

圆杆中弹性应力波的傅立叶弥散分析*

王从约 夏源明

(中国科学技术大学力学与机械工程系 合肥 230027)

摘要 基于 Pochhammer 和 Chree 关于无限长圆杆中纵向谐波的三维弹性解析解, 得到了关于圆杆中应力波弥散效应的快速傅立叶波谱分析方法和程序 (FFTDSP), 并利用二维轴对称动力学有限元分析程序 (ADINA), 论证了弥散分析方法和程序的有效性。利用这一弥散分析方法和程序 (FFTDSP), 研究了圆杆的物理和几何参数的变化对弹性波在圆杆中传播的弥散效应的影响。

关键词 圆杆 弹性应力波 傅立叶变换 波的弥散

中图法分类号 O 347. 4

1 引言

Pochhammer^[1]和 Chree^[2]分别获得了无限长、半无限长圆杆中弹性波传播的解析解, 解析解揭示了由横向惯性引起的波的弥散现象, 且表明一维简单波的解仅对有限长圆杆中远离加载端处有较好的近似。60~70年代, 一些学者利用数值方法卓有成效地研究了应力波在有限长圆杆中的传播问题, 如 Bertholf 利用有限差分方法研究了等直均质圆杆中弹性波的传播, Habberstad^[4]等也利用该方法对变截面均质圆杆和等直非均质圆杆中弹性波的传播进行了分析, 数值方法固然有其优点, 但若用来快速地分析圆杆中弹性波的弥散会有一些的困难。另有一些学者^[5~6]利用 Pochhammer-Chree 一般理论解结合傅立叶波谱分析的方法来研究圆杆中应力波的弥散, 能够对圆杆中弹性波的弥散进行快速分析。然而, 由于这种分析方法是建立在无限长圆杆中弹性谐波的解析解基础上的, 因此它对有限长圆杆中弹性波的弥散分析带有一定的近似性。尽管文献 [5~6] 利用直接测量圆杆上两个位置的应变信号来验证这一分析方法的有效性, 但目前还未见有学者对它的有效性进行更充分的数值论证。

我们试图给出基于 Pochhammer-Chree 一般解并结合傅立叶波谱分析的完整方法, 给出相应的能快速分析有限长圆杆中弹性波弥散的 FFTDSP 程序, 并用有限元分析对这一方法和程序进行论证, 同时利用 FFTDSP 程序对圆杆中弹性波的弥散进行较全面的研究。

2 傅立叶弥散分析方法

2.1 Pochhammer-Chree 关于无限长圆杆中纵向弹性谐波的一般理论解

Pochhammer^[1]、Chree^[2]分别独立地得到了无限长圆杆中三维弹性谐波的解析解, 解析解是一个谐波的相速和波长间的弥散关系

$$c_n / c_0 = D(d \Lambda_n, \nu) \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助 (批准号 19272061)。

王从约: 男, 1966年 6月生, 博士, 讲师。

1996-12-05收到原稿, 1997-07-02收到修改稿。

式中: Λ_n 是谐波波长, c_n 是谐波相速, ν 是圆杆的泊松比, d 是圆杆的直径; $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 是圆杆的纵向弹性波波速, E 是圆杆的弹性模量, ρ 是圆杆的质量密度, D 代表一确定的非线性函数。

谐波相速 c_n 与谐波频率 f_n 和谐波波长 Λ_n 的关系为

$$c_n = f_n \cdot \Lambda_n, \quad f_n = n k_0 / 2^c \quad (2)$$

式中: ω_0 是基频, $n\omega_0$ 是角频率 (或称为圆频率), 方程 (2) 能够无量纲化为

$$(c_n / c_0) (d / \Lambda_n) = (n k_0 / 2^c) (d / c_0) \quad (3)$$

对于给定泊松比, 方程 (1) 的多个非零根能够求得。Bancroft^[7] 和 Davies^[8] 分别求得了方程 (1) 在几个泊松比下的数值解 (见表 1)。表 1 表明: 对于低频谐波, 其波速趋向于弹性波速 c_0 ; 而高频谐波的波速趋向于瑞利波速 c_R 。利用这些结果, 圆杆中任何波长的相速能够求得, 并且弹性波传播到某一位置, 由弥散引起的相角的改变也能够求得, 因此利用波谱分析方法来研究圆杆中弹性波的弥散成为可能。

