

自由梁受集中质量横向撞击 的刚-塑性动力响应*

席丰 杨嘉陵 郑晓宁 金志刚

(北京航空航天大学固体力学研究所 北京 100083)

摘要 研究自由边界的矩形截面梁在自由端和对称中面分别受到质量块横向撞击后的刚-塑性动力响应,通过完全解分析,结合数值方法给出梁的瞬态变形,并讨论输入能量、质量比等参数对梁的最终变形、移行铰消失位置及能量耗散的影响。

关键词 自由梁 撞击 塑性动力响应

中图法分类号 O 347.1

1 引言

在横向强动载荷作用下,人们已对刚-塑性空间自由梁的塑性动力特性进行了一些研究^[1~4]。与简支梁或夹支梁相比,自由梁在塑性动力特性方面最显著的不同在于能量分配。对于刚-塑性简支或夹支梁,其输入能量全部耗散在结构的塑性变形过程中;而对于自由梁而言,由于部分输入能量转化成了刚体运动的动能,因此实际参加塑性变形的能量仅是其中的一部份,其结果必然导致在同等输入能量的条件下,自由梁的残余变形较简支梁或夹支梁更小。这个现象当载荷不对称时将更加明显。有关自由梁的响应特性研究,已有的文献均是考虑载荷对称的情形。如沿梁跨度的对称分布阶跃载荷,文献[4]研究了弹塑性自由梁对称截面处受集中质量撞击和三角脉冲波冲击的瞬态响应,然而更有趣的问题是在非对称载荷作用下自由梁受集中质量撞击的塑性动力特性。这一问题在航空、航天工程中具有很强的应用背景,例如细长飞行结构受飞射物撞击。

我们研究自由梁在其端部和中部分别受到质量块横向撞击后的刚-塑性动力响应,并比较了两种撞击情况下同样长度的自由梁的能量耗散。文献[4]的实验表明自由梁的塑性变形,特别是梁的残余变形分布主要发生在梁的早期响应阶段,即对应移行铰阶段,接下来主要是刚体运动。我们主要感兴趣的是早期的瞬态变形,因此做小变形假定,除此以外,还假定:(1)材料为理想刚塑性,且与率无关,即塑性极限弯矩为常数;(2)梁为细长的矩形截面梁,不考虑剪力对截面屈服的影响;(3)质量块是刚性的。

2 分析

2.1 端点受撞击的梁

如图1所示均匀材料的矩形截面自由梁,在其端部B受到速度为 v_0 的质量块G的撞击。已

* 国家自然科学基金资助课题(批准号19672006)。

席丰:男,1963年9月生,博士,副教授。

1996-10-18收到原稿,1997-03-12收到修改稿。

经证明 (见附录): 对于阶跃载荷作用的高载情形 ($P > 2M_p / 4l$), 梁的完全解响应模式为图 2 所示的机构, 即在离撞击端 x_h 处形成一塑性铰, 阶跃载荷幅值 P 与塑性铰位置 x_h 之间有下列关系

$$P = 3M_p \left[\frac{1}{x_h} - \frac{x_h}{(l - x_h)^2} \right] \quad (1)$$

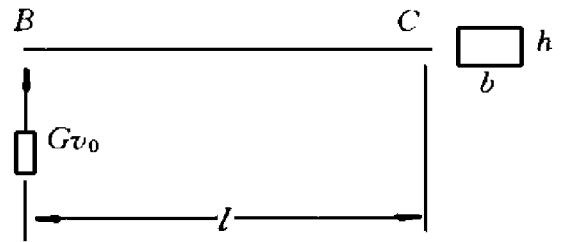


图 1 端部受撞击的自由梁

Fig 1 The free-free beam struck at its end

从 (1) 式知: 当 $P \rightarrow \infty$, 有 $x_h \rightarrow 0$ 因此对于质量块撞击情形, 在初始时刻由于撞击力趋于无穷大, 在自由梁端部即产生塑性铰, 随着撞击力的衰减, 塑性铰向右移动, 其变形机构如图 2 所示。当二相互转动角速度为零, 即移行铰消失时第一相结束, 随后的第二相, 梁内无塑性铰存在, 整个梁仅作刚体运动。我们只分析第一相的响应。

