

# 延性材料动态损伤演化模型研究

邢立平<sup>a</sup> 周光泉<sup>b</sup>

(a. 成都市龙泉驿56239部队 成都 610100)

(b. 中国科技大学研究生院 合肥 230026)

**摘要** 从微损伤系统的统计描述出发,应用 Mori-Tanaka 理论的物理思想,考虑了微孔洞间的相互作用,建立了延性材料动态损伤的统计演化模型。结果能够描述材料在外载作用下的损伤弱化效应。还分析了材料变形中的两种不同的耗散机制,考虑了含损伤的本构关系。将上述模型用于几种材料的层裂过程数值模拟,并与实验结果作了初步比较。

**关键词** 动态损伤 损伤演化 微孔洞 层裂

**中图法分类号** O346.5

## 1 引言

材料的破坏特别是动态破坏,是理论界和工程界都十分关心的有着重要应用背景的课题之一。不少学者提出了延性断裂过程的数学或物理描述。在延性介质的动态损伤研究中主要有 Seaman 等<sup>[1]</sup>提出的 NAG 模型、Perzyna<sup>[2]</sup>的过应力模型、Johnson<sup>[3]</sup>的胞模型、白以龙等<sup>[4]</sup>对理想微裂纹系统统计演化的一般规律作阐述。Seaman 等用统计的方法,沟通了细观量(如孔洞尺度的分布及其数密度)与宏观力学量之间的联系,建立起描述延性断裂过程的整体框架。Perzyna 把动态粘塑性过应力模型推广到含有损伤的情形,从唯象的角度,用内变量的方法,给出了含有损伤的本构描述。由于该模型参数众多,给实际应用带来不便。Johnson 以胞模型的物理思想,用宏观中空球形结构单元代替含有大量微观孔洞的损伤单元,给出延性介质损伤动态演化模型。封加波<sup>[6]</sup>在白以龙损伤统计理论的基础上,导出了损伤演化的统计宏观描述。上述模型都很好地符合实验结果,只是在处理高损伤度的情况时,都需要引入截断因子,以解决损伤后期的应力松弛问题。

我们应用 Mori-Tanaka 理论<sup>[5]</sup>的物理思想,考虑微孔洞之间的整体相互作用,提出一个损伤演化统计模型,希望能对以上不足之处有一点改善。

## 2 损伤演化的统计模型

对于延性材料,在确定性扩展模型的近似下,将微孔洞体积  $v$  取为微损伤系统的空间尺度,于是,微损伤系统可由一维相空间  $\{v\}$  描述,其演化方程为<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{v}n)}{\partial v} = n_N \\ \dot{v}(v, \sigma) = \frac{\partial v}{\partial t} \\ n_N = n_N(v, t, \sigma) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\sigma$  为应力,  $n(\sigma, v, t)$  为微损伤系统的数密度函数,  $n_N(\sigma, v, t)$  为成核率。用  $V_v$  表示微孔洞的总体积,  $V$  表示宏观微元的体积, 由损伤度  $D$  的定义

$$\begin{cases} D = V_v/V \\ V_v = \int_0^\infty n(v, t, \sigma) v dv \end{cases} \quad (2)$$

在已知  $v(v, \sigma)$ ,  $n_N(v, t, \sigma)$  的具体形式后, 适当选择初、边值条件, 原则上可由上式解出  $n(v, t, \sigma)$ , 求得损伤度  $D$ 。然而目前对微损伤的细观力学规律认识还不清楚, 关于成核与长大速率的资料尚不完备, 从上述途径直接求损伤度  $D$  的做法尚有困难。而以方程组(1)为基础, 损伤度  $D$  的一般演化特征<sup>[5]</sup>

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1-D}{V} \left( \frac{\partial V_v}{\partial t} \right)_g + \frac{1-D}{V} \left( \frac{\partial V_v}{\partial t} \right)_n = \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_g + \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n \quad (4)$$

式中:  $(\partial D/\partial t)_g$ ,  $(\partial D/\partial t)_n$  分别是孔洞长大和成核对损伤度的贡献。式(4)表明, 当基体材料不可压缩时, 损伤度的变化是孔洞成核和长大共同作用造成的。

在孔洞的尺度上, 材料是非均匀的。而且, 由于有微孔洞的存在, 使得边界条件异常复杂。因而在这样一个尺度下, 应用连续介质力学方法来解决孔洞的演化问题目前还不现实。