图 1 关于 d / Λ_n 和 ν 的函数 c_0 / c_n

Table 1 c_0 / c_n as a function of d / Λ_n and ν

d / Λ_n	泊松比 ν				d / Λ_n	泊松比 ν			
	0.29	0.30	0.32	0.35		0.29	0.30	0.32	0.35
0.000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.100	0.666911	0.662434	0.659373	0.657960
0.100	0.997851	0.997559	0.997145	0.997207	0.200	0.646458	0.642962	0.639782	0.638842
0.200	0.993167	0.990545	0.989429	0.986908	0.300	0.631029	0.628183	0.625142	0.624031
0.300	0.981579	0.977758	0.975167	0.969373	0.400	0.619387	0.616855	0.614157	0.612667
0.400	0.958333	0.954528	0.949412	0.942900	0.500	0.610560	0.608065	0.605789	0.603961
0.500	0.921401	0.917387	0.910374	0.903606	0.600	0.603817	0.601166	0.599264	0.597189
0.600	0.873520	0.868346	0.861562	0.853355	0.700	0.598619	0.595708	0.594044	0.591760
0.700	0.821237	0.814683	0.809639	0.800482	0.800	0.594575	0.591375	0.589791	0.587308
0.800	0.771431	0.764286	0.760864	0.752828	0.900	0.591397	0.587943	0.586321	0.583717
0.900	0.728481	0.721769	0.719030	0.713570	1.000	0.588877	0.585241	0.583547	0.581012

2.2 谐波相速 c_n 关于相应 Λ_n 谐波波长的插值公式

对方程 (1) (即表 1) 进行多元拟合发现, 不同的泊松比, 相速与波长间存在下面代数关系

$$c_n / c_0 = B_0 + B_1 / \left[\sum_{m=2}^M A_m (d / \Lambda_n)^m + A_1 (d / \Lambda_n)^{1.5} + 1 \right] \quad (4)$$

式中: $B_0 = 0.5764$, $B_1 = 0.4236$ 且与泊松比无关; M 、 A_m ($m = 2, \dots, M$)、 A_1 随泊松比变化。

当 $\nu = 0.29$ 时, $M = 4$, $A_1 = 0.3253$, $A_2 = -0.6925$, $A_3 = 1.6000$, $A_4 = 1.3750$

当 $\nu = 0.30$ 时, $M = 8$, $A_1 = -0.192258$, $A_2 = 1.56258$, $A_3 = -4.81705$, $A_4 = 11.3609$, $A_5 = -7.05232$, $A_6 = 2.25889$, $A_7 = -0.497161$, $A_8 = 0.16683$

当 $\nu = 0.32$ 时, $M = 8$, $A_1 = -0.349998$, $A_2 = 2.59216$, $A_3 = -11.0529$, $A_4 = 34.4409$, $A_5 = 49.9163$, $A_6 = 42.7834$, $A_7 = -19.0744$, $A_8 = 3.46472$

当 $\nu = 0.35$ 时, $M = 9$, $A_1 = 0.550563$, $A_2 = -2.68796$, $A_3 = 24.1437$, $A_4 = -101.142$, $A_5 = 235.42$, $A_6 = -296.237$, $A_7 = 207.666$, $A_8 = -76.1922$, $A_9 = 11.4743$

