

两相介质中波在平面界面上的反射^{*}

徐长节 吴世明 蔡袁强 陈云敏

(浙江大学土木工程系 杭州 310027)

摘要 借助 Biot 多孔介质中的波动方程, 根据各种界面条件导出了波在两相介质各种界面上反射的一般计算公式。作为例子, 数值计算了 P_i 波入射于几种典型界面时, P₁, P₂ 和 S 波的反射系数与频率、入射角之间的关系。结果表明: 各种波的反射系数与入射角、频率有关系, 若把多孔介质当作单相均一固体处理, 将会得到显著不同的结果。

关键词 两相介质 波 反射

中图法分类号 TU 43

与单相均一固体不同, 在两相介质中可以存在 3 种体波: 与均一固体中纵波、横波相类似的快纵波和横波, 还有慢纵波, 简记为 P_i 波、S 波和 P₂ 波^[1]。各种波的波速、衰减均与多孔介质的参数有关。王耀俊等用数值分析方法研究了高频声波由多孔固体入射于流体时的反射和透射^[2], Stoll 研究了声波由海水入射于海底沉积岩平面时的反射^[3]。这些研究都忽略了饱和多孔介质中流体的粘滞性, 实验证明了这些假设是不合理的^[4]。我们采用 Biot 理论, 考虑两相介质实际波动中粘性耦合项, 研究了弹性波以任意角度入射于两相介质层各种界面时的反射, 并数值分析了 P_i 波入射时, 界面透水条件、入射角度和频率对反射系数的影响。

1 公式推导

考虑两相介质中固体颗粒及孔隙流体的可压缩性, 并考虑固液两相粘性耦合, 假设粘性包含于动力渗透系数中, 两相介质的波动方程为

$$-\nabla^2 u + (\lambda_c + \mu) g \operatorname{grad} e - TM g \operatorname{grad} Y = \frac{\partial}{\partial t} (du + dw) \quad (1a)$$

$$TM g \operatorname{grad} e - M g \operatorname{grad} Y = \frac{\partial}{\partial t} (du + \frac{d}{n} w) + \frac{dg}{k_d} \frac{dw}{dt} \quad (1b)$$

式中: TM, λ_c , k_d , μ 为弹性常数, 且 $\lambda_c^2 = \lambda^2 + TM$, λ 为 Lamé 常数; u 表示固体的位移; “ $g \operatorname{rad}$ ”表示标量函数的梯度; $w = n(\mathbf{U} - \mathbf{u})$ 表示流体相对于固体的位移, \mathbf{U} 表示流体的位移; 固体体变 $e = \operatorname{div} \mathbf{u}$, 流体相对于固体的体变 $Y = \operatorname{div} \mathbf{w}$

由波场的势函数分解

$$\begin{cases} \mathbf{u} = g \operatorname{rad} \mathbf{h}_s + \operatorname{rot} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{w} = g \operatorname{rad} \mathbf{h}_f + \operatorname{rot} \mathbf{J}_f \end{cases} \quad (2)$$

式中: “ rot ”表示矢量函数的旋度, 并设波动方程平面波解为

* 国家教委留学回国人员基金资助(编号 RC 9609)。

徐长节: 男, 1972 年生, 博士。

1996-11-18 收到原稿, 1997-03-3 收到修改稿。

$$\begin{cases} h_s = A_s \exp[i(kt - l_x \cdot x - l_z \cdot z)] \\ h_f = A_f \exp[i(kt - l_x \cdot x - l_z \cdot z)] \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} J_s = B_s \exp[i(kt - l_x \cdot x - l_z \cdot z)] \\ J_f = B_f \exp[i(kt - l_x \cdot x - l_z \cdot z)] \end{cases} \quad (4)$$

