

# $k-D-a-B$ 模型和 R ichm yer-M eshkov 不稳定性的数值模拟\*

张忠珍 王继海

(北京应用物理与计算数学研究所 计算物理实验室 北京 100088)

**摘要** 给出一个适用于流体力学数值模拟的湍流混合模型。由于引入湍流质量通量和密度脉动关联量的演化方程,它比一般的  $k-X$ 模型能更准确地描述界面不稳定性引起的可压缩湍流混合过程,并且可以不需要人为给定初始湍流场。我们用同一套参数模拟了不同 A t w o o d 数的激波管实验,数值结果与实验基本一致。

**关键词** 湍流混合 数值模拟 界面不稳定性

中图法分类号 O 241.82 O 351.2

## 1 引言

受扰动的两轻重流体的交界面,当处于方向由重流体指向轻流体的有效重力场或受到激波作用时扰动将发展,界面将失稳,两种物质将发生湍流混合。前者,重力场作用下的不稳定性,人们常称为 R a y l e i g h-T a y l o r(简称 R-T)不稳定性,而后者,激波作用下的界面不稳定性,则常称为 R i t c h m y e r-M e s h k o v(简称 R M)不稳定性。B i r k h o f f<sup>[1]</sup>在 1960年指出,这类流体界面不稳定性的发展将经历五个阶段,即最初的线性发展阶段、变形阶段、规则非线性段、不规则非线性段,以及最终的湍流混合阶段。人们发现,对于随机扰动,向湍流混合转变的过程很短暂。然而,湍流流动必定是三维的,其尺度很小,对于包含有复杂物理过程的问题直接数值模拟有一定的困难。20多年来,国外的研究者们发展了一系列的湍流混合模型,其中一些模型已开始用于 ICF的研究之中。在我国这方面工作尚属起步,我们曾在 B e s n a r d<sup>[2-10]</sup>等模型的基础上发展了二阶封闭模型<sup>[3-5]</sup>。为了适应不同的需要,我们在这些模型的基础上建立一个适用于三维计算的简化模型。比一般的  $k-X$ 模型增加了两个关联量,密度脉动自相关,湍流质量通量的演化方程。引入这两个关联量使模型能更准确的描述可压缩效应的影响和较少的依赖人为给定的初始条件。

## 2 模型和基本方程

我们的基本假定与 R e y n o l d 应力模型基本相同,即假定湍能的耗散主要是不同尺度的涡相互作用导致的,粘性的影响可以忽略,此外,不同物质的微观相互交换可以忽略。另外,我们假定流动状态离平衡态不远(湍能产生项与耗散项接近平衡),因此可以用代数关系式来描绘 R e y n o l d 应力。我们还假定湍流扩散是各向同性的。在 R e y n o l d 应力模型基

