

梁中复合应力波的传播

王肖钧 肖绍平 胡秀章 余立新

(中国科技大学力学与机械工程系 合肥 230026)

摘要 采用有限差分法讨论了梁中复合应力波的传播,给出了粘塑性悬臂梁当自由端受突加弯矩载荷作用时梁内复合应力波传播的基本图象。指出,在冲击早期响应阶段,截面横向转动惯性效应起着重要作用,是不可忽视的。标志弹塑性边界的塑性铰,一开始由自由端向固定端运动,但在反射卸载波的迎面作用下,会出现回退现象。在波动早期阶段,固定端主要处于弹性变形状态。此外,还对弹塑性梁中复合应力波的控制方程进行了必要的讨论。

关键词 应力波 冲击响应 有限差分法

中图分类号 O347.4

悬臂梁在冲击载荷作用下的动力响应,早在50年代就开始研究了^[1,2],由于这些研究多集中于忽略剪切变形和横向转动惯性效应的 Bernoulli 梁上,因此不涉及梁中复合应力波的传播。事实上,结构的动力响应大致可分成两类既相互有别又紧密联系的问题,即应力波问题和整体响应问题^[3],要完整地理解梁的冲击响应特性,研究梁中复合应力波的传播及其演化是不可忽视的重要方面。准确地描述梁的运动状况,必须从梁的 Timoshenko 方程出发。可是由于求解双曲型方程比较困难,目前我们只能对一些特殊情况(如弹粘塑性体)求得特征线解^[4,5]。本文从有限差分法出发,求解粘塑性悬臂梁和弹塑性悬臂梁当一端受冲击载荷作用时,梁中复合应力波传播的基本图象和特性,为今后开展结构中的波动效应研究积累经验。

1 基本方程及其离散

当用广义应力 M 和 Q 表示时,考虑剪切变形和横向转动效应的 Timoshenko 梁的动力学方程可统一地写成

$$A(\partial W/\partial t) + B(\partial W/\partial x) = b \tag{1}$$

式中: $W = \{\omega, v, M, Q\}^T$, $\omega = \partial\alpha/\partial t$ 表示梁截面的转动角速度(见图1), $v = \partial w/\partial t$ 表示 z 方向速度(w 为挠度),系数矩阵 A 和 B 分别为

$$A = \begin{bmatrix} I(x)\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(x)\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ EI(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -GA_s(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

• 国家自然科学基金资助。

1996-03-01收到原稿,1996-05-08收到修改稿。

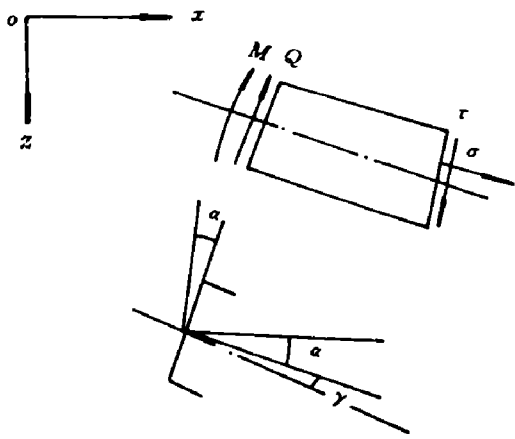


图 1 梁截面上的内力与变形

Fig. 1 Forces and deformation on the cross-section of beam

其中: $I(x)$ 表示梁的截面矩, $I = \int z^2 dA$, 对于变截面梁, 它是 x 的函数。 $A(x)$ 是矩形梁的横截面面积, $A_s(x)$ 是等效截面积, 矢量 b 表示

$$b = \{Q, 0, f_1(M, Q), f_2(M, Q)\}^T \quad (3)$$

其中: $f_1(M, Q), f_2(M, Q)$ 是由本构关系确定的广义应力的函数。对于幂函数型的弹粘塑性体, 本构关系可写成

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + C_1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)^n \\ \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + C_2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)^n \end{cases} \quad (4)$$

