

粘塑性靶板中冲击波的演化

李永池^a 龚红卫^a 李晓杰^{a b} 陈 杰^a

(a 中国科学技术大学 合肥 230026) (b 大连理工大学 大连 1126023)

摘要 讨论了粘塑性靶板中的一维应变波的传播规律。利用广义特征理论导出了应力波传播的特征线和特征关系。利用特征关系和冲击波阵面上的突跃条件, 得出了冲击波在传播过程中的演化的规律, 并以 Bodner-Partom 幂函数型粘塑性材料为例, 计算和讨论了板中应力波传播规律的特点

关键词 粘塑性靶板 冲击波 演化规律

中力法分类号 0345 0347.5

1 引 言

随着冲击动力学的发展和工程实际的需要, 应力波理论已经引起人们越来越大的兴趣。在理论研究和实际应用中, 人们都很关心冲击波强度及整个应力波波形的演化规律, 这对于了解冲击波传播和演化的机理, 发现影响冲击波传播的因素和掌握材料的本构关系均有很大的帮助。在工程中, 还可以帮助人们预测并根据需要来控制冲击波强度及应力波波形的发展, 并预测或控制波所引起的破坏。前人已对弹塑性靶中应力波的传播作过大量的研究, 并且由此发展了一维应变条件下的弹塑性波的理论, 例如 J. W. Craggs, E. H. Lee 和朱兆祥等人的工作^[1, 2, 3]。这些工程得出了弹塑性波速的表达式, 分析了波传播的基本特性, 但对冲击波演化的规律, 并未得出便于工程应用的简洁结果。考虑到一般粘塑性材料及弹粘塑性材料中冲击波和加速度波波速相等这一特点, 李永池, 魏勇, 胡秀章等人曾研究了粘塑性材料中应力波的传播问题^[4], 得出标准线性粘弹性变截面杆中冲击波演化的解析表达式, 并详细分析了材料的本构因素和杆的几何因素对冲击波演化和应力波波形的影响, 但所处理的是一维应力波的问题。考虑到各种高强度合金钢及新型复合材料的日益广泛应用, 并用考虑到一维应力变波的分析对靶板的层裂效应和防护有更直接的应用价值, 我们对弹塑性材料制成的靶板中冲击波的演化的应力波的传播规律进行了理论探讨和数值分析, 并得出了一些对冲击工程有直接应用或借鉴价值的结果。

2 基本方程, 特片关系和冲击波跳跃条件

设有一靶板受的垂直于靶面的突加载荷的作用, 则在靶板的受载区域下将产生一维应变平面波。取 Lagrange 坐标的 x 轴沿波阵面的法线方向, 并 ξ , e_x 和 X 分别表示板中的

* 国家自然科学基金资助项目

1995年 9月 19日收到原稿, 12月 10日收到修改稿。

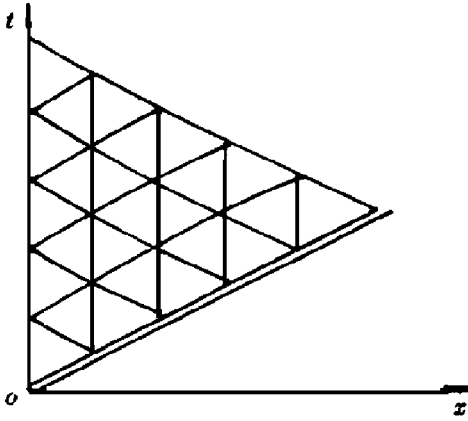


图 1 特征网格

Fig. 1 Characteristic networks

轴向质点速度、轴向应力和轴向应变, ρ_0 和 t 分别表示靶板介质密度和时间, 且以压为正 (特征网格如图 1), 则靶板中介质运动的位移连续方程和动量守恒方程分别为

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

剩下的问题是由靶材的本构方程得出其轴向应力应变关系, 设靶材满足 Bodner-Partom 无屈服面的粘塑性本构关系

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{X}^e + \dot{X}^p \\ \dot{X}^e = E^{-1} \dot{e} \\ \dot{X}^p = \lambda \dot{s} \end{cases} \tag{3}$$

