

特征线法在三维弹/粘塑性波 数值解析中的应用*

刘凯欣 张 凯

(大连理工大学工程力学研究所 大连 116024)

摘要 根据广义特征理论建立了求解三维非线性应力波传播问题的特征关系式,并采用特征线法对纵向冲击载荷下弹/粘塑性矩形截面棒的三维应力波传播过程进行了数值模拟。

关键词 三维应力波 特征线法 弹/粘塑性 数值计算。

中图法分类号 O347.43

1 引言

三维非线性应力波传播问题可归结为求解一阶拟线性偏微分方程组问题。一般来说,是无法得到解析解的。在数值解析方法中,以广义特征理论为基础的特征线法同传统的差分法及有限元法相比,具有物理意义明确、无离散弥散、计算量小且精度高等优点;但也存在着数学推导过繁,难以处理复杂边界等缺点,使特征线法的应用受到限制。目前,应用广义特征理论以及特征线法对固体非线性波传播现象进行理论分析和数值计算的范围主要还局限于二维问题^[1~4]。我们曾应用特征线法对弹/粘塑性体(采用谷村型^[5]本构关系式)的三维应力波问题进行了数值计算^[6]。在此基础上,我们应用特征线法对考虑加工硬化的弹/粘塑性体的三维应力波问题进行数值计算。

2 基本方程

设波动的传播介质为均质,各向同性的固体,其运动方程可写成如下的张量形式

$$\sigma_{i,j} = \rho \dot{v}_i \quad (1)$$

式中: $\sigma_{i,j}$ 为应力张量, ρ 为质量密度, v_i 为速度张量。张量头上的“ \cdot ”表示此张量对时间 t 的偏微分。弹/粘塑性体的本构关系的一般形式^[7]为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{S}_{ij}/2G + \gamma_0 \Phi(F) S_{ij} / \sqrt{J_2}, \quad \text{若 } F > 0 \quad (2.1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{S}_{ij}/2G, \quad \text{若 } F \leq 0 \quad (2.2)$$

$$\dot{\epsilon}_{nn} = \frac{1}{3K_v} \dot{\sigma}_{nn} \quad (2.3)$$

* 国家自然科学基金资助项目。

1995年7月18日收到原稿,10月17日收到修改稿。

式中: e_{ij} 、 S_{ij} 分别表示应变偏张量及应力偏张量, ε_{ii} 表示应变张量, J_2 表示应力偏张量的二次不变量, G 表示剪切模量, K_v 表示体积模量, γ_0 表示粘性系数, F 的表达式为

$$F = (\sqrt{J_2} - \tau^*) / \tau_0^* \quad (3)$$

其中: τ^* 、 τ_0^* 分别为静态应变硬化系数和剪切屈服应力。根据 Fyfe^[8] 的研究结果, 函数 $\Phi(F)$ 的具体形式为

$$\Phi(F) = e^{2F} - 1 \quad (4)$$

在小变形条件下, 应变张量可写成

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}) / 2 \quad (5)$$

为了简化公式的推导, 我们引入如下的无量纲变量:

$$\tau = \frac{c_1}{b} t, \quad X_1 = \frac{x_1}{b}, \quad X_2 = \frac{x_2}{b}, \quad X_3 = \frac{x_3}{b}, \quad U_1 = \frac{v_1}{c_1}, \quad U_2 = \frac{v_2}{c_1}, \quad U_3 = \frac{v_3}{c_1},$$

$$U_4 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3K\rho c_1^2}, \quad U_5 = \frac{\gamma(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2\rho c_1^2},$$

$$U_6 = \frac{\gamma(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33})}{2\sqrt{3}\rho c_1^2}, \quad U_7 = \frac{\gamma\sigma_{12}}{\rho c_1^2}, \quad U_8 = \frac{\gamma\sigma_{13}}{\rho c_1^2}, \quad U_9 = \frac{\gamma\sigma_{23}}{\rho c_1^2},$$

$$D = \begin{cases} \frac{2\rho c_1 b}{\gamma^2} [\gamma_0 \Phi(F) \frac{1}{\sqrt{J_2}}], & \text{若 } F > 0 \\ 0, & \text{若 } F \leq 0 \end{cases}$$

式中: b 为当量长度; $K = \sqrt{1 - (4/3)\gamma^2}$; $\gamma = c_1/c_2$, c_1 、 c_2 分别为膨胀波和等容波的传播速度, 其表达式为