\* 中国工程物理研究院资金资助项目。

1996年-04-02收到原稿,1996-07-24收到修改稿。

础上,我们给出以下一组描述流场的控制方程

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial d}{\partial t} + u_l \frac{\partial d}{\partial x_l}\right) &= -d \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \\ d\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{K}_{li} \\ d\left(\frac{\partial I}{\partial t} + u_l \frac{\partial I}{\partial x_l}\right) &= -p \frac{\partial}{\partial x_l} (u_l - a_l) - \frac{\partial d_i}{\partial x_l} + c_{k3} dk \sqrt{D} \\ d\left(\frac{\partial c}{\partial t} + u_l \frac{\partial c}{\partial x_l}\right) &= -\frac{\partial dS_l}{\partial x_l} \\ d\left(\frac{\partial k}{\partial t} + u_l \frac{\partial k}{\partial x_l}\right) &= -\mathbf{K}_{il} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + a_l \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} c_{k1} d \frac{k}{\sqrt{D}} \frac{\partial k}{\partial x_l} - c_{k3} dk \sqrt{D} \\ d\left(\frac{\partial D}{\partial t} + u_l \frac{\partial D}{\partial x_l}\right) &= -2\mathbf{D}_{il} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + 2c_{d1} \frac{a_l}{L^2} \frac{\partial p}{\partial x_l} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_l} (c_{d1} d \frac{k}{\sqrt{D}} \frac{\partial D}{\partial x_l}) - c_{d3} d \sqrt{D} D \\ d\left(\frac{\partial a_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\right) &= -K_{il} \frac{\partial d}{\partial x_l} + d \frac{\partial a_i a_l}{\partial x_l} - d a_l \frac{\partial (u_l - a_l)}{\partial x_l} + \frac{B}{d} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_l} c_{a1} d \frac{k}{\sqrt{D}} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} - c_{a2} d \sqrt{D} a_i \\ d\left(\frac{\partial B}{\partial t} + u_l \frac{\partial B}{\partial x_l}\right) &= -dB \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + 2dB \frac{\partial a_l}{\partial x_l} - 2d a_l \frac{\partial d}{\partial x_l} + a_l \frac{\partial dB}{\partial x_l} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_l} c_{B1} d \frac{k}{\sqrt{D}} \frac{\partial B}{\partial x_l} - c_{B2} d \sqrt{D} B \end{aligned}$$

这里及下面各式中:  $d$ ,  $p$ ,  $u_i$ ,  $k$ ,  $c$  分别表示系综平均或 Favre 平均下的密度、压力、速度、内能和浓度。标号“\*”表示瞬时量;“ $\overline{\quad}$ ”表示相应的脉动量,若无特别指出下标重复均表示求和;  $\mathbf{K}_{ij}$  为 Reynolds 应力张量;  $k$  为湍流脉动动能;  $\mathbf{D}_{ij}$  为耗散关联量张量;  $D$  为耗散关联量张量的迹;  $i$ ,  $S_l$  分别为湍流脉动引起的能量流和浓度流,具体表示如下

$$\mathbf{K}_{ij} = \overline{(1/d) \overline{d' u_i' u_j'}}, k = (1/2) \overline{K_{mm}}, \mathbf{D}_{ij} = \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_j'}{\partial x_m}}$$

$$D = D_{mm}, i_l = \overline{(1/d) \overline{d' p' u_l'}}, S_l = \overline{(1/d) \overline{d' c' u_l'}}, \_c = \text{sgn} \left[ \frac{\partial c}{\partial x_l} \right] \cdot \text{sgn}(c - \overline{c})$$

浓度流和能量流由脉动质量通量和平均量梯度两部分引起,按如下方式封闭

$$\begin{aligned} S_l &= \left[ 4c_e c (1 - c) \_c a_l - (1 - c_e) c_c \frac{k}{\sqrt{D}} \frac{\partial c}{\partial x_l} \right] \\ i_l &= - \left[ 4c_e c (1 - c) d I a_l + (1 - c_e) c_c d \frac{k}{\sqrt{D}} \frac{\partial I}{\partial x_l} \right] \end{aligned}$$

$c_e$  为比例因子,当取为 1 时,即为常用的梯度近似封闭。Reynolds 应力用推广的 Boussinesq 的涡粘性模型,这里

$$-\mathbf{K}_{ij} = \nu_t \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mathbf{W}_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] - \frac{2}{3} \mathbf{W}_{ij} k$$

$$v_1 = c_s \frac{k}{\sqrt{D}}$$

对  $D_{ij}$  我们曾发现可以用近似关系式表示<sup>[4-5]</sup>

$$D_{ij} = D \frac{K_{ij}}{2k}$$

采用理想气体状态方程, 混合区状态方程与文献 [3~ 5] 的相同。至此方程已全部封闭。模型常数将由激波管实验来确定。

### 3 数值结果及分析

考虑在 Rayleigh-Taylor 和 Richm yerM eshkov 不稳定性中, 流体的流动主要是沿着有效重力场方向或激波作用方向, 平均流场可以近似看作是一维的。以激波作用方向或有效重力场方向为  $x$  轴, 可以近似地假定所有的物理量仅是时间  $t$  和空间变量  $x$  的函数。当然脉动速度场是三维的。在此条件下, 我们把上列方程退化到一维, 得到一组描述可压缩湍流混合的流体力学平均量方程。并编写了一维 Lagrange 可压缩、含湍流混合的流体力学程序。模型参数通过模拟有关 RM 不稳定性的激波管实验确定。