在孔洞长大的过程中, 存在释放的应变能和表面功、塑性功之间的转化。按照现代物理学中不存在超距力的观点, 这种转化只可能在孔洞附近的有限区域内发生。因而能量法则在此依然有效, 可以认为孔洞的长大与裂纹的扩展相类似, 存在表面功与应变能之间的转化。

(1) 孔洞长大的阈值条件。Johnson<sup>[3]</sup>以准静态长大过程的能量条件作为确定微孔长大的阈值条件, 得到阈值应力为

$$\sigma_0 = -\frac{2}{3}Y \ln\left(\frac{1}{D}\right)$$

式中:  $Y$  为屈服应力。然而, 它只解决了损伤开始时的阈值, 并没有考虑阈值应力随损伤增加自身也在变化。我们以为随着损伤的发展, 微孔洞长大的阈值应力也应发生相应变化。依据相同的物理思想, 得到损伤度为  $D$  时的阈值应力为

$$\sigma_0(D) = -\frac{2}{3}\sigma_c(1-D) \ln\left(\frac{1}{D}\right) \quad (5)$$

式中:  $\sigma_c$  为完好材料的损伤应力阈值。

(2) 单个孔洞的长大规律。在含有大量微孔洞的损伤体中, 由于微孔洞数量如此之巨, 以致任一宏观微元的性质都是均匀的, 可以合理地进行体积平均。这种等效均匀的物理思想已被广泛应用, 处理方法也已成熟。对于等效均匀介质, 材料参数为<sup>[7]</sup>

$$\rho = \rho_0(1-D), \quad \bar{K} = \frac{4\mu K(1-D)}{4\mu + 3K} \quad (6)$$

式中:  $\rho_0$  为材料密度,  $\rho$  为等效微元密度,  $\mu$  为剪切模量,  $K$  为体积模量,  $\bar{K}$  为等效体积模量。

在承认等效均匀的前提下, 应用 Mori-Tanaka 理论的物理思想, 来讨论单个孔洞的长大。此时有损伤的宏观微元可以用一无损伤的等效均匀的宏观微元来代替, 在等效均匀宏观微元中的微孔洞投入, 就代表着对原损伤微元的孔洞选择。于是现在所探讨的模型成为半径为  $r$  的孔洞在无限均匀介质中的长大问题。在  $\Delta t$  时间内, 假定孔洞的半径从  $r$  长大到  $r + \Delta r$ , 其面积与体积的变化分别为  $\Delta s$  和  $\Delta v$ , 则有

$$\Delta v = r\Delta s/2 \quad (7)$$

孔洞长大过程中的能量转化关系

$$\lambda\Delta s = \delta E\delta v \quad (8)$$

式中:  $\lambda$  为表面功;  $\delta E$  为孔洞从  $r$  膨胀到  $r + \Delta r$  过程中, 孔洞附近区域单位体积材料释放的应变能;  $\delta v$  是在  $\Delta t$  时间间隔内, 孔洞从  $r$  膨胀到  $r + \Delta r$  过程中, 为孔洞长大提供能量的那部分介质的体积。文献[5]第三条假定

$$\delta v = 4\pi r^2 c \Delta t \quad (9)$$

式中:  $c$  为扰动波速度, 在此假定为介质的体积声速。由式(7)~(9)得

$$\dot{v} = \frac{3vc\delta E}{2\lambda} \quad (10)$$

单位体积材料释放的应变能  $\delta E$  包括体变能和畸变能, 在此我们只对最简化的模式进行讨论, 不考虑畸变能的影响

$$\delta E = \int_{\sigma_0}^{p_s} p \frac{dv}{v} = \frac{p_s^2 - \sigma_0^2}{2\bar{K}} \quad (11)$$

式中:  $p$  为材料承受的静水压力;  $\sigma_0$  是损伤度为  $D$  时的阈值应力, 由式(5)确定;  $\bar{K}$  为损伤度为  $D$  时的体积模量, 即宏观微元的等效体积模量;  $p_s$  为释放能量部分基体材料的局部应力  $p_s = p/(1-D)$ 。

由式(10)、(11)得单个孔洞长大的动力学方程

$$\dot{v} = 3v \frac{p_s^2 - \sigma_0^2}{4\bar{K}\lambda} c \quad (12)$$

(3) 宏观损伤度演化方程。依据微孔洞系统的统计演化特性, 将式(12)代入式(4), 得到孔洞长大造成的损伤度演化为

$$\dot{D}_s = 3cD \frac{p_s^2 - \sigma_0^2}{4\lambda\bar{K}} \left(1 + \frac{3K}{4\mu} D\right) \quad (13)$$