式中: C_1, C_2, n 为材料常数, σ_0 和 τ_0 分别表示简单拉伸和纯剪切条件下的屈服应力。(4)式

不难化为广义应力 M, Q 的表达式

$$f_1 = -D_1 \left(\frac{M}{M_0} - 1\right)^n, \quad f_2 = -\{GA_s(x)\omega + D_2 \left(\frac{Q}{Q_0} - 1\right)^n\} \quad (5)$$

式中:

$$M_0 = \int \sigma_0 z dA, \quad Q_0 = \int \tau_0 dA = \tau_0 A_s, \quad D_1 = C_1 \frac{EI}{h} \left(\frac{2n+1}{4n}\right)^n, \quad D_2 = C_2 GA_s.$$

方程(1)属典型的双曲型方程, 其特征方程为

$$\|B - aA\| = 0 \quad (6)$$

对于弹粘塑性体, 由上式可以求得两个特征波速

$$a_1^2 = E/\rho, \quad a_2^2 = GA_s/\rho A \quad (7)$$

a_1, a_2 代表了弹性纵波和横波波速, 在梁中复合应力波问题里它们分别被称为弯曲波和剪切波。由于它们是常数, 因此, 弹粘塑性梁的波动图象相对要简单些, 可以用特征线方法进行数值求解^[5]。但是对于弹塑性梁说来, 塑性状态下的特征波速将表现为与应力状态有关的塑性快慢波^[6], 其波动特性要比粘塑性梁复杂得多, 此时用特征线法进行数值求解会有一些的难度, 为此我们采用有限差分方法, 直接对方程(1)的分量形式采用具有二阶精度的交叉中心差分格式进行离散, 其离散化方程为

$$\begin{aligned} v_{j+1/2}^{n+1/2} &= v_{j+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho A_{j+1/2} \Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \\ \omega_{j+1/2}^{n+1/2} &= \omega_{j+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho I_{j+1/2}} Q_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\rho I_{j+1/2} \Delta x} (M_{j+1}^n - M_j^n) \\ M_j^{n+1} &= M_j^n - EI_j \frac{\Delta t}{\Delta x} (\omega_{j+1/2}^{n+1/2} - \omega_{j-1/2}^{n+1/2}) + f_1(M_j^{n+1/2}, Q_j^{n+1/2}) \Delta t \\ Q_j^{n+1} &= Q_j^n + GA_{s,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2}) + f_2(M_j^{n+1/2}, Q_j^{n+1/2}) \Delta t \end{aligned} \quad (8)$$

这里, v, ω 定义在空间和时间的半格点上, M, Q 则定义在整格点上, (8)式中的后两

式由于出现 $M_i^{n+1/2}$ 和 $Q_i^{n+1/2}$ 需要通过迭代法求解。计算实践表明迭代过程收敛很快,通常只要 1~2 次即达到精度要求。

当矩形梁的一端受突加恒值弯矩载荷 M^* 作用时,梁内将出现强间断弯曲波以速度 a_1 传播。由间断面上的跳跃条件及特征线上的相容关系,我们可以独立地求出间断面上的峰值弯矩。对于右行强间断波,峰值弯矩可通过常微分方程表示

$$\frac{dM}{dx} = \frac{3M(x)}{2h(x)} \frac{h(l) - h(0)}{l} - \frac{A(x)}{4a_1} I(x) \left[\frac{M(x)}{M_0(x)} - 1 \right]^n \quad (9)$$

式中: $M_0(x)$ 表示截面 x 处的初始屈服弯矩, $M_0(x) = \int_{\frac{h(x)}{2}}^{\frac{h(x)}{2}} \sigma_0 z dz$ 。特别地,对于等截面梁,(9)式可进一步解析地表示成

$$M = M_0 + \left\{ \frac{D_1(n-1)M_0^{-n}}{2a_1} + (M^* - M_0)^{1-n} \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (10)$$

2 算例和讨论

图 2 表示自由端受突加弯矩 M^* ($M^* > M_0$) 作用的矩形悬臂梁。梁的材料参数如下: $\rho = 7.93 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E = 0.21 \text{ TN/m}^2$, $G = 0.0624 \text{ TN/m}^2$, $\sigma_0 = 90.8 \text{ GPa}$, $\tau_0 = 0.655 \text{ GPa}$, $C_1 = C_2 = 40.4$, $n = 5$ 。