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{G/\rho}$$

式中 λ 为 Lamé 常数。将上面的无量纲变量分别代入式(1)、(2)和(5), 经化简我们可得到如下的基本方程

$$L[U] = U_{,r} + A^i U_{,ri} + B = 0 \quad (6)$$

式中

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ DU_5 \\ DU_6 \\ DU_7 \\ DU_8 \\ DU_9 \end{bmatrix}$$

$A^i (i=1, 2, 3)$ 为对称矩阵, 其非 0 的成份为

$$A_{14}^1 = -K, \quad A_{15}^1 = A_{27}^1 = A_{38}^1 = -1/\gamma, \quad A_{16}^1 = -1/\sqrt{3}\gamma,$$

$$A_{17}^2 = A_{39}^2 = -A_{25}^2 = -1/\gamma, \quad A_{26}^2 = -1/\sqrt{3}\gamma$$

$$A_{18}^3 = A_{29}^3 = -1/\gamma, \quad A_{34}^3 = -K, \quad A_{36}^3 = 2/\sqrt{3}\gamma$$

式(6)为半线性双曲型一阶偏微分方程组。

3 特征线数值解法

设 $\psi(\tau, X_1, X_2, X_3) = \text{const}$ 为式(6)的特征面。为此, 必须满足特征条件

$$\text{Det}[\psi_\tau + A^i \psi_{x_i}] = 0 \tag{7}$$

将式(7)展开, 其结果为

$$[\psi_\tau^2 - \psi_{x_i} \psi_{x_i}] [\psi_\tau^2 - \psi_{x_i} \psi_{x_i} / \gamma^2] \psi_\tau^3 = 0 \tag{8}$$

式(8)的一个解面为

$$\psi \equiv C^2(\tau - \tau_0)^2 - (X_i - X_i^0)(X_i - X_i^0) = 0 \quad (C = \pm 1, \pm 1/\gamma) \tag{9}$$

式(9)表示一组圆锥面, 其顶点为时间-空间的任意点 $(\tau_0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ 。这组锥面由圆口朝着时间轴正方向和圆口朝着时间轴负方向两部分组成。其中无量纲波速 $C = \pm 1/\gamma$ 所对应的圆锥面描述等容波的传播; $C = \pm 1$ 所对应的圆锥面描述膨胀波的传播。为研究方便起见, 我们只取这组圆锥面的圆口朝着时间负方向的部分进行研究。这部分圆锥面的母线即次特征线的方程为

$$L_i \equiv \lambda_i C(\tau - \tau_0) + (X_i - X_i^0) = 0 \quad (C = 1, 1/\gamma, \quad i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

式中 $\lambda_i = \cos \alpha_i = x_i / \sqrt{x_1 x_1}$, $(0 \leq \alpha_i \leq 2\pi)$ 。通过求解下式

$$l^m [\psi_\tau + A^i \psi_{x_i}] = 0 \quad (m = 1, \dots, 9) \tag{11}$$

可求得下列 4 个线性无关的特征向量

$$l^1 = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, K, \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\gamma}, \frac{1 - 3\lambda_3^2}{\sqrt{3}\gamma}, \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\gamma}, \frac{2\lambda_1\lambda_3}{\gamma}, \frac{2\lambda_2\lambda_3}{\gamma}]^{-1}, \quad \text{若 } C = 1$$

$$l^2 = [0, -\lambda_3, \lambda_2, 0, \lambda_2\lambda_3, -\sqrt{3}\lambda_2\lambda_3, -\lambda_1\lambda_3, \lambda_1\lambda_2, \lambda_2^2 - \lambda_3^2]^{-1}, \quad \text{若 } C = \frac{1}{\gamma}$$

$$l^3 = [-\lambda_3, 0, \lambda_1, 0, -\lambda_1\lambda_3, -\sqrt{3}\lambda_1\lambda_3, -\lambda_2\lambda_3, \lambda_1^2 - \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2]^{-1}, \quad \text{若 } C = \frac{1}{\gamma}$$

$$l^4 = [-\lambda_2, \lambda_1, 0, 0, -2\lambda_1\lambda_2, 0, \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3]^{-1}, \quad \text{若 } C = \frac{1}{\gamma}$$