于是利用牛顿迭代求根法, 联立方程 (3)、(4), 可以定出圆杆中传播的任何波长的纵波弹

性谐波的相速 c_n

2.3 波的傅立叶展开和弥散波的重建

设 T 是原始波 $F(t)$ 的记录时间, 把 $F(t)$ 看成周期为 T 的周期函数, 在有限个等距离散数据的基础上进行谐波分析, 利用离散傅立叶变换^[9-10]可得到下面关系中的系数 A_n 和 B_n

$$F(t) = \sum_{n=0}^N [A_n \cos(nk_0 t) + B_n \sin(nk_0 t)] \quad (5)$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^N [C_n \cos(nk_0 t - h_n)] \quad (6)$$

式中: $F(t)$ 为原始波, k_0 为基频, 且 $k_0 = 2\pi/T$, C_n 为相幅且 $C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2}$, h_n 为相角且 $h_n = \arctan(B_n/A_n)$.

与以波速 c_0 传播的恒值信号比较, 考虑到波的弥散效应, 那么每一傅立叶谐波成份将以相应的波速 c_n 传播. 因此, 在传播一段距离 z 后, 每一谐波成份的相角差为

$$\Delta h_n = nk_0(z/c_0 - z/c_n) \quad (7)$$

于是每一谐波成份在传播一段距离 z 后的相角为

$$h'_n = h_n - \Delta h_n \quad (8)$$

考虑每一谐波成份的相角变化, 传播一段距离 z 后, 带有弥散的波可用下面的方程重建

$$F'(t) = \sum_{n=0}^N [C_n \cos(nk_0 t - h'_n)] \quad (9)$$

由方程 (6)、(8), 方程 (9) 可以改写为

$$F'(t) = \sum_{n=0}^N [A_n \cos(nk_0 t + \Delta h_n) + B_n \sin(nk_0 t + \Delta h_n)] \quad (10)$$

为了利用傅立叶级数展开来重建弥散信号 $F'(t)$, 方程 (10) 可以进一步写为

$$F'(t) = \sum_{n=0}^N [A'_n \cos(nk_0 t) + B'_n \sin(nk_0 t)] \quad (11)$$

对应相速 c_n 的傅立叶谐波成份有 $A'_n = A_n \cos \Delta h_n + B_n \sin \Delta h_n$ 和 $B'_n = B_n \cos \Delta h_n - A_n \sin \Delta h_n$

将上面的理论结果推广到有限长圆杆, 我们编写了快速傅立弥散分析程序 (FFTDSP). 由于离散傅立叶弥散变换存在取样效应, 即频率混叠效应和谱线渗漏效应^[9], 因此程序 FFTDSP 中考虑了这两种效应. 另外, 一方面, 程序 FFTDSP 可以很方便地考虑波的右行或左行的弥散分析; 另一方面, 原始脉冲和弥散脉冲可以通过正反快速傅立叶弥散分析得到相互的还原, 同时这也验证了 FFTDSP 程序本身计算的正确性 (相当于程序 FFTDSP 的自考评).

3 傅立叶弥散分析方法的有限元论证

现用二维轴对称动态有限元方法和程序 (ADINA)^[10-11] 对上述的弥散分析方法和程序 (FFTDSP) 的有效性进行论证.

考虑一有限长圆杆 (见图 1), 其端部作用一载荷脉冲 $\epsilon_z = \epsilon_0 f(t)$, $\epsilon_0 = 0.1 \text{ GPa}$ 杆的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 密度 $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 杆长 $L = 360 \text{ mm}$, 直径 $D = 12 \text{ mm}$. 有限元网格为: $\Delta r : \Delta z = 1 : 2$, $\Delta r = 1 \text{ mm}$, 求解时间步长 $\Delta t = 0.2 \mu\text{s}$ 采用 Newmark 隐式时间积分的方法, 积分参数 $\alpha = 0.54$, $\beta = 0.25$ ($\alpha = 0.5$)².

下面考虑带有两种上升沿的入射脉冲, 一个是带有 $10 \mu\text{s}$ 线性上升沿的应力脉冲 (见图 2(a)), 另一个是带有约 $10 \mu\text{s}$ 光滑上升沿的应力脉冲 (见图 2(b)).