在第一相内的运动和变形机构图如 2 所示。引入下列无量纲量和记号

$$\left\{ \begin{aligned} a = \frac{x_h}{l}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{l}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{l}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{l}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{l}, \quad g = \frac{G}{m l}, \quad f = t \sqrt{\frac{M_p}{m l^3}}, \\ \dot{(\quad)} = \frac{d}{dt}(\quad), \quad \ddot{(\quad)} = \frac{d^2}{dt^2}(\quad), \quad \dot{(\quad)} = \frac{d}{dt}(\quad), \quad \ddot{(\quad)} = \frac{d^2}{dt^2}(\quad), \quad \Lambda = \frac{Gv_0^2}{2M_p}, \quad \tilde{E}_{p1} = \frac{E_{p1}}{M_p} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

则其无量纲化速度场分布为

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{y}} = \dot{\tilde{u}} - \tilde{\lambda} \dot{\theta} & \quad 0 \leq \tilde{\lambda} \leq a \\ \dot{\tilde{z}} = \dot{\tilde{u}} - \dot{\theta} - (\tilde{z} - a) \dot{\theta} & \quad a \leq \tilde{z} \leq 1 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

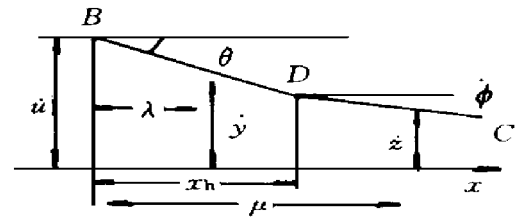


图 2 第一相变形机构图

Fig 2 First phase of motion

设撞击力为 P , 则有

$$-P = G\ddot{u} \quad (4)$$

梁的无量纲化运动微分方程组为

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{u} &= -\frac{6}{a(a+4g)} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{12(a+g)}{a^3(a+4g)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{12}{(1-a)^3} \\ (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) a &= \frac{6[(a+2g)(1-a)^2 - a^2(a+4g)]}{a^2(a+4g)(1-a)^2} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

下面讨论初始条件

$$f = f_0, \quad \dot{\tilde{u}} = \sqrt{2\Lambda/g}, \quad \tilde{u} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} = 0 \quad (6)$$

由 (5) 第四式, 有

$$\dot{a} = \frac{6[(a+2g)(1-a)^2 - a^2(a+4g)]}{(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) a^2(a+4g)(1-a)^2}$$

由于当 $f \rightarrow 0$ 时, 有 $a \rightarrow 0, \dot{\theta} \rightarrow 0$ 所以初瞬时有 $\dot{a} = 3f_0$, 积分并利用 (6) 式有

$$a = \frac{6f_0}{\sqrt{2\Lambda/g}} \quad (7)$$

所以

$$f = f_0 \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\dot{u}}{a} = \frac{(2\Lambda/g)^{3/4}}{\sqrt{6f_0}} \\ \theta = \frac{2(2\Lambda/g)^{3/4}\sqrt{f_0}}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (8)$$

对于 \tilde{y}, \tilde{z}

$$f = f_0 \begin{cases} \tilde{y} = -\tilde{\lambda}\theta = -2\frac{\tilde{\lambda}(2\Lambda/g)^{3/4}\sqrt{f_0}}{\sqrt{6}} \\ \tilde{z} = -\vartheta = \frac{2^a(2\Lambda/g)^{3/4}\sqrt{f_0}}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (9)$$

(5)~(8)式构成非线性常微分方程组的初值问题。

现在分析移行铰消失时的位置。

当 $\theta = \Omega$ 时, a 处的塑性铰消失, 第一相的响应终止。此时, 由 (6) 的第四式, 有

$$(a+2g)(1-a)^2 - a^2(a+4g) = 0 \quad (10)$$

当质量比 $g \rightarrow 0$ 时, 由 (10) 式有 $a \approx 0.5$ 而当 $g \rightarrow \infty$ 时有 $a \approx 0.41$; 故对于任意质量比 $g, 0 < g < \infty$, 有 $0.5 > a > 0.41$, 即移行铰在 BC 梁的左侧附近消失。