沿次特征线的特征关系可由下式解得

$$l^m \cdot L(U) = 0 \quad (m = 1, \dots, 4) \tag{12}$$

将由式(12)求得的沿次特征线的特征关系沿其所对应的次特征线积分并取差分近似, 所得的差分式与将式(6)沿时间轴积分并取差分近似得到差分式联立可解出

$$\begin{aligned} \delta U_1 = & k\gamma_2^2 \{ \sqrt{3} [k[\gamma^2(U_{1xx} + U_{2xx}) + U_{3xz}] - U_{2xy} - U_{3xz} - U_{1yy} + U_{1zz}] \\ & - \gamma k [D(U_{5x} + U_{7y} + U_{8z}) - D_x U_5 - D_y U_7 - D_z U_8] + 2\gamma(U_{5x} + U_{7y} + U_{8z})] \\ & + \gamma [2\gamma_6 U_{4x} - k(DU_{6x} + D_x U_6) + 2U_{6x}] \} / 2 + O(k^3) \end{aligned} \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned} \delta U_2 = & k\gamma_2^2 \{ \sqrt{3} [k[\gamma^2(U_{1xx} + U_{2yy} + U_{31z}) + U_{2xx} - U_{1xy} - U_{3yz} + U_{2zz}] \\ & - \gamma k [D(U_{7x} - U_{5y} + U_{9z}) - D_x U_7 + D_y U_5 - D_z U_9] + 2\gamma(U_{7x} + U_{5y} + U_{9z})] \\ & + \gamma [2\gamma_6 U_{4y} - k(DU_{6y} + D_y U_6) + 2U_{6y}] \} / 2 + O(k^3) \end{aligned} \tag{13.2}$$

$$\begin{aligned} \delta U_3 = & k\gamma_2^2 \{ \sqrt{3} [k[\gamma^2(U_{1xz} + U_{2yz} + U_{3zz}) + U_{3xx} - U_{1xy} + U_{3yy} - U_{2yz}] \\ & - \gamma k [D(U_{8x} + U_{9y}) - D_x U_8 - D_y U_8] + 2\gamma(U_{8x} + U_{9y})] \\ & + 2\gamma[\gamma_1 U_{4z} + k(DU_{6z} + D_z U_6) - 2U_{6z}] \} / 2 + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$\begin{aligned} \delta U_4 = & k\gamma_2^2 \{ \gamma_6 [3k[U_{5xx} + 2(U_{7xy} + U_{8xz}) + U_{9yz} - U_{5yy}] \\ & + \sqrt{3} k [D(U_{6xx} + U_{6yy} - 2U_{6zz}) + 6\gamma(U_{1x} + U_{2y} + U_{3z})] \\ & + \sqrt{3} \gamma_6^2 k (U_{4xx} + U_{4yy} - U_{4zz}) \} / 6 + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} \delta U_5 = & k\gamma_7 \{ k[\sqrt{3} \gamma_6 (U_{4xx} - U_{4yy}) + 3(U_{5xx} + U_{8xz} + U_{5yy} - U_{9yz}) \\ & + \sqrt{3} (U_{6xx} - U_{6yy})] + 6\gamma(U_{1x} - U_{2y}) - 3\gamma^2 U_5 (D + D^0) \} / 3 \\ & + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.5)$$

$$\begin{aligned} \delta U_6 = & k\gamma_8 \{ \sqrt{3} [k(U_{6xx} + U_{6yy} + 4U_{6zz}) - 3\gamma^2 U_6 (D + D^0)] \\ & + k[\sqrt{3} \gamma_6 (U_{4xx} + U_{4yy} - 2U_{4zz}) + 3(U_{5xx} + 2U_{7xy} - U_{8xz} - U_{5yy} \\ & - U_{9yz})] + 6\gamma(U_{1x} + U_{2y} + U_{3z}) \} / 3 + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.6)$$

$$\begin{aligned} \delta U_7 = & k\gamma_8 \{ \sqrt{3} [k(U_{7xx} + U_{9xz} + U_{7yy} + U_{8yz}) + 2\gamma(U_{2x} + U_{1y}) \\ & - \gamma^2 U_7 (D + D^0)] + 2k(\gamma_6 U_{4xy} + U_{6xy}) \} + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} \delta U_8 = & k\gamma_8 \{ \sqrt{3} [k(U_{8xx} + U_{9xy} + U_{5xz} + U_{7yz} + U_{8zz}) + 2\gamma(U_{3x} + U_{1z}) \\ & - \gamma^2 U_8 (D + D^0)] + 2k(\gamma_6 U_{4xz} - U_{6xz}) \} + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} \delta U_9 = & k\gamma_8 \{ \sqrt{3} [k(U_{8xy} + U_{7xz} + U_{9yy} - U_{5yz} + U_{9zz}) + 2\gamma(U_{3y} + U_{2z}) \\ & - \gamma^2 U_9 (D + D^0)] + 2k(\gamma_6 U_{4yz} - U_{6yz}) \} + O(k^3) \end{aligned} \quad (13.9)$$