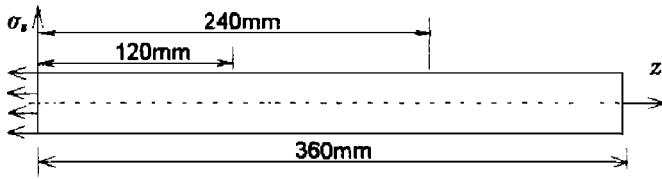


图1 细长圆杆

Fig. 1 Thin long cylinder

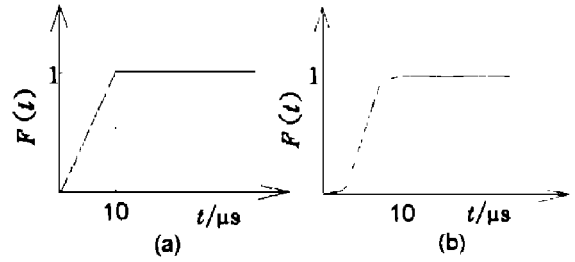
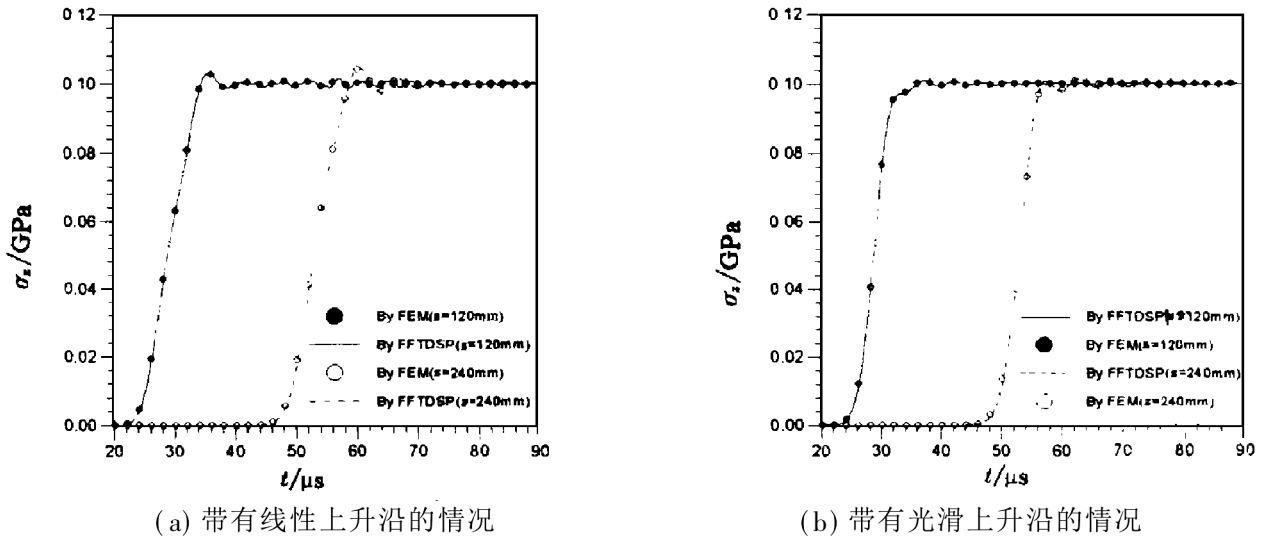


图2 作用应力脉冲函数 F(t)

Fig. 2 Function F(t) of applied stress in pulse

图3为圆杆表面两个位置上的波谱分析结果和有限元数值结果的比较。由图可见有限元数值计算结果与波谱分析结果十分吻合,这说明了这种傅立叶弥散分析方法对于有限细长圆杆中弥散效应的分析是有效的和合理的。