其中: \dot{X} , \dot{X}^e , \dot{X}^p 分别为总应变、弹性应变和塑性应变, \dot{s} 为偏应力, E^{-1} 为弹性柔度, $\lambda > 0$ 为塑性流动速率因子, 并假设等效塑性应变率 \dot{I}^p 和等效应力 $\bar{\sigma}$ 间有如下关系

$$\dot{I}^p = f(\bar{e}), \quad \dot{I}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{X}^p : \dot{X}^p}, \quad \bar{e} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{s} : \dot{s}} \tag{4}$$

其中的函数 f 可以由任一特殊条件下的实验得出, 例如可由一维应力下的关系

$$\dot{X}^p = f(\bar{e}) \tag{4'}$$

而得到. 由流动法则 (3) 式中 $\dot{X}^p = \lambda \dot{s}$ 得

$$\lambda = \sqrt{\frac{\dot{X}^p : \dot{X}^p}{\dot{s} : \dot{s}}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{I}^p}{\bar{e}} = \frac{3}{2} f(\bar{e}) / \bar{e}$$

所以有

$$\dot{X}^p = \lambda \dot{s} = \frac{3}{2} \frac{f(\bar{e})}{\bar{e}} \dot{s} \tag{5'}$$

对各向同性材料, 以 G 表示弹性剪切模量, 以 e^e 和 e^p 分别表示弹性偏应变和塑性偏应变, 并假设塑性应变不可压缩, 则有

$$\dot{s} = \mathcal{G} \dot{e}^e = \mathcal{G} (\dot{X} - \dot{X}^p) = \mathcal{G} (\dot{e} - \dot{e}^p) = \mathcal{G} \left[\dot{e} - \frac{3}{2} \frac{f(\bar{e})}{\bar{e}} \dot{s} \right] \tag{5}$$

(5) 式是偏应力率的表达式, 对静水压 p 有:

$$p = K \theta \tag{6}$$

其中: $\theta = \dot{X}$ 是体应变率, K 为体积压缩模量.

(5)、(6) 式即构成了复杂应力状态下的本构关系, 应用到一维应变情况下, 有

$$\theta = \dot{X}, \quad \dot{e}_x = \dot{X} - \frac{\theta}{3} = \frac{2}{3} \dot{X}$$

$$s_x = e_x - \frac{1}{3}(e_x + 2e_y) = \frac{2}{3}(e_x - e_y) = \frac{4}{3}f$$

$$f = \frac{3}{4}s_x = \frac{3}{4}(e_x - p) = \frac{3}{4}(e_x - K\theta) = \frac{3}{4}(e_x - KX)$$

其中 $\frac{1}{2}(e_x - e_y)$ 为最大切应力, 而偏应力第二不变量 J_2 和等效应力 \bar{e} 分别为

$$J_2 = \frac{1}{6} [(e_x - e_y)^2 + (e_z - e_x)^2 + (e_y - e_z)^2]$$

$$\frac{1}{3}(e_x - e_y)^2 = \frac{4}{3}f^2$$

$$\bar{e} = \sqrt{3J_2} = 2|f| = \frac{3}{2}|e_x - KX|$$

将以上各式代入 (5) 式, 得

$$s_x = e_x - p = e_x - KX = \alpha G \left[\frac{2}{3}X - \frac{f(\frac{3}{2}|e_x - KX|)}{|e_x - KX|} (e_x - KX) \right]$$

即
$$e_x = (K + \frac{4}{3}G)X - \alpha GF(e_x - KX) \tag{7}$$

其中:
$$F(e_x - KX) = f(\frac{3}{2}|e_x - KX|) \text{sign}(e_x - KX) \tag{7'}$$

方程 (1)、(2)、(7) 式即构成了粘塑性靶中应力波传播的基本方程组

$$d_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial e_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial t} - (K + \frac{4}{3}G) \frac{\partial X}{\partial t} + \alpha GF(e_x - KX) = 0$$

用矩阵表示为

$$A \underline{W}_t + B \underline{W}_x = \underline{b}$$

其中:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} v_x \\ e_x \\ X \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha GF(e_x - KX) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -E_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而 $E = K + \frac{4}{3}G$ 为靶材的侧限弹性模量。

根据波传播的广义特征理论, 特征波速 λ 由矩阵 B 相对于矩阵 A 的特征值给出, 得特征方程为

$$||B - \lambda A|| = \lambda(d_0\lambda^2 - E_1) = 0$$

从而得三个特征值为

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{E_1}{c_0}} = c, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\sqrt{\frac{E_1}{c_0}} = -c$$