其中: h_s , h_f , J_s , J_f 分别表示固体骨架及流体中纵波及横波的势函数; A_s , A_f 分别表示固体骨架及流体纵波势函数的幅值; B_s , B_f 分别表示固体骨架即流体横波势函数的幅值; \mathbf{l}_x , \mathbf{l}_z 分别是纵波与横波的波矢量。代入则可得到两相介质中 P 波和 S 波的弥散方程

$$A \left(\frac{\mathbf{l}_p}{k} \right)^4 + B \left(\frac{\mathbf{l}_p}{k} \right)^2 + C = 0 \quad (5)$$

$$D \left(\frac{\mathbf{l}_s}{k} \right)^2 + C = 0 \quad (6)$$

式中

$$A = (\lambda_c + 2)M, \quad B = (2T_d - d)M - (\lambda_c + 2) \left[\frac{d_f}{n} - i \frac{d_f g}{k_d} \right],$$

$$C = d \left[\frac{d_f}{n} - i \frac{d_f g}{k_d} \right] - d_f^2, \quad D = - \left[\frac{d_f}{n} - i \frac{d_f g}{k_d} \right]$$

由式(5)可求得两相介质中 P_1 波和 P_2 波的波矢值 \mathbf{l}_p 及两标量势函数幅值比

$$m_{1,2} = \frac{A_{f1,2}}{A_{s1,2}} = \frac{(\lambda_c + 2) \mathbf{l}_{p1,2}^2 - dk^2}{d_f k^2 - M \mathbf{l}_{p1,2}^2} \quad (7)$$

同理由式(6)可求得 S 波的波矢量值 \mathbf{l}_s 及两矢量势函数幅值比

$$m_3 = \frac{B_f}{B_s} = \frac{\mathbf{l}_s^2 - dk^2}{d_f k^2} \quad (8)$$

设两相介质中一频率为 k 的平面 P_1 波以任意角度入射至平面 $z=0$ 上, 则在两相介质中将形成反射 P_s , P_2 波以及反射 S 波。

由图 1 可给出各反射波的势函数。入射波

(P_1 波)

$$\begin{cases} h_{s1} = A_{s1} \exp[i(kt - l_{1x} \cdot x - l_{1z} \cdot z)] \\ h_{f1} = A_{f1} \exp[i(kt - l_{1x} \cdot x - l_{1z} \cdot z)] \end{cases} \quad (9)$$

反射 P 波 (P_1 波和 P_2 波)

$$\begin{cases} h_{sr} = A_{s1} \exp[i(kt - l_{1x} \cdot x + l_{1z} \cdot z)] + A_{s2} \exp[i(kt - l_{2x} \cdot x + l_{2z} \cdot z)] \\ h_{fr} = A_{f1} \exp[i(kt - l_{1x} \cdot x + l_{1z} \cdot z)] + A_{f2} \exp[i(kt - l_{2x} \cdot x + l_{2z} \cdot z)] \end{cases} \quad (10)$$

反射 S 波

$$\begin{cases} J_s = B_s \exp[i(kt - l_{sx} \cdot x + l_{sz} \cdot z)] \\ J_f = B_f \exp[i(kt - l_{fx} \cdot x + l_{sz} \cdot z)] \end{cases} \quad (11)$$

各式中: A_{s1} , A_{f1} 分别为入射 P_1 波固体骨架部分和流体部分势函数的幅值, A_{s2} , A_{f2} , B_s 分别为反射 P_1 波、 P_2 波、S 波固体骨架部分势函数幅值, A_{fs} , A_{ff} , B_f 分别为反射 P_1 波、 P_2 波、S 波流体部分势函数幅值, l_{1x} , l_{2x} , l_{sx} 分别表示入射 (反射) P_1 波、 P_2 波、S 波 x 方向波矢分量, l_{1z} , l_{2z} , l_{sz} 分别表