#### 3.1 模型参数的确定

我们首先通过模拟 Brouillette<sup>[6]</sup> 的 Mach 数为 1.3 的 RM 不稳定性的激波管实验确定参数。计算模型见图 1 左端由活塞以一定的速度向右推进, 使空气产生与实验 Mach 数一致的激波。空气区域的长度根据需要选定, 只要在计算时间内从界面反射的稀疏波从活塞反射回来后未到达混合区, 就可以保证计算条件和实验一致。而右端氦气区域的长度和实验相同。差分格式与文献 [3~ 5] 相同, 采用第一类边界条件。我们在两界面交界处给出一个很小的、随机的密度扰动, 即假定界面附近存在一个扰动区, 区内空气和氦气各占一半体积, 两种物质与其它两个区均处于压力平衡。除密度脉动及其自相关量以外, 速度、湍能及各脉动关联量的初始值均为零。具体初始条件见表 1 表中给出的初始扰动区的值是令  $\tau = 0$  由混合区状态方程计算得到, 表中未列出的初始量均为零。空气和氦气的  $V$  分别为 1.4 和 1.63。常温常压下空气和氦气的密度根据文献 [6] 选定。初始空气区长为 30cm, 氦气区长为 16.9cm。计算时初始网格长为 0.1cm。时间步长均由稳定性条件确定。

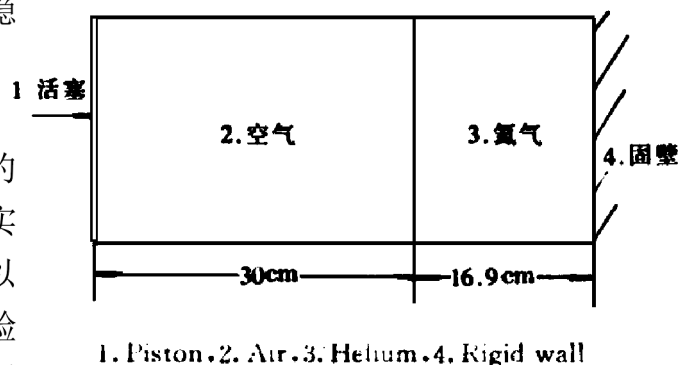


图 1 计算模型图

Fig. 1 Scheme of computation

在图 2~ 图 4 给出了界面单元附近的湍能、耗散关联量、纵向湍能与湍能之比的时间演化曲线。图 5 给出了湍流混合区的湍能时间演化曲线。图 6 给出了湍流混合区的湍能与平均动能之比的时间演化曲线。从图 2 和图 5 可以看出, 激波每次抵达混合区都引起湍能的增加, 然后因耗散而衰减。从图 4 可以看出激波抵达时纵向湍能较其横向值增加得多。然而由于激波阵面很窄, 波后平均流动速度梯度很快就消失了。由于我们使用 Boussinesq 近似

表 1 Brouillette 的 air/helium 激波管实验的初始流场分布

Table 1 Initial distribution of Brouillette's air/helium experiment

介质	$d/(g/cm^3)$	$p/(Mpa)$	$B/(g/cm^3)$	$I/(km^2/s^2)$
空气	0.001184	0.1	0	0.2111
初始扰动区	0.000672	0.1	$3.90 \times 10^{-4}$	0.3041
氦气	0.00016	0.1	0	0.9921