以 L 表示 B 相对于 A 的左特征矢量, 即

$$L^T (B - \lambda A) = 0$$

则对于 $\lambda = \lambda_2$, 有: $L_2^T = (0 \ 0 \ 1)$,

对于 $\lambda = \lambda_1, \lambda_3$, 有: $L_{1,3}^T = (\lambda, c_0 \lambda^2, 1) = (\pm c, c_0 c^2, 1)$

所以特征关系为

$$L^T (b - A \frac{dW}{dt}) = 0 \quad (\text{对于任意的 } \lambda)$$

$$\text{或} \quad L^T (\lambda b - B \frac{dW}{dt}) = 0 \quad (\text{对于 } \lambda \neq 0)$$

由上两式可以求出特征关系为

$$\frac{de_x}{dt} - E_1 \frac{dX}{dt} + \chi GF (e_x - K X) = 0 \quad \text{沿} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{de_x}{dt} \pm c_0 c \frac{dv_x}{dt} + \chi GF (e_x - K X) = 0 \quad \text{沿} \frac{dx}{dt} = \pm c \quad (9)$$

当应力波以冲击波的形式在介质中传播时, 有关物理量在跨过冲击波阵面时, 应满足冲击波上的跳跃条件, 故有

$$[e_x] = c_0 D [v_x] \quad (10)$$

$$[v_x] = D [X] \quad (11)$$

其中 $[O] = O - O$ 表示在跨过冲击波阵面时, 量 O 的跳跃值。又因为在冲击波阵面上, $e_x = X = \infty$, 靶材的粘塑性本构退化为弹性本构

$$e_x = E_1 X \quad (12)$$

代入跳跃关系可得

$$D = \sqrt{\frac{E_1}{c_0}} = c \quad (13)$$

如通常知道的弹粘塑性介质中的冲击波速度 D 和加速度波波速相等, $D = c$, 这反而为冲击波演化规律的求解带来了方便。

3 冲击波的演化规律

以 e_x^0, v_x^0 和 X^0 分别表示冲击波紧后方的轴向应力、轴向质点速度和轴向应变, 则因冲击波前方为自然静止状态, 所以 (10) 和 (11) 式给出

$$v_x^s = \frac{e_x^s}{c_0 c} \quad (14)$$

$$X^s = \frac{e_x^s}{c_0 c^2} \quad (15)$$

冲击波又是一条右行特征线, 所以 (8) 式给出

$$\frac{de_x^s}{dt} - c_0 c \frac{dv_x^s}{dt} + \chi GF (e_x^s - K X^s) = 0 \quad (16)$$

将 (14) 代入 (16) 式, 有

$$2 \frac{d\epsilon_x}{dt} + 2GF \left[\epsilon_x \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right) \right] = 0 \tag{17}$$

其中:

$$c_1 = \sqrt{\frac{K}{d_0}} \tag{18}$$

表示靶中的体波速度, 积分 (17) 式, 可得

$$t = \int_{\epsilon_x}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{GF \left[\epsilon \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right) \right]}, \quad x = \int_{\epsilon_x}^{\epsilon_0} \frac{cd\epsilon}{GF \left[\epsilon \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right) \right]} \tag{19}$$

(19) 式给出靶中冲击波强度 ϵ_x 演化的时程表达式 $t = t(\epsilon_x)$ 或 $x = x(\epsilon_x)$, 对应各种不同的本构关系, 即不同函数 F , 都可以得出其具体演化规律。

4 结果与讨论

4.1 冲击波的演化规律

由方程 (19) 可以发现, 冲击波的演化规律 (19) 式是完全由靶材的本构关系所决定的, 即由等效塑性应变率对等效应力的依赖关系 $\dot{I}^p = f(\bar{\epsilon})$ 所决定的, 因为 (7) 式说明, 方程 (19) 中的函数 $F \left[\epsilon \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right) \right] = f \left[3\epsilon \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right) / 2 \right]$ 冲击波的演化规律完全由材料的本构行为及几何特性 (球面、柱面或变截面扩散效应等) 所决定, 而与突加边界载荷的变化形式无关, 这一结论是弹粘塑性材料中冲击波演化的共同特点。对这一结论文献 [4] 已以变截面杆中的波传播为例进行了详细的分析, 并在一维应变波中又一次得到了体现。同时, 我们还可指出另一重要结论: 即使引入应变率硬化和应变硬化的耦合效应的话, 即如果考虑更一般的本构行为 $\dot{I}^p = f(\bar{\epsilon}, W^p)$ 或 $\dot{I}^p = f(\bar{\epsilon}, I^p)$ 的话, (其中 $W^p = \int \bar{\epsilon} d\bar{X}$, $I^p = \int [(2/3) d\bar{X} : d\epsilon^p]^{1/2} dt$ 分别为累积塑性功和累积等效塑性应变), 也并不改变本问题中冲击波的演化规律, 因为在冲击波的紧后方 $W^p = 0$, $I^p = 0$ 。从物理上说, 这恰恰反映了粘塑性滞后效应来不及影响突加的冲击波这一事实。