第一相响应内消耗的塑性功即为自由梁在整个变形过程中消耗的总能量, 它应等于初始动能与第一相结束时的动能之差, 其无量纲化形式为

$$\tilde{E}_p = \frac{\Lambda}{1+g} \quad (11)$$

为便于与 2.2 节比较, 取梁的长度为 $2l$, 则梁的全部塑性变形消耗的总能量为

$$\tilde{E}_p = \frac{\Lambda}{1+g/2} \quad (12)$$

2.2 中点受撞击的梁

长为 $2l$ 的矩形截面自由梁, 质量块 G 撞击在梁的中央对称截面处。类似于附录中阶跃载荷作用于自由端的分析, 可分析得到在阶跃载荷作用于中央对称截面时, 梁的响应的完全解为下列三个机构运动模式: (1) 低载时仅有整体平动, 无塑性变形发生的刚体运动模式; (2) 中载时只在中央截面有塑性铰的单模式; (3) 高载时在中央截面存在驻定铰, 在该截面两侧各有一个塑性铰的三铰模式, 两侧塑性铰的位置与载荷值有关。

当自由梁在中央截面受到横向撞击时, 其完全解的变形机构模式是在撞击点形成驻定铰, 两侧形成对称的移行铰。其详细分析如下。

2.2.1 第一相: $0 \leq t \leq t_1$

此相的运动变形机构仍如图 2 所示 (考虑对称性, 只画出右半部分), 当 $t = t_1$ 时, 移动铰外侧面绕移行铰的相对转动停止, 此相结束。

无量纲化运动微分方程组为

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{12}{a(a+2g)} \\ \ddot{\theta} = -\frac{12(2a+g)}{a^3(a+2g)} \\ \ddot{O} = \frac{12}{(1-a)^3} \\ (\ddot{\theta} - \ddot{O})a = \frac{6[2(a+g)(1-a)^2 - a^2(a+2g)]}{a^2(a+2g)(1-a)^2} \end{cases} \quad (13)$$

与 2.1 节中的讨论相同, 可得到无量纲化初始条件为

$$f = f_0 \begin{cases} \tilde{u} = 0, \quad \dot{\tilde{u}} = \sqrt{\frac{2\Lambda}{g}} \\ \tilde{O} = 0, \quad \dot{\tilde{O}} = 0 \\ a = \left(\frac{g}{2\Lambda}\right)^{1/4} \sqrt{12f_0} \\ \theta = \frac{(2\Lambda/g)^{3/4}}{\sqrt{3}} \sqrt{f_0}, \quad \dot{\theta} = \frac{(2\Lambda/g)^{3/4}}{2\sqrt{3f_0}} \\ \tilde{y} = -\tilde{\lambda}\theta = -\tilde{\lambda} \frac{(2\Lambda/g)^{3/4}}{\sqrt{3}} \sqrt{f_0} \\ \tilde{z} = -\vartheta = -a \frac{(2\Lambda/g)^{3/4}}{\sqrt{3}} \sqrt{f_0} \end{cases} \quad (14)$$

(13)、(3)、(14) 式构成非线性常微分方程组的初值问题

现在分析移行铰消失时的位置。

当 $\theta = \dot{O} = 0$ 时, 在 f_0 处的塑性铰消失, 第一相的响应终止。此时, 由 (13) 的第四式有

$$2(a+g)(1-a)^2 - a^2(a+2g) = 0 \quad (15)$$

由 (15) 式, 当 $g \rightarrow 0$ 时, $a \approx 0.586$ 而当 $g \rightarrow \infty$ 时, $a \approx 0.5$ 故对于任意质量比 g , $0 < g < \infty$, 当第一相结束时 $0.586 > a > 0.5$ 即移行铰在 BC 梁的右侧附近消失。

第一相响应内消耗的塑性功为

$$E_{p1} = \frac{1}{2} G v_0^2 - \int_0^l \frac{1}{2} m (\dot{u}_1 - \lambda \dot{\theta}_1)^2 dx - \frac{1}{2} G u_1^2$$