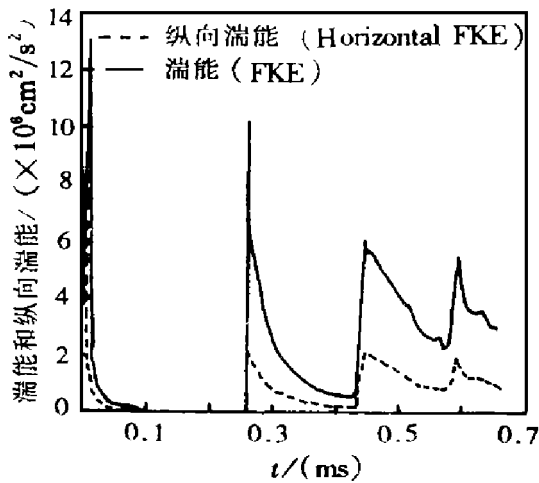


图 2 初始界面处湍能时间演化曲线  
Fig 2 Evolution of fluctuation kinetic energy(FKE) and horizontal FKE

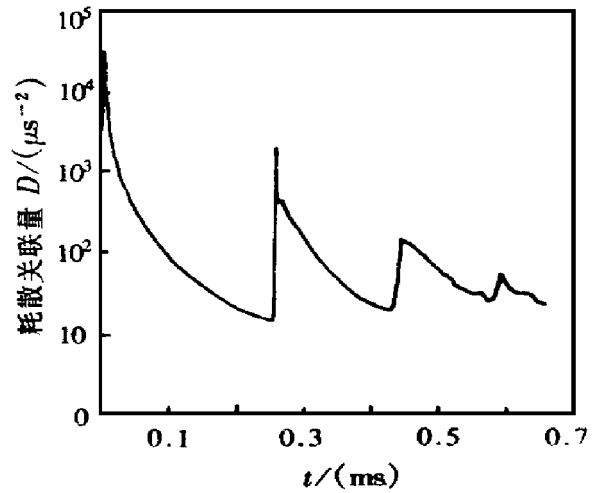


图 3 初始界面处耗散关联量时间演化曲线  
Fig 3 Evolution of dissipation correlation near the initial interface

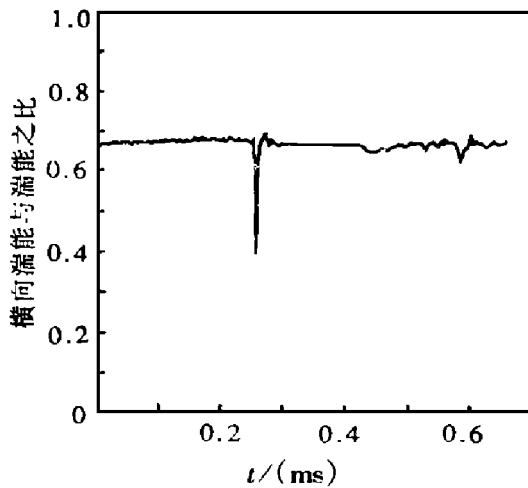


图 4 湍能与横向湍能之比的时间演化曲线  
Fig 4 Evolution of FKE with the vertical FKE

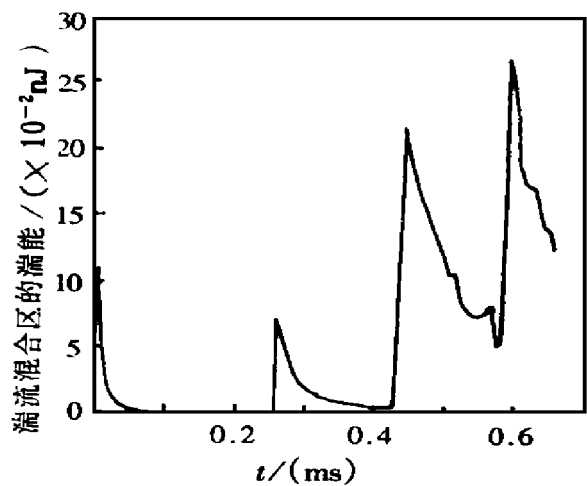


图 5 湍流混合区的湍能时间演化曲线  
Fig 5 Evolution of fluctuation kinetic energy of mixing zone(ZFKE)