当 (4) 式取常用的幂函数关系

$$\bar{X} = X_0 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \right)^n, \quad (X_0, \epsilon_1, n \text{ 为材料常数}, n \geq 1) \tag{20}$$

时, 冲击波演化规律 (19) 式可得显式形式

$$\epsilon_x(x) = \left[\frac{(n-1)B_0}{2c} \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right)^n x + \epsilon_0^{-n} \right]^{\frac{-1}{n-1}}, \quad (n > 1) \tag{21}$$

$$\epsilon_x(x) = \epsilon_0 \exp \left[- \frac{B_0}{2c} \left(1 - \frac{c_1^2}{c^2} \right) x \right], \quad (n = 1) \tag{21}'$$

其中:

$$B_0 = 2G \left(\frac{3}{2} \right)^n \epsilon_1^{-n} X_0 \tag{22}$$

选择一种弹粘塑性材料, 使其本构行为接近于高应变率下的钢: $d_0 = 7.8 \text{ g/cm}^3, K =$

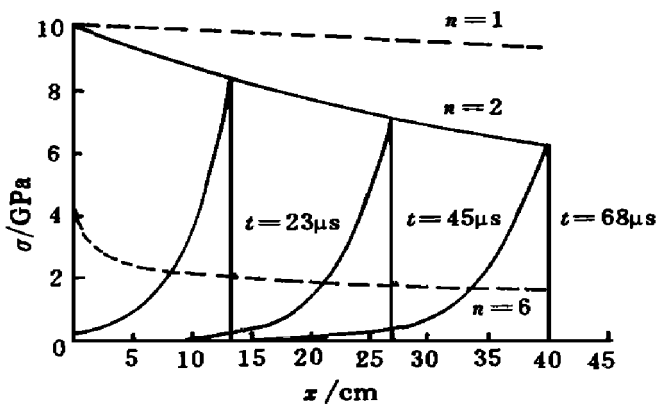


图 2 冲击波的衰减规律
Fig. 2 Attenuation of shock waves

$1.6 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $G = 8.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $\dot{\gamma}_0 = 20 \text{ s}^{-1}$, $n = 2$, $\epsilon_1 = 8.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ 并取边界应力条件 $\epsilon(t) = \epsilon_0 \exp(-10^6 t / \epsilon)$, $\epsilon_0 = 1.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$ 则冲击波的衰减规律和各相应时刻的应力剖面如图 2 的实线所示。图中同时用虚线标出了 $n = 1, 6$ 时的冲击波衰减规律 (其他参数不变)。可见 n 值越大, 冲击波衰减越快, n 值越小冲击波衰减越慢, 而当 $n = 1$ 时, 靶材蜕化为 Maxwell 材料。

4.2 应力波的传播图案

图 3 给出靶中 $x = 8 \text{ cm}$ 处的应力时程曲线, 该曲线揭示了冲击波过后靶截面上应力逐渐衰减的趋势, 但造成这种应力衰减的原因因为冲击波本身衰减仅是由材料的粘塑性耗散引起不同, 同一靶截面上的应力衰减的最后趋势是如下因素共同作用的结果: 材料的粘塑性耗散效应、边界载荷的卸载扰动效应、从冲击波上反射来的扰动效应, 这由离散网格的影响域和三个特征关系 (8)、(9) 式看得很清楚。图 4 所给出的 $t = 23 \mu \text{ s}$ 时的靶中的应力剖面图揭示了应力波通过的那部分靶材中应力由边界应力增加到冲击波阵面紧后方应力的分布情况, 对这一应力剖面的成因可以作与图 3 应力时程曲线同样的解释。但这里强调指出, 边界载荷的变化规律对应力时程曲线和定时应力剖面有着十分明显的影响。例如当边界为恒值载荷时, 从冲击波到边界之间的靶中应力剖面甚至可以是递增的 (如图 4 中的虚线所示), 因此边界载荷的形式对靶中的波形控制以及与此相关的破坏防护将是非常重要的。