(a) 带有线性上升沿的情况

(b) 带有光滑上升沿的情况

(a) Original in pulse with a 10^2 s rise time

(b) Original in pulse with a 10^2 s rise time

图3 有限元分析(FEM)结果和波谱分析(FFTDSP)结果的比较

Fig. 3 Comparison between FEM results and FFTDSP results

4 圆杆中应力波弥散效应的分析和讨论

4.1 带有不同上升沿的作用脉冲的弥散分析

考虑一较细的钢杆(图1),弹性模量 $E=200\text{GPa}$,密度 $\rho=8000\text{kg/m}^3$,泊松比为 $\nu=0.30$ 直径 $D=12\text{mm}$ 这里选取了带有不同上升沿的两种作用脉冲,即带有约 10^2s 光滑上升沿的脉冲(见图4)和带有约 20^2s 光滑上升沿的脉冲(见图5)计算中取 $T=300^2\text{s}$

图4~5分别为两个作用脉冲在传播500mm和1000mm距离后的弥散结果。脉冲的平均幅值(或高度)基本没有被弥散影响。脉冲的平均宽度随着弥散程度的增加而产生微弱的减少。如果仔细观察每一个脉冲在传播过程中的波峰,弥散带来的振荡数随着波传播距离的增大而减少,且振荡的尾沿随着波的传播而变得更加平缓。图4和图5的对比可以看出,对于不同的作用脉冲,脉冲的上升沿越陡峭,则脉冲在圆杆中传播相同距离后的弥散就越大,否则相反。

图6~图9为两个作用脉冲的波谱分析结果。由图6可见,脉冲主要是由前几个较低的简谐成份组成的。由图7可见,脉冲的简谐成份的频率越低,则波速越接近杆的弹性波速;随着频率的增高,波速迅速降低并趋向于瑞利波速,高频信号的传播较低频信号的慢,并且在弥散介质

中被滞后。图 8 为作用脉冲传播 500mm 距离后, 其简谐成份的角频率和相角的变化量之间的关系, 低阶频率的简谐波的相角改变量基本为零, 随着频率的增加, 相角改变量为负且呈线