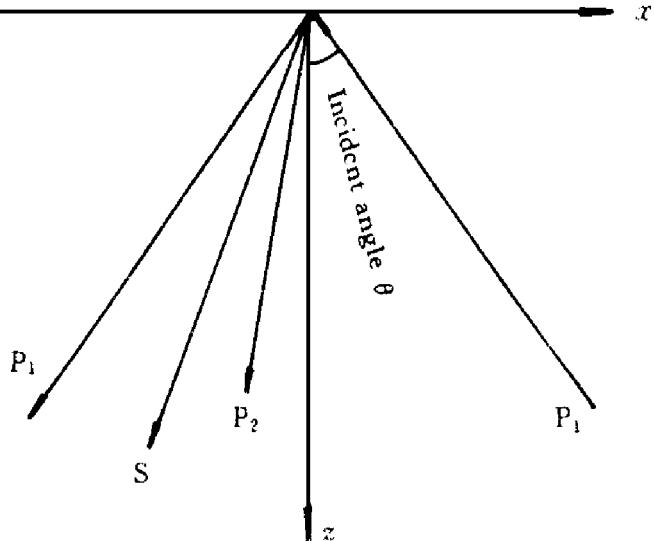


图 1 平面界面上波的反射

Fig. 1 Wave reflection on the boundary

示入射(反射)P₁波、P₂波、S 波 z 方向波矢分量, 波矢量满足以下关系

$$l_{1x}^2 + l_{1z}^2 = l_1^2, \quad l_{2x}^2 + l_{2z}^2 = l_2^2, \quad l_{sx}^2 + l_{sz}^2 = l_s^2 \quad (12)$$

式(9)~(11)中

$$\frac{A_{f1}}{A_{s1}} = m_1, \quad \frac{A_{f2}}{A_{s2}} = m_2, \quad \frac{B_f}{B_s} = m_3 \quad (13)$$

式中: m_1, m_2, m_3 由式(7)、(8)决定。

考虑两种典型界面: 一为自由界面, 即界面上不受力作用; 二为固定界面, 即界面上无位移。首先考虑自由界面情况。

对于平面波问题: 两相介质骨架位移和流体相对位移与势函数关系可写成

$$\begin{cases} u_z = \frac{\partial h_s}{\partial z} + \frac{\partial J_s}{\partial x} \\ u_x = \frac{\partial h_s}{\partial z} - \frac{\partial J_s}{\partial x} \\ w_z = \frac{\partial h_f}{\partial z} + \frac{\partial J_f}{\partial x} \\ w_x = \frac{\partial h_f}{\partial z} - \frac{\partial J_f}{\partial x} \end{cases} \quad (14)$$

两相介质应力-应变关系

$$\begin{cases} e_z = \lambda_c \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \\ f_{xz} = - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (15)$$

由式(14)~(15)可得到两相介质应力-势关系

$$\begin{cases} e_z = \lambda_c \nabla^2 h_s + 2 \left(\frac{\partial^2 h_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 J_s}{\partial x \partial z} \right) + M \nabla^2 h_f \\ f_{xz} = 2 \frac{\partial^2 h_s}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 J_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 J_s}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (16)$$

其中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

由两相介质孔隙流体压力与位移的关系

$$p_f = -M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) - M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (17)$$

由式(14)、(17)可得两相介质中孔压-势关系

$$p_f = -M (\nabla^2 h_f + T \nabla^2 h_s) \quad (18)$$

以上各式中: $h_s = h_{s1} + h_{s2}$, $h_f = h_{f1} + h_{f2}$

自由界面条件

$$\begin{cases} e_z|_{z=0} = 0 \\ f_{xz}|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