式, 平均流动梯度消失后, 横向湍能和湍能之比为三分之二, 即流动马上变为各向同性的。

而实际上当平均流动梯度消失后湍流流场是逐渐向各向同性衰变, 我们的模型和  $k\text{-}\epsilon$  模型均无法描述这个过程. 这个缺陷在我们的计算中也很明显地表现出来. 在图 4 中除了激波抵达的瞬间, 其它时刻流场都是各向同性的. 从图 5 可以看出每次激波的作用都引起湍流混合区的总湍能的增加. 从图 6 可以看出湍流混合区的湍能与平均动能之比是随时间衰减的. 激波每次的抵达, 都引起这个比值的增加, 然后又随时间衰减, 直到下一次激波的抵达. 由于每次激波从固壁反射都引起湍能的增加和平均流动动能的减少, 因此两者的比值随着激波的多次反射逐渐增加. 图 7 给出了混合区两端界面的运动曲线. 图 8 为湍流混合区宽度的时间演化曲线, 图中也附上 A n-dronov 的实验结果和我们对该实验的模拟结果 (这里  $\alpha_3 = 1.03$ ,  $\alpha_{10} = 1.7$  其余见表 2). 从图中可以看出计算结果与实验符合较好. 模型常数见表 2 下面我们将用所得到的模型常数模拟其它的激波管实验以检验所得到的模型和模型常数的普适性.

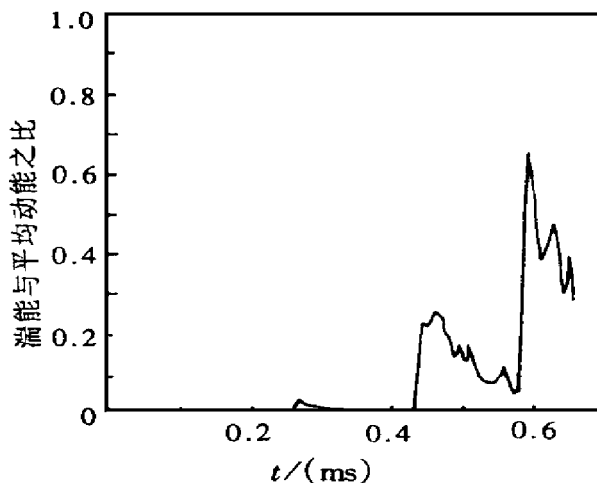


图 6 湍流混合区的湍能与直接驱动动能之比

Fig. 6 Evolution of fluctuation kinetic energy (FKE) versus average kinetic energy of the turbulent mixing zone