从上式可以看出, 采用的模型有两个特点: 一是不存在一个固定的孔洞长大的阈值应力, 阈值应力是随材料损伤的发展而变化的; 二是损伤度的演化率随损伤度单调增大, 也就是说在相同载荷作用下, 已有损伤的材料比没有损伤的材料其损伤发展要快, 损伤大的材料比损伤小的材料其损伤发展要快, 这也正是损伤对材料的弱化的另一种表现形式。而以前模型在损伤度较低的时候能够反映损伤对材料的弱化作用, 损伤度较高的时候却不能反映这一物理现象。

### 3 损伤演化在层裂中的应用

研究材料的宏观破坏面临着两个问题:一是材料在外载作用下损伤的演化与发展,二是已经发展了的损伤对材料性能的弱化。问题的复杂性在于:一方面材料中损伤的演化与发展要依赖于材料的力学性能,特别是动态力学性能,以已知有损伤材料的动态力学性能为前提;另一方面有损伤材料的动态力学性能又是和它已有的损伤密切相关。在材料的破坏过程中,这两者始终是耦合在一起的。目前,我们只能对这两个问题分别进行研究。

#### 3.1 两种不同的不可逆变形机制

材料在微结构尺度上的损伤,宏观上表现为一种不可逆的耗散。它的微观机制就是微孔洞的成核与发展。在金属材料中还存在另外一种耗散机制,即金属塑性变形。金属材料塑性变形的微观机制是某个滑移面上位错的滑动,它的驱动力是这一滑移系上的剪应力。因此,塑性变形的发生与发展一般与静水压力无关。与此相反,损伤或者微孔洞的成核与演化却是强烈地依赖于静水压力。由此可见,这是两类性质完全不同的耗散结构与变形机制。而且,除了纯静水压和纯剪切的极端情形外,这两种变形或者耗散机制总是同时存在,甚至相互耦合的。以前材料断裂或破坏的判据对于一维应力和一维应变的两种极端情形,是分别给出临界塑性应变  $\gamma_i$  和临界损伤度  $D_i$ 。后来的实验表明,不同的试验条件,材料具有不同的临界损伤值,如单向拉伸条件下的临界损伤值就比层裂时要小得多。于是,Johnson<sup>[8]</sup>引入了断裂面的概念,用应力-应变-损伤度空间中的一个曲面来表征材料断裂的临界条件,这个曲面称为断裂面。

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_i}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_i}\right)^2 = 1 \quad \varphi > 0, \quad \gamma > 0, \quad -p/\tau > 0 \quad (14)$$

式中:  $\gamma_i = \gamma_0 + \Delta\gamma \exp(ap/2\tau)$ ,  $\varphi_i, \gamma_0, \Delta\gamma, a$  等为材料参数。上式不但反映了两种不同的耗散变形,而且包含了两种耗散变形的相互耦合。因此,这一判据比较真实地反映了材料破坏的物理实质。然而在我们所讨论的层裂问题中,由于塑性变形只占极少部分,所以破坏判据以损伤为主。

#### 3.2 层裂的数值模拟

##### 3.2.1 守恒方程组

一维平面应变 Lagrange 方程为<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} v = \frac{\partial x}{\partial m} \\ \dot{u} = -\frac{\partial \sigma}{\partial m} & \text{自然应变 } \dot{\epsilon} = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \\ \dot{E} = -p\dot{v} + v s \dot{\epsilon} \\ \dot{E} + (p + q - s)\dot{v} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

##### 3.2.2 材料的本构关系

采用流体弹塑性本构模型,将应力分为静水压和偏应力两部分

$$\sigma = -p + s \quad (16)$$

偏应力部分为<sup>[10]</sup>

$$\begin{cases} s_{ij} = s'_{ij} + \frac{4}{3}a_1^2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \\ s'_{ij} = \frac{4}{3}\mu\dot{\epsilon}_{ij} \end{cases} \quad J'_2 \leq \frac{2}{3}Y \quad (17)$$

$$s_{ij} = \pm \frac{2}{3}Y\delta_{ij} + \frac{4}{3}a_2^2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad J'_2 > \frac{2}{3}Y$$