若边界排水, 孔压为零

$$p_f|_{z=0} = 0 \quad (20a)$$

若边界不排水, 则流体的法向速度为零

$$w_z|_{z=0} = 0 \quad (20b)$$

由 Snell定量, 界面两侧各模式波的 x 方向波矢相等, 即

$$l_{1x} = l_{2x} = l_{sx} \quad (21)$$

则界面条件(19)可表示为

$$\begin{cases} [(\lambda_c + 2 + \bar{M}m_1)l_1^2 - 2l_{1x}^2](A_{s1} + A_{s1}) + \\ [(\lambda_c + 2 + \bar{M}m_2)l_2^2 - 2l_{1x}^2]A_{s2} + 2l_{1x}l_{sz}B_s = 0 \\ 2l_{1x}l_{sz}(A_{s1} - A_{s1}) - 2l_{1x}l_{sz}A_{s2} - (l_{1x}^2 - l_{sz}^2)B_s = 0 \end{cases} \quad (22)$$

界面排水条件式(20a)表示为

$$(T + m_1)l_1^2(A_{s1} + A_{s1}) + (T + m_2)l_2^2A_{s2} = 0 \quad (23a)$$

界面排水条件式(20b)表示为

$$m_1l_{sz}(A_{s1} - A_{s1}) + m_2l_{sz}A_{s2} - m_2l_{1x}B_s = 0 \quad (23b)$$

令入射 P 波固体骨架部分势函数幅值 $A_{s1} = 1$, 则式(22)和式(23a)可进一步整理成

$$\mathbf{P}_d \mathbf{Q} = \mathbf{R}_d \quad (24)$$

式(22)与式(23b)可进一步整理成

$$\mathbf{P}_u \mathbf{Q} = \mathbf{R}_u \quad (25)$$

式(24)与式(25)分别是界面排水和界面不排水情况下各模式波反射系数的一般算式, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [A_{s1} \quad A_{s2} \quad B_s]^T \\ \mathbf{R}_d &= [2l_{1x} - (\lambda_c + 2 + \bar{M}m_1)l_1^2 \quad 2l_{1x}l_{sz} \quad -(m_1 + T^2)l_1^2]^T \\ \mathbf{R}_u &= [2l_{1x} - (\lambda_c + 2 + \bar{M}m_1)l_1^2 \quad 2l_{1x}l_{sz} \quad m_1l_1^2]^T \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{P}_d 各元素为

$$\begin{aligned} P_{11} &= -2l_{1x} + (\lambda_c + 2 + \bar{M}m_1)l_1^2, \quad P_{12} = -2l_{1x} + (\lambda_c + 2 + \bar{M}m_2)l_2^2, \\ P_{13} &= -2l_{1x}l_{sz}, \quad P_{21} = 2l_{1x}l_{sz}, \quad P_{22} = 2l_{1x}l_{sz}, \quad P_{23} = -(l_{sz}^2 - l_{1x}^2), \\ P_{31} &= (m_1 + T^2)l_1^2, \quad P_{32} = (m_2 + T^2)l_2^2, \quad P_{33} = 0 \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{P}_u 前两行元素与 \mathbf{P}_d 前两行元素相同, 第三行元素为

$$P_{31} = m_1l_{sz}, \quad P_{32} = m_2l_{sz}, \quad P_{33} = -m_3l_{sz}$$

对于固定界面, 界面应力条件为

$$\begin{cases} u_z|_{z=0} = 0 \\ u_x|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

采用类似的方法, 得出了如下结果

界面排水时

$$\mathbf{P}_d \mathbf{Q} = \mathbf{R}_d \quad (27)$$

界面不排水时

$$\mathbf{P}_u \mathbf{Q} = \mathbf{R}_u \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [A_{s1} \quad A_{s2} \quad B_s]^T \\ \mathbf{R}_d &= [l_{sz} \quad l_{1x} \quad -(m_1 + T^2)l_1^2]^T \\ \mathbf{R}_u &= [l_{sz} \quad l_{1x} \quad m_1l_1^2]^T \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{P}_d 各元素为

