fuse Model for Breaking Processes. *J Physique Lett*, 1985, 46(7):L585~L590
- 8 Roux S, Hansen A. Perfect Plasticity in a Random Medium. *J Phys France*, 1992, 2(5):1007~1021
- 9 Beale P D, Srolowitz D J. Elastic Fracture in Random Materials. *Phys Rev B*, 1988, 37(10):5500~5507
- 10 Stauffer D. *Introduction to Percolation Theory*. London Taylor and Francis, 1995
- 11 Hansen A, Hinrichsen E L, Roux S. Deterministic Growth of Diffusion-Limited Aggregation with Quenched Disorder. *Europhys Lett*, 1990, 13(4):341~347

EFFECTIVE MODULI AND CONSTITUTIVE RELATION OF DAMAGED MATERIALS

Zhou Guangquan, Fan Jianqiang

*(Department of Mechanics and Mechanical Engineering,
University of Science and Technology of China, HeFei, 230026)*

ABSTRACT In this paper, considering the interaction of microcracks, Using the random fuse network model, the computer simulation evolution behaviour of effective moduli of damaged brittle material during the damage process under applied loading is made. The constitutive relation of the corresponding system is also investigated. It is found that at the early stage of damage, the effective moduli decreases linearly with the increase of damage; while at the later stage, the effective moduli decreases rapidly. A non-linear relation between the effective moduli and the damage is proposed. The possibility and the advantage of using network model to study the constitutive relation are discussed.

KEY WORDS effective moduli, constitutive relation, damage, random fuse network