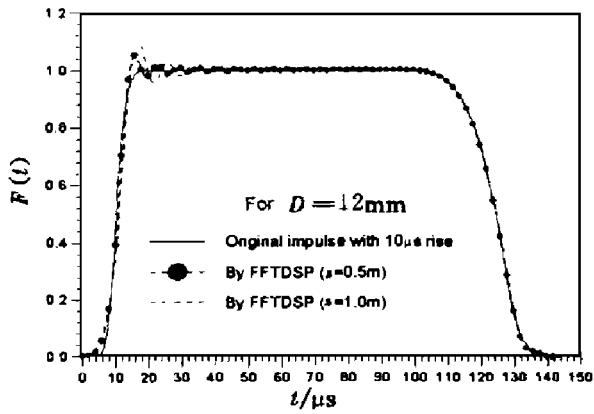


图 4 带有 10^μs 上升沿的脉冲的弥散结果
Fig 4 Dispersive im pulse w ith a 10^μs rise time

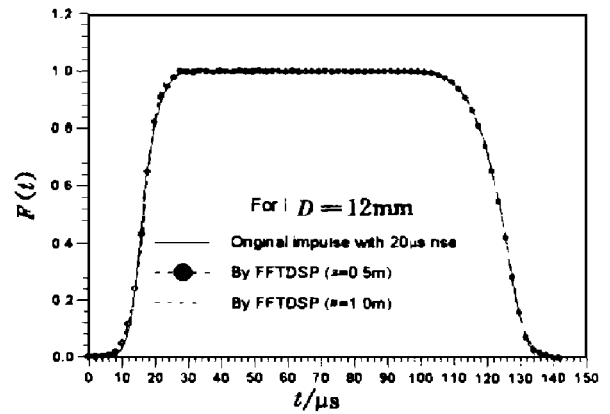


图 5 带有 20^μs 上升沿的脉冲的弥散结果
Fig 5 Dispersive im pulse w ith a 20^μs rise time

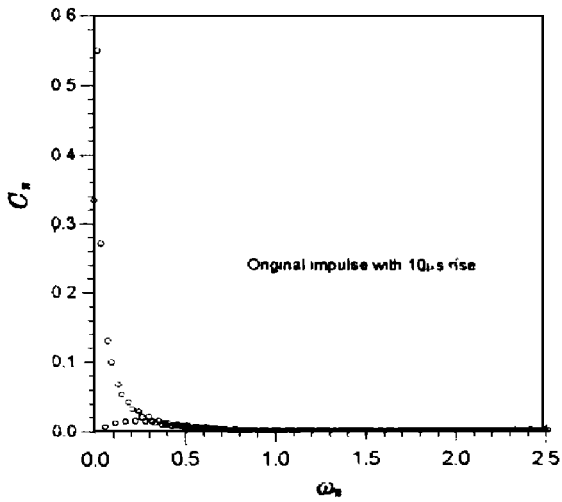


图 6 角频率与相幅之间的关系
Fig 6 Relation betw een ang le-fre- quency and phr ase-m agnitude

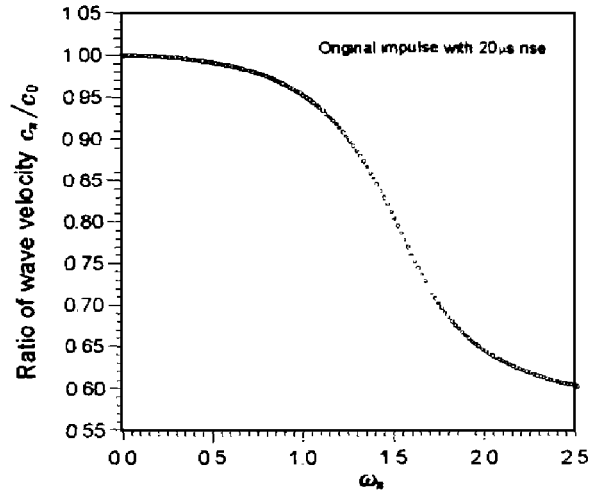


图 7 角频率与相速间的关系
Fig 6 Relation betw een ang le-fre- quency and phr ase-ve- locity

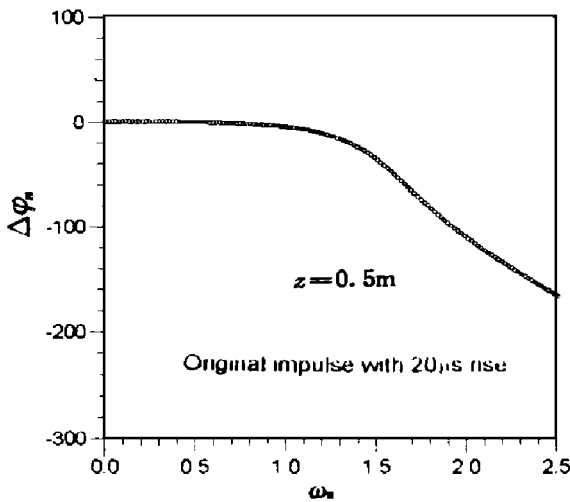


图 8 角频率与相角变化量间的关系
Fig 8 Relation betw een ang le-fre- quency and ang le-va- riation