$$\begin{aligned} P_{11} &= l_{sz}, \quad P_{12} = l_{sz}, \quad P_{13} = -l_{1x}, \quad P_{21} = -l_{1x}, \quad P_{22} = -l_{1x}, \quad P_{23} = -l_{sz} \\ P_{31} &= (m_1 + T^2)l_1^2, \quad P_{32} = (m_2 + T^2)l_2^2, \quad P_{33} = 0 \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{P}_u 前两行元素与 \mathbf{P}_d 前两行相同, 第三行元素为

$$P_{31} = m_1 l_z, \quad P_{32} = m_2 l_z, \quad P_{33} = -m_3 l_z$$

以上是针对 P_1 波在平面界面上的反射, 对于 P_2 波、S 波的入射可用类似的方法进行处理。

当介质中无水时, 即为单相介质的情况, 考虑方程 (5)、(6), 此时 $d=0$ 式 (5)、(6) 可分别化为

$$A' \left[\frac{b}{k} \right]^4 + B' \left[\frac{b}{k} \right]^2 = 0 \quad (29)$$

$$D' \left[\frac{b}{k} \right]^2 + C' = 0 \quad (30)$$

其中: $A' = (\lambda_c + 2)M$, $B' = -dM$, $C' = d \left[\frac{1}{n} - \frac{ig}{k_d} \right]$, $D' = - \left[\frac{1}{n} - \frac{ig}{k_d} \right]$ 。设 $Re(l_1) > 0$, $Re(l_2) > 0$, $Re(k_s) > 0$ 则方程 (29)、(30) 的解为

$$\left| \frac{l_1}{k} \right| = \left| \frac{l_2}{k} \right| = \sqrt{\frac{d}{\lambda_c + 2}} \quad (31)$$

$$\left| \frac{k_s}{k} \right| = \sqrt{\frac{d}{n}}$$

$$(32)$$

式 (31) 和式 (32) 代入式 (7)、(8) 可得

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0 \quad (33)$$

考虑到此时 $1 - k_b/k_s = 0$, $\lambda_c = \lambda$, 将 $m_1 \sim m_3$ 以及 T 代入到式 (21)~(23), 可知式 (23) 自然满足, 式 (21)、(22) 分别化为

$$[(\lambda + 2)l_1^2 - 2l_x^2](A_{s1} + A_{s1} + A_{s2}) + 2l_x l_z B_s = 0 \quad (34)$$

$$2l_x l_z (A_{s1} + A_{s1} - A_{s2}) - (l_x^2 - l_z^2)B_s = 0 \quad (35)$$

$A_{s1} + A_{s2}$ 实际上即 P 波反射波势函数幅值, 令 $A_s = A_{s1} + A_{s2}$, 假设 P 以 θ 角入射, S 波反射角为 U , 则有

$$l_x = l_i \sin \theta = l_s \sin U, \quad l_z = l_s \cos U$$

并令 $D = \frac{k_s}{l_i} = \frac{c_d}{c_s} = \sqrt{\frac{\lambda + 2}{n}}$, 将得到以下方程

$$(\lambda + 2 \cos^2 \theta)(A_{s1} + A_s) + D^2 \sin(2U) \times B_s = 0 \quad (36)$$

$$\sin(2\theta)(A_{s1} - A_s) + D^2 \cos(2U) \times B_s = 0 \quad (37)$$

此结果与文献 [5] 中式 (5)~(23) 一致。即对于自由界面无水时, 可退化至弹性单相介质情况。类似也可证明固定边界无水时也可退化至弹性单相介质情形。可见, 单相介质中波的反射是本文的一个特例。

2 算例分析

两相介质计算参数: $k_s = 3 \times 10^9 \text{ Pa}$, $k_f = 2 \times 10^9 \text{ Pa}$, $k_b = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$, $\lambda = 2.5 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\lambda_c = 2.6 \times 10^7 \text{ Pa}$, $d = 1000 \text{ kg/m}^3$, $n = 1.27$, $k_d = 10^{-3} \text{ N/(kg s)}$, 另有: $\lambda_c = \lambda + T^2 M$, $1 - k_b/k_s M = k_s^2 / (k_a - k_b)$; 其中: $k_a = k_s [1 + n(k_s/k_f - 1)]$ 选取 $\lambda = 2.5 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\lambda_c = 2.6 \times 10^7 \text{ Pa}$, $d = 2650 \text{ kg/m}^3$ 作为单相介质固体参数以进行比较。