式中： $a_1, a_2$  为常数，一般取为  $a_1=0.9, a_2=2$ ，即可较好地模拟材料的实验结果， $\eta$  为粘性系数

$$\eta = \eta_0\dot{\epsilon}_{ij}^{-1/2} \quad (18)$$

流体静压部分  $p$  仍采用 Mie-Grüneisen 状态方程。当处于压缩状态，即  $v < v_0$  (此处为比容) 时，以 Hugoniot 状态作为参考态。Grüneisen 状态方程的形式为

$$p = \frac{\Gamma}{v}(E - E_k) + p_k \quad (19)$$

式中：

$$p_k = \frac{c_0^2(v_0 - v)}{[v_0 - s_0(v_0 - v)]}$$

$$E_k = E_0 + \frac{1}{2}p_k(v_0 - v)$$

材料处于膨胀态，即  $v \geq v_0$  时，Grüneisen 方程的形式为

$$p = \frac{\Gamma}{v}[E - \frac{c_v}{3\beta}(\frac{v}{v_0} - 1)] \quad (20)$$

式中： $c_v$  为比热， $\beta$  为热传导系数。

### 3.2.3 损伤度的演化方程

我们主要考证损伤程度较为严重的层裂后期情况，而成核效应主要集中于损伤初期，因此，不计成核效应，对结果不会产生本质的影响。

$$D = \begin{cases} 3cD \cdot \frac{p_s^2 - \sigma_0^2}{4\lambda K} (1 + \frac{3KD}{4\mu}) & p_s < \sigma_0 \\ 0 & p_s \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (21)$$

### 3.2.4 人工粘性

人工粘性采用如下形式

$$q = \begin{cases} \frac{1}{v}[a_3(\frac{\partial u}{\partial x})^2(\Delta x)^2 + a_4c|\frac{\partial u}{\partial x}|\Delta x] & \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x} \geq 0 \end{cases} \quad (22)$$

式中： $a_3, a_4$  为常数。

为验证理论的正确性，将上述损伤演化方程和材料本构描述应用于平板撞击的一维应变动态破坏的模拟。计算所用材料参数列于表 1。第一个算例是 OFHC 铜的撞击层裂实验<sup>[3]</sup>，靶厚 0.622mm，飞片厚 1.587mm，速度 158.5m/s，在靶的背后装有机玻璃厚板，以安置锰铜压力计，实验与计算结果见图 1。第二个算例是 LY12 铝对称撞击实验<sup>[11]</sup>，靶厚 6.06mm，飞片厚 2.02mm，速度 761m/s，用电容量法测量自由面的速度，实验与计算结果见图 2。从图中可以看出，计算与实验结果基本一致。

表1 实验材料参数

Table 1 Parameters of the experimental material

材料	$\rho_0/(\text{g}/\text{cm}^3)$	$c_v/(\text{J}/\text{gK})$	$\beta/(10^{-5}\text{K}^{-1})$	$Y_0/\text{GPa}$	$\Gamma_0$	$D_0$
OFHC	8.924	0.389	1.767	0.15	2.0	0.0003
LY12	2.78	0.92	2.4	0.33	1.7	0.0006
PMMA	1.184	—	—	—	—	—

材料	$c_0/(\text{m}/\text{s})$	$s_0$	$\mu/\text{GPa}$	$K/\text{GPa}$	$\eta_0/(\text{kPa} \cdot \text{s}^{1/2})$	$\sigma_0/\text{GPa}$
OFHC	3910	1.51	48.4	135.5	5.85	0.205
LY12	5560	1.26	37.5	77	15	0.116
PMMA	2760	2.5	—	—	—	—

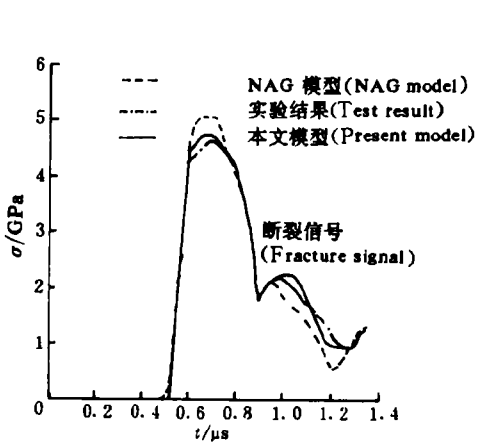


图1(a) OFHC靶后窗口材料应力波形  
Fig. 1(a) Stress waves in the back window of the OFHC target