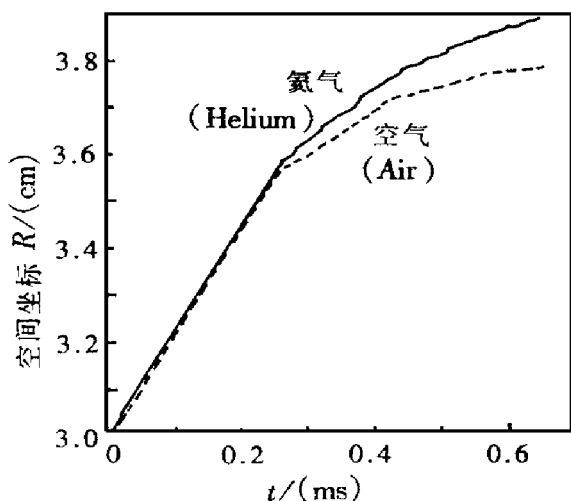


图 7 混合区两端界面的运动曲线

Fig. 7 Trajectory of the turbulent mixing zone

- Interface near helium,  
 ... Interface near air

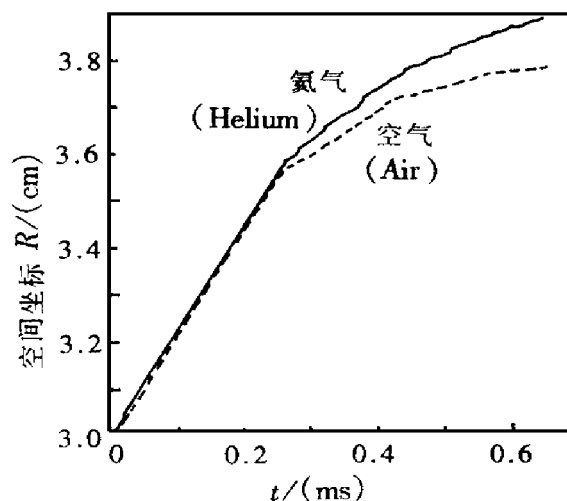


图 8 A ir/H elium 混合区宽度的实验结果<sup>[6, 8]</sup>和计算结果

Fig. 8 Evolution of the thickness of turbulent mixing zone

Simulated result of B, ... Simulated result of A n

○ Experimental result of Brouillette's<sup>[7]</sup>

□ Experimental result Andronov's<sup>[9]</sup>

表 2 模型参数

Table 2 Model Constants

$C_e$	$C_c$	$C_{k1}$	$C_{k3}$	$\alpha$	$C_{a1}$	$C_{a2}$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	$C_d$	$C_{d1}$	$C_{d3}$
0.5	0.2	0.1	1.80	0.05	0.2	1.0	0.1	0.3	3.6	1.67	2.0

3.2 其它激波管实验的数值模拟

3.2.1 Brouillette 的 Air/SF<sub>6</sub> 激波管实验的模拟

Brouillette 的另一个实验是 Mach 数为 1.32 的入射激波从空气传到 SF<sub>6</sub> 中。激波在空气与 SF<sub>6</sub> 的交界面上将反射一激波并向 SF<sub>6</sub> 中传入一激波。透射的激波将在激波管的管壁上反射。两气体交界面离激波管管壁的距离为 56cm，我们的计算模型与此一致。活塞离交界面的距离，也即空气区的长度在计算中取为 4m。初始流场分布见表 3 表中给出的初始扰动区内能、密度值和空气体积比  $\Gamma = 0.5$  由混合区状态方程计算得到的密度脉动自相关量  $B$ 。表中未列出的量初始均为零。空气和 SF<sub>6</sub> 的密度根据文献 [6] 选定，空气和 SF<sub>6</sub> 的  $V$  分别为 1.4 和 1.0935<sup>[7]</sup>。活塞以速度

$u_p = 0.161 \text{ km/s}$  从左向右推进。计算的初始空间步长空气区为 0.1cm，SF<sub>6</sub> 区为 0.05cm，初始扰动区宽度为 0.05cm。我们在图 9 中给出计算的和实验测得的混合区宽度增长曲线。可以看出它们基本一致。也就是说我们的模型可以模拟 Atwood 数大于零和 Atwood 数小于零的 RM 不稳定性引起的湍流混合。这说明我们的模型具有一定的普适性。

表 3 Brouillette Air/SF<sub>6</sub> 激波管实验的初始流场分布

Table 3 Initial distribution of Brouillette's air/SF<sub>6</sub> experiment

介质	$d / (\text{g/cm}^3)$	$p / \text{MPa}$	$B / (\text{g/cm}^3)$	$I / (\text{km}^2/\text{s}^2)$
空气	0.001184	0.1	0	0.2111
初始扰动区	0.003592	0.1	$1.614 \times 10^{-3}$	0.1837
SF <sub>6</sub>	0.006	0.1	0	0.1783

3.2.2 Houas 的高 Mach 数激波管实验的数值模拟

Houas<sup>[9]</sup> 在第十五届国际激波与激波管会议上发表了高 Mach 数 RM 不稳定性的激波管实验结果。他采用方形激波管，横截面尺寸为  $(8.5 \times 8.5) \text{ cm}^2$ 。分隔两种气体的 Mylar 膜为 1.5 $\mu\text{m}$  厚。二氧化碳和氦气的初始压力为 1.5kPa。入射激波的 Mach 数为 4.24。由于文中未给出两种气体的密度，我们根据常温常压下这两种介质的密度，用等温理想气体状态方程求出它们在该压力下的密度。可是，按我们得到的密度，计算得到 Mach 数为 4