2.1 等截面悬臂梁中复合应力波的传播

图 3 表示突加恒值弯矩载荷作用下梁内不同时刻弯矩的空间分布。计算结果表明,特征线法与有限差分法相差不超过 3%,这表明本文建立的差分格式是有效的。从图 3 可以看到复合应力波的显著特点:即便边界上作用着恒值载荷,由于弯曲波和剪切波的耦合作用,梁内弯矩分布仍是十分复杂的。紧跟强间断弹性弯曲波后方的是强度和范围不断增大的弹性卸载区,弹性卸载将导致负弯矩的产生,这表示梁截面轴向应力方向发生改变。

与图 3 相对应时刻的剪力分布如图 4 所示,可见剪力分布始终是连续的。对于忽略横向转动惯性效应的 Bernoulli 梁说来,截面弯矩 M 与剪力 Q 间应满足如下平衡方程

$$\partial M / \partial x = Q \quad (11)$$

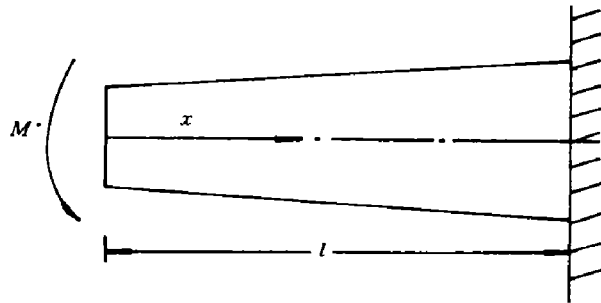


图 2 悬臂梁一端受突加载荷作用
Fig. 2 Cantilever beam loaded at the free end by an impulsive bending moment

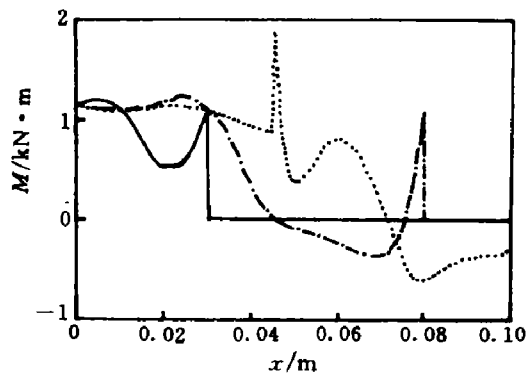


图 3 不同时刻弯矩空间分布
Fig. 3 Bending moment distributions in the cantilever beam

由此将得出强间断弯曲波波面上剪力为无穷大的不合理结论。对照图 2 和图 3,可以看到对于 Timoshenko 梁, M 与 Q 之间不服从(11)式。这表明横向转动惯性效应在梁的冲击响应早期阶段是不可忽略的。

图 5 是梁内弹塑性区的计算结果。由图可见:(1)表征弹塑性边界的塑性铰,一开始随强间断弹性弯曲波运动,在弹性卸载区形成后便以较低的速度向固定端移进,当与反射卸载波迎面相遇后,塑性铰会向自由端回退。因此,在波动早期阶段塑性铰到不了梁的根部。(2)弹性间断波及之后的卸载波在固定端反射后,强度得到增大,但是由于卸载波的作用是主要的,因此固定端基本上处于弹性状态。(3)梁内某一截面将处于塑性-弹性-塑性等多次交变状态,其情形是十分复杂的。