计算自由边界排水和不排水两种情况下的反射系数。

图2 图3是 $f=100\text{Hz}$ 时两种情况下反射系数随入射角度的变化曲线, 5条曲线分别是两相介质中 P_1 波、 P_2 波、S波和单相介质P波及SV波的反射曲线。从图中可以看出: 两相介质中 P_1 波和单相固体P波的反射曲线有一定的相似性, 两相介质中S波和单相固体中SV波曲线也有一定的相似性。当入射角为零时(即垂直入射), 两相介质中只产生反射 P_1 波, 单相固体中只产生反射P波, 而且相位与入射波相位相反, 幅值与入射波相同。虽然两相介质中 P_1 波、S波与单相固体中P波、SV波的反射曲线有一定的相似性, 但其幅值仍存在较大差异, 这表明把两相介质近似为单相固体是不太合理的。对比两图, 可发现边界排水条件(排水与不排水情况)对反射系数的影响不是很显著。

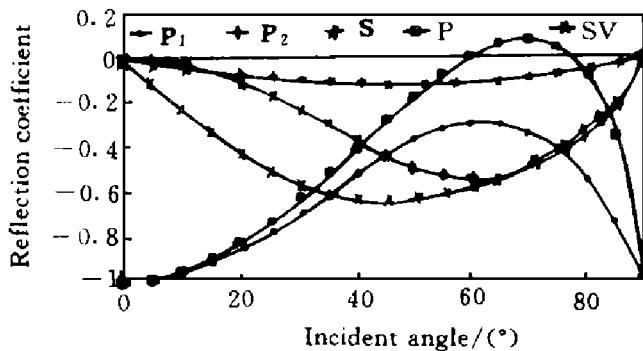


图2 反射系数与入射角度关系图(排水边界情况)

Fig. 2 Relation between reflection coefficient and incident angle (Drainable boundary)

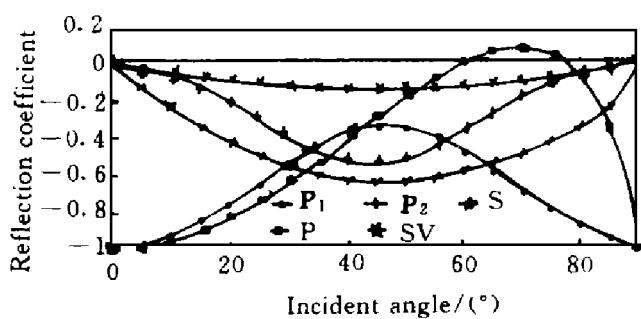


图3 反射系数与入射角度关系图(不排水边界情况)

Fig. 3 Relation between reflection coefficient and incident angle (Undrainable boundary)

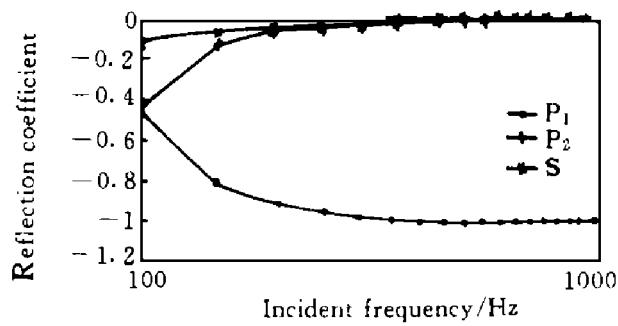


图4 反射系数与入射频率关系图(排水边界情况)