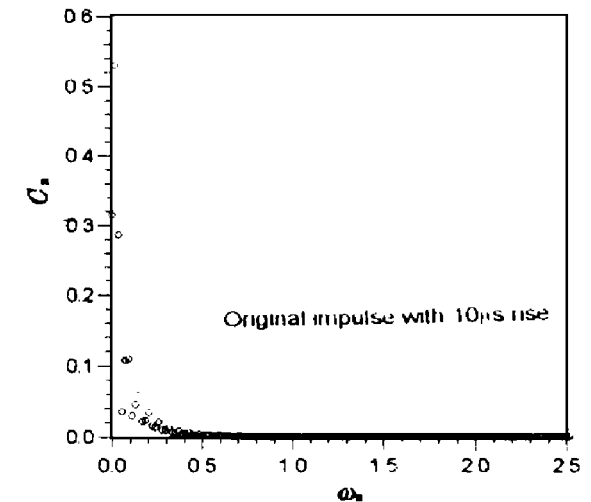


图 9 角频率与相幅间的关系
Fig 9 Relation betw een ang le-fre- quency and phr ase-m agnitude

性增加。由图 6 与图 9 以及图 4 与图 5 中的结果及其比较可以得出这一结论——脉冲含有的高频成份越多, 则脉冲的弥散效应就越大。

4.2 带有不同杆径的有限细长圆杆中的脉冲的弥散分析

考虑一较粗的圆杆, 直径 $D = 30\text{mm}$, 而杆的有关物理参数与 4.1 节中相同, 杆端的作用脉冲仍选用 4.1 节中带有 $10\mu\text{s}$ 光滑上升沿的脉冲。脉冲的弥散分析结果如图 10 所示。

由于粗杆的横向惯性较细杆的大, 因此造成粗杆中脉冲的弥散效应较细杆的大。另外由 2 节中的分析也说明同一简谐波的波速随杆径的增大而减小, 势必造成脉冲在弥散介质中的滞后。由图 10 和图 4 的比较已证实了这一结论——同一脉冲在传播相同距离后, 粗杆中的弥散效应较细杆中的弥散效应大。

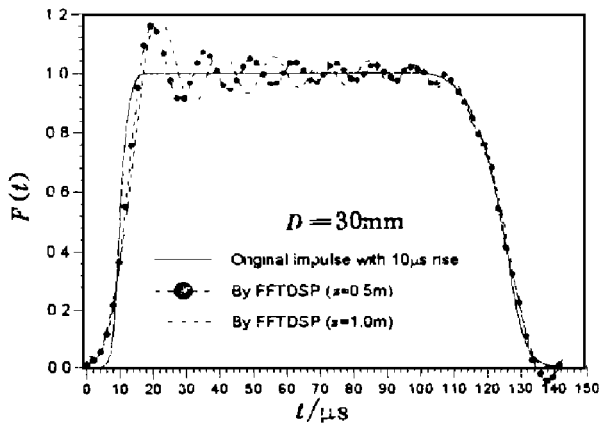


图 10 带有 $10\mu\text{s}$ 上升沿脉冲的弥散结果

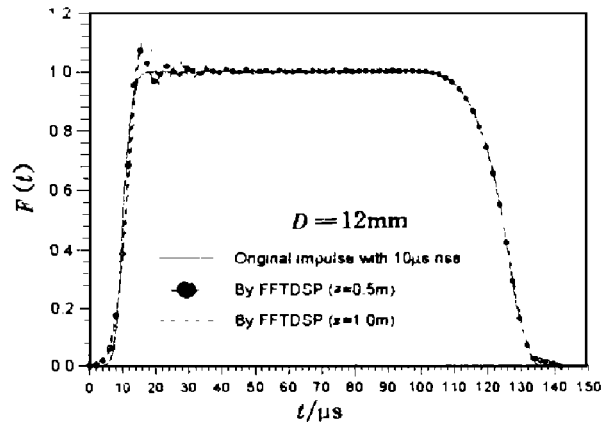


图 11 带有 $10\mu\text{s}$ 上升沿脉冲的弥散结果

Fig. 10 Dispersion in pulse with a $10\mu\text{s}$ rise time

Fig. 11 Dispersion in pulse with a $10\mu\text{s}$ rise time

4.3 带有不同材质的有限细长圆杆中的脉冲的弥散分析

考虑一圆杆, 杆的弹性模量为 $E = 70\text{GPa}$, 密度为 $\rho = 2700\text{kg/m}^3$, 泊松比为 $\nu = 0.35$ 而杆的有关几何参数与 4.1 中的相同, 杆端的作用脉冲仍选用 4.1 节中带有 $10\mu\text{s}$ 光滑上升沿的脉冲。脉冲的弥散分析结果如图 11 所示。