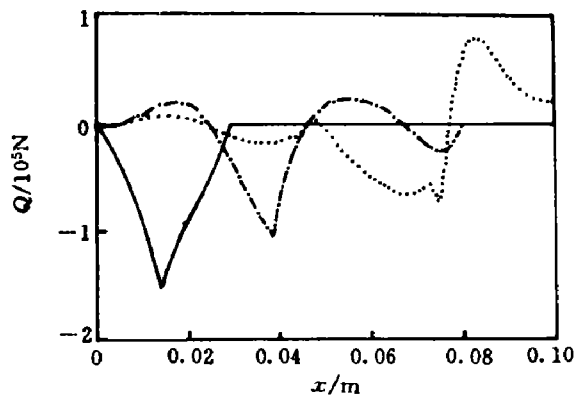


图 4 不同时刻剪力分布
Fig. 4 Shearing force distributions in the cantilever beam

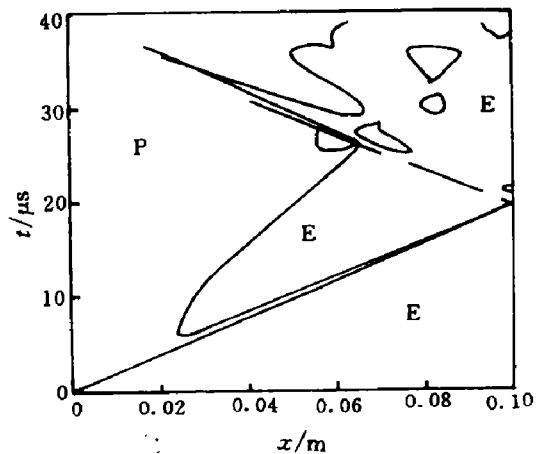
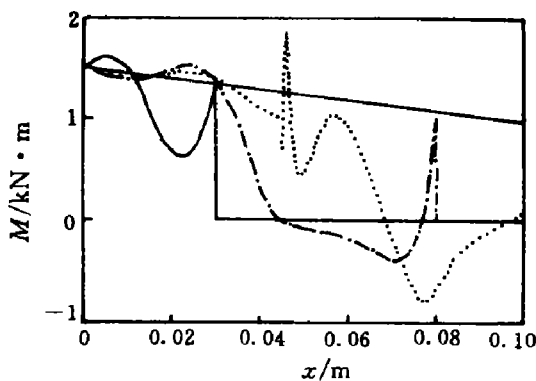


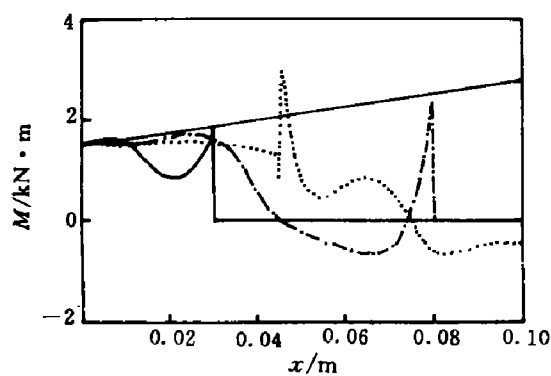
图 5 梁内各点弹塑性状态随时间的变化
(E 表示弹性区, P 表示塑性区)
Fig. 5 Elastic-plastic states in the beam at different time (E—elastic, P—plastic)

2.2 变截面悬臂梁中复合应力波的传播

图 6 为递增截面和递减截面梁受突加恒值弯矩作用后梁内的弯矩分布。显然,强间断



(a) 递减截面
(a) Decreasing cross-section



(b) 递增截面
(b) Increasing cross-section

图 6 变截面梁中的弯矩分布

Fig. 6 Bending moment in variable cross-section of the cantilever beam

面上的峰值弯矩与解析解(10)式完全吻合。具有典型意义的是,在递增截面梁中,弹性强间断弯曲波随着波的传播而不断增大,而在递减截面梁里情形正好相反。 M 增大并不意味着应力 σ 增大,随着截面的增大,初始屈服弯矩 $M_0(x)$ 也增大,若以 $M(x)/M_0(x)$ 为尺度,则强间断面峰值便随波的发展而降低了。

2.3 弹塑性梁中的复合应力波

设弹塑性梁服从 Von Mises 屈服准则,则有

$$f = \sigma^2 + 3\tau^2 - Y^2(W_p) = 0 \quad (12)$$

由流功法则可得弹塑性本构关系

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{Y^2} \dot{W}_p, \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{3\tau}{Y^2} \dot{W}_p \quad (13)$$