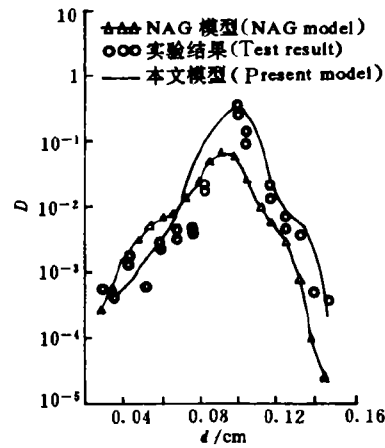


图1(b) OFHC靶中损伤分布  
Fig. 1(b) Damage distribution in the OFHC target

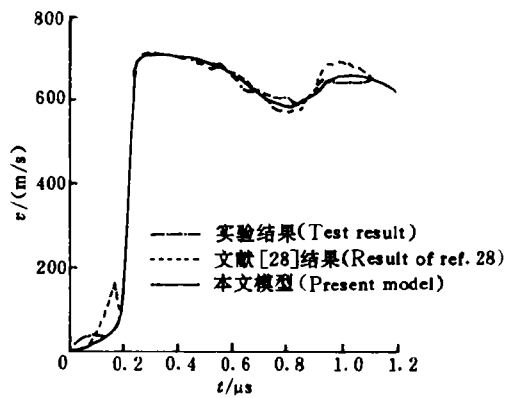


图2(a) LY12靶后自由面速度历史曲线  
Fig. 2(a) Evolution of the free surface velocity on the back of the LY12 target

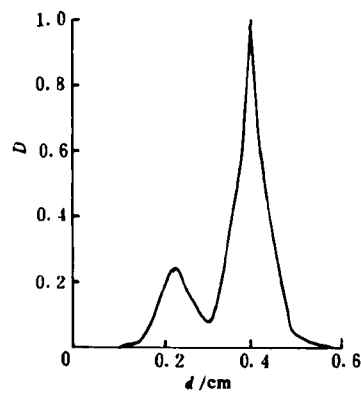


图2(b) LY12靶中损伤分布  
Fig. 2(b) Damage distribution in the LY12 target

## 4 讨论

无论是 NAG 模型、胞体模型, 还是别的损伤演化模型, 在处理高损伤度问题时, 都需要引入一个截断因子, 或临界损伤度, 以解决损伤后期的应力松弛问题。究其原因 NAG 模型没有解决孔洞之间的相互作用问题, 只考虑了损伤的成核与孔洞的各自长大; 而 Johnson 的胞体模型借助宏观的胞元模型描述微观孔洞的发展, 而这种宏观结构不具有最终弱化失稳的特性。我们提出的损伤演化模型考虑了孔洞之间的相互影响。得到损伤演化速度与损伤度成单调趋势, 能够反映高损伤度时的损伤弱化现象。

对损伤演化方程作无量纲处理

$$\dot{D} = D(1 + \xi D) \left[ \left( \frac{\dot{p}_s}{p_c} \right)^2 - \left( \frac{2\sigma_0}{3p_c} \right)^2 \ln^2 D (1 - D)^2 \right] \quad (23)$$

式中:  $p_c = 4K\lambda/3c$ ,  $\xi^{-1} = 4\mu/3K$ 。对上式方括号中的第二项做如下简化: 对于低损伤的情形, 由于  $D$  本身变化不大, 用常量  $\bar{D}$  代替其平均效应; 对于损伤较为严重的情形, 这一项变化很快趋于零, 亦可用常量  $\bar{D}$  代其最初平均效应。因此

$$\dot{D} = D(1 + \xi D) \left[ \left( \frac{\dot{p}_s}{p_c} \right)^2 - \eta^2 \right] \quad (24)$$

式中:  $\eta = \frac{2\sigma_0}{3p_c} (1 - \bar{D}) \ln \bar{D}$ 。积分上式得

$$\ln \frac{D/D_0}{(1 + \xi D)/(1 + \xi D_0)} = \int_0^t \left[ \left( \frac{\dot{p}_s}{p_c} \right)^2 - \eta^2 \right] dt$$

$$\text{即} \quad \int_0^t \left[ \left( \frac{\dot{p}_s}{p_c} \right)^2 - \eta^2 \right] dt = A \quad (25)$$