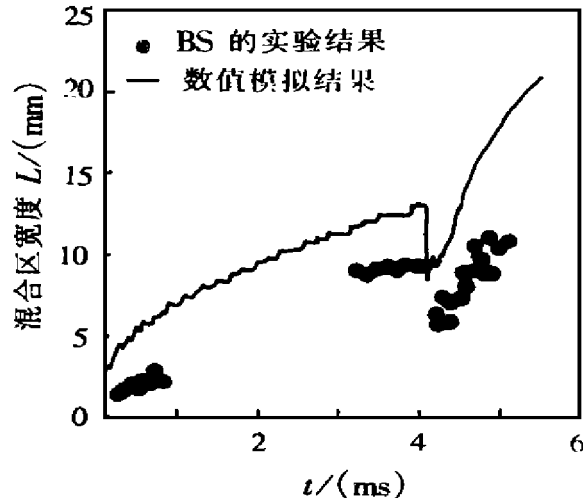


图 9 Air/SF<sub>6</sub> 混合区宽度的实验结果<sup>[6]</sup>和计算结果

Fig. 9 Evolution of the thickness of turbulent mixing zone  
- Simulated result

● Experimental result of Brouillette's<sup>[7]</sup>

24的激波入射时,两种气体交界面所获得的速度大约为  $1.3\sim 1.4\text{ km/s}$  远小于实验测得的  $1.7\text{ km/s}$  为了便于和实验结果比较,我们将初始入射激波的 M a c h 数调整到 5.2 在这个条件下,两气体交界面速度约为  $1.68\text{ km/s}$  与实验测量值基本一致. 具体计算模型与图 1 相似. 我们计算时取氦气区长度与实验相同,而为了节约计算时间将二氧化碳区长度取为  $3\text{ m}$ . 初始流场分布见表 4 表中列出的初始扰动区的值是令  $\Gamma = 0.5$  由混合区状态方程计算得到,初始扰动区宽度为  $1\text{ cm}$ . 常温常压下二氧化碳和氦气的密度来自文献 [7],它们的  $V$  分别为 1.3 和 1.63 初始网格长为  $0.5\text{ cm}$ , 时间步长由稳定性条件确定. 计算得到的混合区宽度时间增长曲线见图 10 可以看出数值结果与实验结果基本上一致.

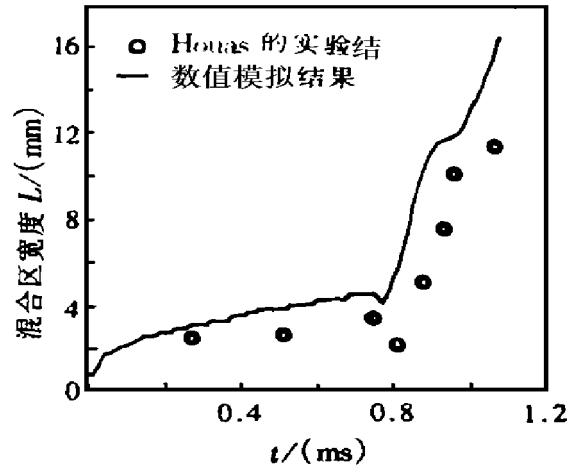


图 10  $\text{CO}_2/\text{Helium}$  混合区宽度的实验结果<sup>[9]</sup>和计算结果

Fig. 10 Evolution of the thickness of turbulent mixing zone  
 - Simulated result  
 ○ Experimental result of Houas's<sup>[10]</sup>