式中: $\gamma_1 = 1/\gamma$; $\gamma_2 = 1/(\sqrt{3}\gamma)$; $\gamma_3 = (\gamma^2 - 2)/\gamma^2$; $\gamma_4 = (\gamma - 1)/\gamma$; $\gamma_5 = (\gamma - 2)/\gamma$; $\gamma_6 = \sqrt{3\gamma^2 - 4}$; $\gamma_7 = \gamma^2/(kD^0 + 2)$; $\gamma_8 = \gamma_2^2/(kD^0 + 2)$; k 为时间步长。为方便起见, 式中用 (X, Y, Z) 来代替 (X_1, X_2, X_3) 。式中各变量的下标分别表示该下标的偏微分, 在计算中我们取 $O(h^2)$ 的精度。例如:

$$f_x = \frac{1}{2h} [f(X_0 + h, Y_0, Z_0) - f(X_0 - h, Y_0, Z_0)]$$

$$f_{xx} = \frac{1}{h^2} [f(X_0 + h, Y_0, Z_0) + f(X_0 - h, Y_0, Z_0) - 2f(X_0, Y_0, Z_0)]$$

$$\begin{aligned} f_{xy} = & \frac{1}{4h^2} [f(X_0 + h, Y_0 + h, Z_0) + f(X_0 - h, Y_0 - h, Z_0) \\ & - f(X_0 + h, Y_0 - h, Z_0) - f(X_0 - h, Y_0 + h, Z_0)] \end{aligned}$$

式中: h 为空间步长。式(13)中增量 $\delta U_m = U_m^0(\tau_0, X_0, Y_0, Z_0) - U_m(\tau_0 - k, X_0, Y_0, Z_0)$ 。通过式(13)可由已知量 $U_m^0(\tau_0 - k, X_0, Y_0, Z_0)$ 及其偏微分求得未知量 $\delta U_m (m = 1, \dots, 9)$ 。不过 $D^0(\tau_0, X_0, Y_0, Z_0)$ 为未知量, 由于 D^0 是 U_m^0 的函数, 因此可用逐次近似的方法求出^[6]。

4 数值计算例

应用式(13)对半无限长弹/粘塑性矩形截面棒撞击刚性壁时弹/粘塑性波的传播过程进行计算。根据对称性我们只计算棒的 $1/4$ 部分(正的部分)。初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned}
 &U_m = 0 \quad (m = 1, \dots, 9), && \text{若 } \tau = 0 \\
 &U_1 = V(\tau), \quad U_7 = U_8 = U_9 = 0, && \text{若 } Z = 0 \\
 &\gamma K U_4 + U_5 + U_6 / \sqrt{3} = 0, \quad U_7 = U_8 = U_9 = 0, && \text{若 } X = 1 \\
 &\gamma K U_4 - U_5 + U_6 / \sqrt{3} = 0, \quad U_7 = U_8 = U_9 = 0, && \text{若 } Y = 1
 \end{aligned}$$

式中

$$V(\tau) = \begin{cases} \beta V_0(\tau/\tau_r) & \text{若 } \tau \leq \tau_r \\ \beta V_0 & \text{若 } \tau_r < \tau \end{cases}$$

其中： $V_0 = \tau_0^* / (\rho c_1^2)$ ； β 为扩大系数 ($\beta > 1$ 时，矩形棒内将产生塑性变形)； τ_r 为升载时间。计算中我们采用 1100-0 铝的材料参数^[8]： $E = 6.896 \times 10^4 \text{ MPa}$ ； $\tau_0^* = 8.84 \text{ MPa}$ ； $\rho = 2.71 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ； $\gamma_0 = 100/\text{Pa} \cdot \text{s}$ ； $G = 2.566 \times 10^4 \text{ MPa}$ ； $\tau^* = \tau_0^* + 4 \times 10^3 \bar{\epsilon}_p - 8.1 \times 10^5 \bar{\epsilon}_p^2 + 11.5 \times 10^8 \bar{\epsilon}_p^3 - 7.54 \times 10^9 \bar{\epsilon}_p^4 + 1.79 \times 10^{11} \bar{\epsilon}_p^5 \text{ MPa}$ 。计算中取 $b = 10 \text{ mm}$ ， $\tau_r = 1$ 。

图 1~图 4 表示不同冲击条件下矩形断面棒冲击端面附近的纵向应力的分布状况。其中图 1、图 2 分别表示矩形断面棒弹性变形时 ($\beta = 1$) 在时间 $\tau = 5, 20$ 时的分布状况；图