式(25)即为损伤累积理论的损伤判据, 指数为 2, 反映了能量的守恒与转化。可以看出这种形式的判据似乎更合乎现有的守恒准则。

在平板撞击实验中, 飞片厚度为  $\delta$  时, 有拉伸应力幅值  $\rho_0 u_0 U/2$ , 长度  $l = 2\delta/U$ 。其中,  $\rho_0$  为材料的初始密度,  $U$  为冲击波速度,  $u_0$  为飞片速度。积分式(24)

$$\ln \frac{D/D_0}{(1 + \xi D)/(1 + \xi D_0)} = \left[ \left( \frac{\rho_0 U}{2p_c} u_0 \right)^2 - \eta^2 \right] \frac{2\delta}{U} \quad (26)$$

由上式即可初步估计材料的层裂强度或者一定条件下的损伤程度。

与 Davison 等<sup>[12]</sup>的损伤连续统理论相比较, 可以看出, 方程(26)实际上是复合型的累积损伤演化方程。Davison 定义的损伤度  $D$  是一个唯象的内变量, 缺乏确切的宏观度量<sup>[13]</sup>, 这个概念又未能和具体、实用的工程概念相联系, 因此, 当时也未能得到工程界的积极响应。我们从细观的统计观点出发, 经过适当简化得到了损伤演化的一种具体宏观描述, 而且建立了与损伤连续统理论的联系。它既说明了在损伤研究中, 各种理论之间应当有所联系, 而且也确有联系; 也充实了 Davison 等关于损伤累积理论的内容, 有可能为损伤连续统理论在实际应用中提供具体的度量方法。

## 5 结 论

(1)应用 Mori-Tanaka 理论的物理思想和细观统计力学方法,结合考虑了微空洞之间的相互作用,导出了动态损伤演化方程,它能够反映损伤对材料的弱化这一物理现象。

(2)从动态损伤演化方程出发,建立了细观统计力学与损伤连续统理论之间的关系,说明了连续统理论中的层裂损伤判据为在此过程中能量守恒与转化规律的体现。

(3)将上述结果用于 OFHC 铜和 LY12 铝合金的实验模拟,吻合较好。

### 参 考 文 献

- 1 Curran D R, Seaman L, Shockey D A. *Physics Reports*, 1987, 147: 253
- 2 Perzyna P. *Inter J Solids Struct*, 1986, 22(7): 797
- 3 Johnson J N. *J Appl Phys*, 1981, 52(4): 2812
- 4 白以龙,柯孚久,夏蒙莽. *中国科学*, 1991, 23(3): 290
- 5 封加波. 金属动态延性破坏的损伤度函数模型: 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 1992
- 6 Mori T, Tanaka K. *Acta Metall*, 1973, 1: 571
- 7 Vinh T, Afzali M, Roche A. In: Miller K J et al eds. *Mechanical Behaviour of Materials*, Oxford, New York: Pergamam Press, 1979. 633
- 8 Johnson J N. *J Appl Phys*, 1981, 52: 2812
- 9 王礼立. *应力波基础*. 北京: 国防工业出版社, 1985
- 10 董玉斌,张万甲,经福谦,等. *高压物理学报*, 1988, 2(4): 305
- 11 周光泉,程铁军. 铝合金层裂的实验研究和数值模拟. 863—410 专题报告, 1991
- 12 Davison L, Stevens A L. *J Appl Phys*, 1972, 43: 988
- 13 白以龙. 见: 王礼立, 等编. *冲击动力学进展*. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992. 34

## STUDY ON DYNAMIC DAMAGE EVOLUTION OF DUCTILE MATERIALS

Xing Liping<sup>a</sup>, Zhou Guangquan<sup>b</sup>

(a. Unit 56239 P. L. A. Longquanyi, Chengdu, 610100)

(b. Graduated School, University of Science and  
Technology of China, Hefei, 230026)

**ABSTRACT** Based on the statistical theory of micro-damage system, taking account of the interaction of the voids, using the physical idea of Mori-Tanaka's theory, the paper sets up a statistical model of dynamic evolution of ductile materials which comprehensively explains the physical phenomena of material weakening along with the damage increasing. The two opinions of poles apart of dissipation mechanism in material deformation are discussed, the constitutional equation containing damage is set up and used on spalling simulation of several materials, it's results are compared to the experimental results.

**KEY WORDS** dynamic damage, damage evolution, micro-voids, spallation