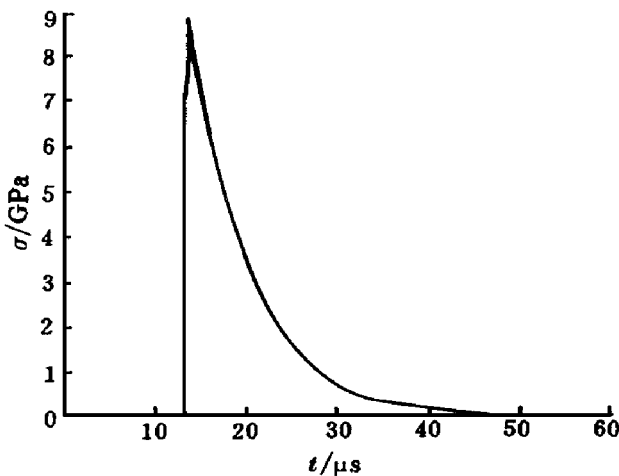


图 3 $x = 8 \text{ cm}$ 处的应力时程曲线
Fig. 3 Stress history at $x = 8 \text{ cm}$

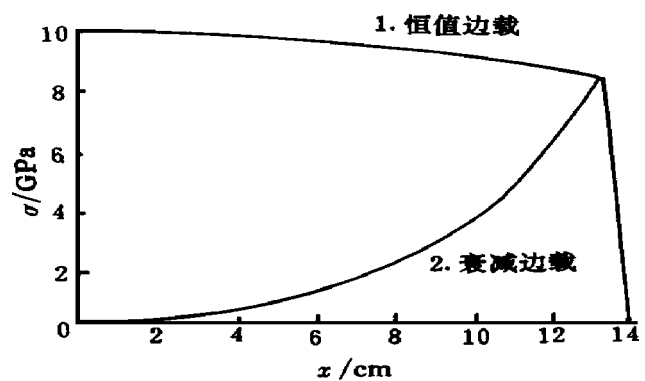


图 4 $t = 23 \mu \text{ s}$ 时的应力剖面图
Fig. 4 Stress profile at $t = 23 \mu \text{ s}$

1. Constant side loading 2. Attenuation side loading

尽管本文是在小变形描述的框架内进行分析的, 而且也没有考虑体积压缩模量 K 随压力 p 的变化等因素, 但容易理解所得出的一些重要结论对用自然增量应变理论的情况也是适用的, 而且在后一情况下的相应分析也是可以完成的, 相应的工作将另外进行深入

探讨。

参 考 文 献

- 1 Craggs J W. Plastic Waves. In: Sneddon I N, Hill R eds. Progress in Solid Mechanics, V. II North-Holland Publ Co (1961). Chap. IV.
- 2 Lee E H. Plastic Wave Propagation Analysis and Elastic-Plastic Theory of Finite Deformation. In: Burke J J, Weiss V eds. Shock Wave and the Mechanical Properties of Solids. Syracuse Univ Press, 1971. 3
- 3 朱兆祥, 李永池, 王肖钧. 爆炸作用下钢板层裂的数值分析. 应用数学和力学, 1981, 2(4): 353
- 4 李永池, 魏勇, 胡秀章. 粘弹性变截面杆中冲击波的演化. 中国科学技术大学学报, 1990, 20: 10
- 5 Bodner S R, Parton Y. Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-hardening Materials. J Appl Mech, 1975, 42: 385

THE EVOLUTION OF SHOCK WAVES IN A VISCOPLASTIC SLAB

Li Yongchi^a, Gong Hongwei^a, Li Xiaojie^{a, b}, Chen Li^a

(a *University of Science and Technology of China, Hefei, 230026*)

(b *Dalian University of Science and Technology, Dalian, 116023*)

ABSTRACT This paper discusses the propagation of one-dimensional strain waves in a viscoplastic slab. The characteristic lines and characteristic relations are derived by using the generalized characteristic theory. By means of the characteristic relations and the jump conditions across a shock wave the evolution rule of the shock is obtained. With the Bodner-Parton viscoplastic materials of power form as example the propagation properties of stress waves in the slab are calculated and discussed.

KEY WORDS viscoplastic slab, shock waves, evolution