表 4 H ou a s 的激波管实验的初始流场分布

Table 4 Initial distribution of Houas's air/helium experiment

介质	$d/(g/mm^3)$	$p/MPa$	$B/(g/cm^3)$	$I/(km^2/s^2)$
$\text{CO}_2$	0.02952	0.015	0	0.1694
初始扰动区	0.01596	0.015	$1.152 \times 10^{-5}$	0.2312
He	0.0024	0.015	0	0.9921

## 4 结 束 语

本文用推广的 Boussinesq 近似取代 Reynolds 应力简化模型<sup>[5]</sup>中的 Reynolds 应力输运方程,从而得到比 Reynolds 应力简化模型少 5 个微分方程的  $k\text{-}\mathcal{D}\text{-}\alpha\text{-}\mathcal{B}$  模型. 此模型采用各向同性的扩散系数,与一般的  $k\text{-}\mathcal{X}$  相比主要有以下优点: (1)不需要人为给定初始湍流流场,这一直是  $k\text{-}\mathcal{X}$  模型的一个难点. (2)普适性较好. 我们用同一套常数模拟了 R-T 不稳定、R-T 稳定的低 M a c h 数激波管实验和高 M a c h 数激波管实验. 数值结果与实验结果基本一致.

本文在完成过程中曾与水鸿寿研究员等进行过有益的讨论,在此我们表示衷心的感谢!

## 参 考 文 献

- 1 Birkhoff G. Helmholtz and Taylor Instability. Hydrodynamic Instability. In: Birkhoff G, et al ed. New York: Math Soc, 1962
- 2 Besnard D C, Hass J F. Statistical Modeling of Shock-Interface Interaction. Physica D, 1989, 37: 227 ~ 247

- 3 张忠珍, 王继海. 界面不稳定性引起湍流混合的二阶封闭模型. 爆炸与冲击, 1996 16(3): 232~ 242
- 4 张忠珍, 王继海. 数值模拟 Richtmyer-Meshkov 不稳定性引起的湍流混合. 见: 第七届全国激波和激波管会议文集. 河南洛阳, 1995
- 5 张忠珍, 王继海. 界面不稳定性引起湍流混合的简化 Reynolds 应力模型. 见: 俞鸿儒等, 全国第八届计算物理学术研讨会文集. 云南昆明, 1996 168~ 173
- 6 Brouillette M, Sturtevant B. Experiments on Richtmyer-Meshkov Instability: Small-Scale Perturbations on a Plane Interface Phys Fluids A, 1993 5(4): 916~ 930
- 7 Cloutman L D, Wehner M F. Numerical Simulation of Richtmyer-Meshkov Instabilities Phys Fluids, 1992 A 4(8): 1821~ 1829
- 8 Andronov V A, Bakhrakh S M, Meshkov E, et al An Experimental Investigation and Numerical Modeling of Turbulent Mixing in One-Dimensional Flows Sov Phys Dokl 1982 27 393~ 411
- 9 Houas L, Brun R, Hanana M. Instability of Interfaces Submitted to Shock Acceleration and Deceleration Bershader D, Hanson R, eds Proceeding of the 15th ISSW ST. Berkeley California [s n] 1985 415~ 427
- 10 Besnard D C, Bonnet M, Gauthier S, et al Numerical Simulation of Rayleigh-Taylor Instability Induced Turbulent Mixing in Shock Tube Flows In Groning H, ed Proceeding of the 16th ISSW ST. Aachen, Federal Republic of Germany, 1987 New York: VCH, 1988 709~ 715

## TURBULENT MIXING MODEL AND NUMERICAL SIMULATION OF RICHTMYER-MESHKOV INSTABILITY

Zhang Zhongzhen, Wang Jihai

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*  
*P. O. Box 8009 Beijing, 100088*)

**ABSTRACT** A turbulent mixing model which can be easily used in 3D numerical simulation, is presented. It has two more transportation equations than  $k$ - $\epsilon$  model so it can better describes compressible turbulent mixing induced by interfacial instability, and it doesn't need initialization. With the same model constants we simulated three kinds of shock tube experiments. The results are coincident with the experiments.

**KEY WORD** turbulent mixing, numerical simulation, interfacial instability