由 2 节中的理论分析可知, 作用脉冲的弥散效应直接与杆的材料常数 ν , E , d 有关。由图 11 与图 4 中的结果比较可见, 同一脉冲载荷在不同材质的细长圆杆 (带有相同尺寸) 中的弥散程度是有所不同的, 在圆杆几何参数不变的情况下, 弥散程度取决于几个圆杆的物理参数 ν , E , d 对脉冲弥散的综合作用结果。

5 结 论

(1) 形成了基于 Pochhammer-Chree 一般理论解结合傅立叶波谱分析的完整方法和相应的能快速分析有限长圆杆中弹性波弥散的 FFTDSP 程序, 二维轴对称动态有限元分析对其有效性进行的论证表明这一方法和程序具有很好的精度。通过离散的波谱分析发现, 高频简谐成份在传播过程中滞后于低频简谐成份, 这是引起应力波弥散的原因。

(2) 应力脉冲的波形 (特别是脉冲的上升沿的陡峭程度), 圆杆的物理和几何参数和脉冲在圆杆中传播的距离均为影响圆杆中应力脉冲弥散的主要因素。

(3) 傅立叶弥散分析方法和程序将为进一步分析冲击试验系统中应力波的弥散效应及其实验数据的修正处理提供基础。

参 考 文 献

- 1 Pochhammer L J F. *J Reine angew, Math*, 1876, 81: 324. See Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publishing Co Inc, 1944
- 2 Chree C. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. 1889, 25: 351~ 360
- 3 Bertholf L D. Numerical Solution for Two-dimensional Elastic Wave Propagation in Finite Bars. *Journal of Applied Mechanics*, 1967, 9: 725~ 734
- 4 Habberstad J L. A Two-dimensional Numerical Solution for Elastic Waves in Various Configured Rods. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 3: 62~ 70
- 5 Gorham D A. A Numerical Method for the Correction of Dispersion in Pressure Bar Signals. *J Phys E: Sci Instrum*, 16: 477~ 479
- 6 Gong J C, Malvern L E, Jenkins D A. Dispersion Investigation in the Split-Hopkinson Pressure Bar. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1990, 112: 309~ 314
- 7 Brancroft L D. The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars. *Phys Rev*, 1941, 59: 588~ 589
- 8 Devies E D H. A Critical Study of the Hopkinson Pressure Bar. *Philosophical Transactions A*, 1948, 240: 375~ 457
- 9 冯 康. 数值计算方法. 北京: 国防工业出版社, 1978
- 10 王从约. 杆型冲击拉伸试验系统的动力学数值分析: [博士论文] 合肥: 中国科技大学, 1996
- 11 Bathe K J. 非线性有限元分析——ADINA 理论文本. 张圣坤, 李龙渊, 韩继文, 等译. 上海: 上海交通大学科技交流室, 1986

DISPERSION ANALYSIS FOR ELASTIC WAVE IN THE CYLINDRICAL BAR BY FOURIER TRANSFORM

W ang Congyue, X ia Yuanming

*(Department of Modern Mechanics, University of Science
and Technology of China, Hefei, 230027)*

ABSTRACT Based on the Pochhammer-Chree's theoretical solution about the stress wave propagation in an infinite cylindrical bar and combining the Fourier transform, a numerical approach for analyzing dispersion in the cylindrical bar is developed. The validity of the approach is checked by two-dimensional axis-symmetric finite element method. The program code (FFTDSP) about the numerical approach is given, and applied to study the influence of the physical parameters and geometric parameters of the bar over the dispersion for wave propagation in the cylindrical bar.

KEY WORDS cylindrical bar; elastic wave; fourier transform; dispersion