设梁截面屈服后即进入完全塑性状态,则(13)式可表示成广义应力 M 和 Q 的形式

$$\frac{\partial M}{\partial t} + EI \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{EM^2}{Y^2 A} \frac{\partial \omega_p}{\partial x} + \frac{EQM}{A_s Y^2} \left(\frac{\partial v_p}{\partial x} - \omega_p \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \omega \right) GA_s + \frac{3GQ}{Y^2 A} \left\{ -M \frac{\partial \omega_p}{\partial x} + Q \left(\frac{\partial v_p}{\partial x} - \omega_p \right) \right\} = 0 \quad (15)$$

式中: ω_p, v_p 分别表示截面转动角速度和横向速度的塑性分量。由增量型弹性关系

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}^e, \quad \dot{\tau} = G \dot{\gamma}^e \quad (16)$$

可以导得

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{EI} \frac{\partial M}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial x} - \omega_p = GA \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \omega \right) - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (18)$$

将(17)、(18)式代入(14)、(15)式后,即得以广义应力 M 和 Q 表示的本构关系,它们和 Timoshenko 梁的运动方程一起构成了弹塑性梁的控制方程,该控制方程依然可表示成(7)式,但系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} I\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{4}{3} \frac{M^2}{Y^2 AI}\right) & -\frac{EQM}{A_s Y^2} \\ 0 & 0 & -\frac{3GQM}{Y^2 AEI} & \left(1 - \frac{3GQ^2}{Y^2 A}\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{4}{3} \frac{EM^2}{Y^2 A} & \frac{QMEGA}{Y^2 A_s} & 0 & 0 \\ -\frac{3GQM}{Y^2 A} & -GA_s \left(1 - \frac{3GQ^2}{Y^2 A_s}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \left\{ Q \quad 0 \quad -\frac{QMEGA}{Y^2 A_s} \omega \quad \omega GA_s \left(1 - \frac{3GQ^2}{Y^2 A_s}\right) \right\}$$

此时由特征方程(8)式求得的特征波速度不再是常数,而与该点的应力状态 M 和 Q

有关,其波动图象要比粘塑性梁复杂得多。

参 考 文 献

- 1 Conroy M F, Providence R I. Plastic-rigid Analysis of Long Beams Under Transverse Impact Loading. *J Appl Mech*, 1952,19:405~470
- 2 Bolay B A, Chao C C. Some Solutions of Timoshenko Beam Equations. *J Appl Mech*, 1955,22:579~586
- 3 杨嘉陵,余同希,王 仁. 结构塑性动力响应当前研究进展和重点. *力学进展*,1993,23:23~33
- 4 杨贵通,熊祝华. 塑性动力学. 北京:清华大学出版社,1984.
- 5 Wang Xiaojun, Li Yongchi, Cheng Li, et al. Numerical Study of Combined Stress Waves in Viscoplastic Beam. *Proc of IUTAM Symp on Impact Dyn. Peking: Peking Univ Press*, 1994, 218~223
- 6 王礼立,余同希,李永池. 冲击动力学进展. 合肥:中国科技大学出版社,1992:243~274

PROPAGATION OF COMBINED STRESS WAVES IN THE BEAM

Wang Xiaojun, Xiao Shaoping, Hu Xiuzhang, Yu Lixin

*(Department of Modern Mechanics, University of
Science and Technology of China, Hefei, 230026)*

ABSTRACT The combined stress waves in the cantilever beam are studied in the paper with finite difference method. The wave patterns in the viscoplastic beam due to bending moment loading at the free end are obtained by numerical simulations. The results show that the rotatory inertia of the cross-section plays an important part at the early stage of dynamic response of the beam, and hence, it must be taken into consideration. Plastic hinge indicates the boundary of elastic and plastic domain moves to the fixed end at first but it will move back due to the interaction of reflected waves. During the early wave motion stage the fixed end is mostly in elastic deformation. Finally, the governing equations of combined stress waves in elastic-plastic beam are also discussed.

KEY WORDS stress wave, dynamic response, finite difference method