Fig. 4 Relation between reflection coefficient and incident frequency (Drainable boundary)

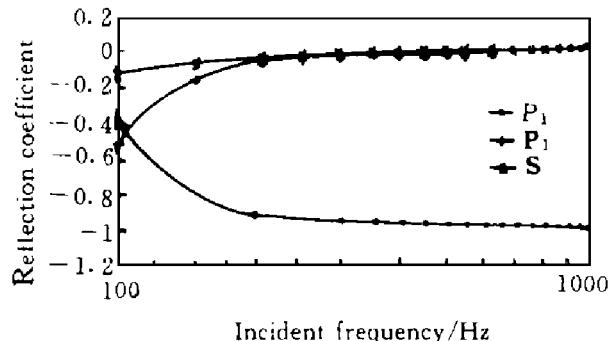


Fig. 5 Relation between reflection coefficient and incident frequency (Undrainable boundary)

图4 图5是两种边界条件下两相介质中波反射系数随入射波频率变化曲线, 入射角度为45°。由于低频时两相介质中波的传播一般无弥散性, 即波的传播受频率变化的影响较小, 可以预见此时反射系数的计算结果将同单相介质情况十分接近, 故而此处频率计算范围取为100~1000Hz。

单相介质中波的反射是不受入射波频率影响的, 而两相介质中波由于流体的存在, 是一种弥散波, 波速与入射频率是相关的, 故而频率的变化必将影响波的反射。由两图可看出: 随频率的提高, P_2 波和S波衰减加快, 当 $f \rightarrow \infty$ 时, 两相介质中只存在一种反射波 P_1 波, 而 P_2 波与S波已耗散为零。

相应可以计算固定边界情况下的反射曲线, 在此不再赘述。

3 结 论

- (1)由于两相介质中存在三种体波,有关反射的计算比各向同性单相介质固体情况复杂。
- (2)两相介质中波的反射不仅与固体介质参数有关,而且与界面条件、入射角度、入射频率有关。而一般单相介质中波的反射是与入射频率无关的。
- (3)通过对对比计算表明:把两相介质等效为均质固体介质来研究波的反射将引起较大的误差。
- (4)本文的反射系数计算方法可以推广到两相介质中, P_2 波及 S 波入射于平面界面的情况,另外,单相各向同性介质中波的反射是一个特例。

参 考 文 献

- 1 Biot M A. The Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. *J Acoust Soc Am*, 1956, 28: 168~178
- 2 王耀俊, 尹会明. 多孔媒质界面上声波的反射. *声学技术*, 1989, 8(2): 5~10
- 3 Stoll R D, Kan T K. Reflection of Acoustic Waves at a Water-sediment Interface. *J Acoust Soc Am*, 1981, 70: 149~156
- 4 Wu K, Xue Q, Adler L. Reflection and Transmission of Elastic Waves From a Fluid-saturated Porous Solid Boundary. *J Acoust Soc Am*, 1990, 87: 2349~2358
- 5 杨桂通, 张善元. 弹性动力学. 北京: 铁道出版社, 1988: 109~117

WAVE REFLECTION AT THE PLANE INTERFACE OF SATURATED SOIL

Xu Changjie Wu Shiming Cai Yuanqiang Chen Yunmin
(Dept of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, 310027)

ABSTRACT The saturated soil is taken as two-phase medium in this paper. By Biot's theory of porous medium, general expressions of reflection coefficients at four kinds of plane interfaces are presented. As a numerical example, the case when P_1 wave (fast compression wave) incidents upon plane interface, the reflection coefficients of P_1 wave, P_2 wave (slow compression wave) and S wave are calculated. The result indicates that the reflection coefficients are varied with the frequency and the angle; in addition, the interface condition affects the reflection. But in homogeneous medium, the reflection has nothing to do with the incident frequency. So if saturated soil is taken as homogeneous medium, there will be markedly different results.

KEY WORDS saturated soil wave reflection