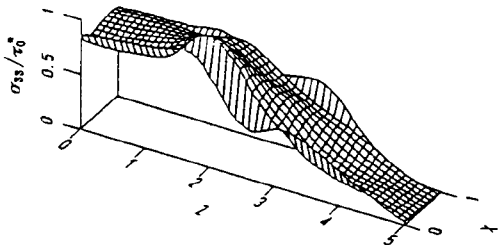


图 1 纵向应力分布 ($\beta = 1, \tau = 5$)

Fig. 1 Distribution of the longitudinal stress for $\beta = 1$ at $\tau = 5$

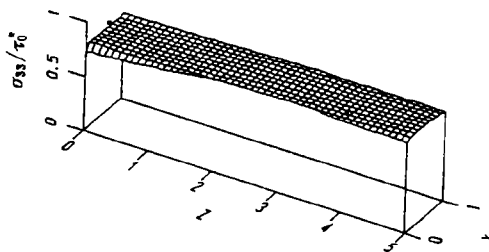


图 2 纵向应力分布 ($\beta = 1, \tau = 20$)

Fig. 2 Distribution of the longitudinal stress for $\beta = 1$ at $\tau = 20$

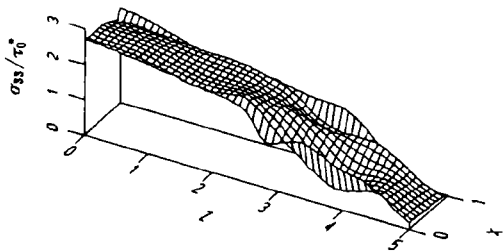


图 3 纵向应力分布 ($\beta = 5, \tau = 5$)

Fig. 3 Distribution of the longitudinal stress for $\beta = 5$ at $\tau = 5$

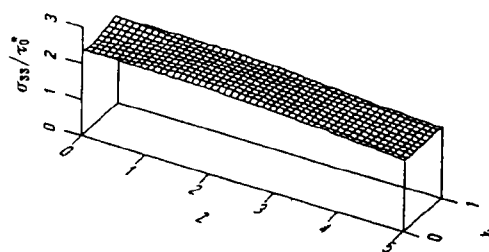


图 4 纵向应力分布 ($\beta = 5, \tau = 20$)

Fig. 4 Distribution of the longitudinal stress for $\beta = 5$ at $\tau = 20$

3、图 4 分别表示矩形断面棒塑性变形时($\beta=5$)在时间 $\tau=5、20$ 时的分布状况。比较图 1 与图 3 可以得知,波头经过处相同横断面的纵向应力差异很大,但塑性变形时,这种差异相对减小,从图 2 和图 3 可以得知,波头通过后冲击端附近的各横断面上的纵向应力差异很小,可以用一维计算结果近似。

参 考 文 献

- 1 李永池,等. 复合应力波理论的某些问题. 见:王礼立,余同希,等. 冲击动力学进展,合肥:中国科学技术大学出版社,1992 年
- 2 刘凯欣,横山隆. 日本航空宇宙学会志,1992,40(463):19~24
- 3 刘凯欣,横山隆. 日本机械学会论文集,1993,59(563)A:1715~1719
- 4 Liu Kaixin, Yokoyama T. A Numerical Solution of Two-Dimensional Torsion Waves in an Elastic/Viscoplastic Cylinder. *J Appl Mech*, 1994, 61(1):204~206
- 5 谷村真治,井垣久. 日本材料会志,1980,29(317):137~142
- 6 刘凯欣,横山隆. 日本机械学会论文集,1992,58(574)A:449~456
- 7 Perzyna P. The Constitutive Equations for Rate Sensitive Plastic Materials, *Q Appl Math*. 1963,20(4):321~332
- 8 Fyfe I M. The Applicability of Elastic/Viscoplastic Theory in Stress Wave Propagation. *J Appl Mech*, 1975,42:141~146,

APPLICATION OF CHARACTERISTICS METHOD FOR NUMERICAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL ELASTIC/VISCOPLASTIC STRESS WAVE PROBLEMS

Liu Kaixin, Zhang Kai

(*Dalian University of Technology, Dalian, 116024*)

ABSTRACT The Characteristic forms of differential equations for three-dimensional elastic/viscoplastic stress wave propagation problems are established on the basis of the generalized characteristic theory. A numerical simulation for the three-dimensional stress wave propagation of an elastic/viscoplastic bar of square cross section subjected to a longitudinal impact loading is performed by means of the characteristics method.

KEY WORDS three-dimensional stress wave, characteristics method, elastic/viscoplastic, numerical calculation