其中: u_1, θ_1 为第一相结束时的速度和角速度。无量纲化后的形式为

$$\tilde{E}_{p1} = \Lambda + \frac{1}{3\theta_1} [(\tilde{u}_1 - \tilde{\theta}_1)^3 - (\tilde{u}_1)^3] - \frac{1}{2} g (\tilde{u}_1)^3$$

2.2.2 第二相: $t_1 \leq t \leq t_2$

第一相响应结束后即进入第二相, 此时由于撞击力的衰减, 导致移行铰消失, 但中点的塑性铰依然存在, 其运动机构类似于阶跃载荷中载时的情形, 右段运动如图 3 所示。利用 (5) 式, 其无量纲速度场和加速度场分布为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = \dot{\tilde{u}} - \tilde{\lambda} \dot{\theta} \\ \ddot{\tilde{y}} = \ddot{\tilde{u}} - \lambda \ddot{\theta} \end{cases} \quad (17)$$

运动微分方程的解容易得到

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{6}{1+2g}(f-f_1) + \ddot{u}_1 \\ \ddot{u} = -\frac{3}{1+2g}(f-f_1)^2 + \ddot{u}_1(f-f_1) + \ddot{u}_1 \\ \ddot{\theta} = -\frac{6(2+g)}{1+2g}(f-f_1) + \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta} = -\frac{3(2+g)}{1+2g}(f-f_1)^2 + \ddot{\theta}_1(f-f_1) + \ddot{\theta}_1 \end{cases} \quad (18)$$

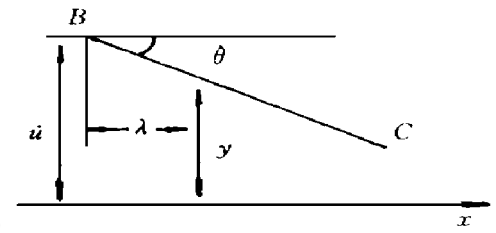


图 3 第二相变形机构图

Fig 3 Second phase of motion

积分 (17) 第一式并将 (18) 代入有

$$\ddot{y} = -\frac{3[1-\bar{\lambda}(2+g)]}{1+2g}(f-f_1)^2 + (\ddot{u}_1 - \bar{\lambda}\ddot{\theta}_1)(f-f_1) + \ddot{u}_1 - \bar{\lambda}\ddot{\theta}_1 + \ddot{y}_1 \quad (19)$$

式中: \ddot{y}_1 为第一相结束时梁中与 $\bar{\lambda}$ 对应的点上的位移值。

当 $\theta = 0$ 时, $f = f_2$, 此时梁中点的塑性铰消失, 第二相的响应结束。由 (18) 的第三式有

$$f_2 = f_1 + \frac{1+2g}{6(2+g)}\ddot{\theta}_1 \quad (20)$$

第二相响应内消耗的塑性功为

$$E_{p2} = \int_0^d \frac{1}{2}m[(u_1 - \lambda\theta_1)^2 - u_2^2]d\lambda + \frac{1}{2}G(u_1^2 - u_2^2)$$

无量纲化后形式为

$$\tilde{E}_{p2} = \Lambda - \tilde{E}_{p1} - (1-g/2)(\tilde{u}_2)^2 \quad (21)$$

式中: $\tilde{E}_{p2} = E_{p2}/M_p$, \tilde{u}_2 为第二相响应结束时中点的无量纲速度。

第一相和第二相响应时间内消耗的总的塑性功为

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_{p1} + \tilde{E}_{p2} = \Lambda - (1+g/2)(\tilde{u}_2)^2 \quad (22)$$

2 2 3 第三相: $t \geq t_2$

随着撞击力的继续衰减, 梁中点的塑性铰消失, 梁不再绕中点转动, 此时进入第三相, 自由梁的变形机构模式应与阶跃载荷低载时的模式类似, 即梁仅做整体的刚性运动, 所不同的是中点保留一个永久折角。

3 数值计算结果

3 1 梁的位移及移行铰位置的计算

为计算梁上各点的位移, 将 BC 梁 $N-1$ 等分, 则对于分别在端点和中点受横向撞击的情况, 其第一相的响应, 由 (6)、(7) 和 (16)、(7) 式, 可分别得到 $N+4$ 个常微分方程组, 由龙格-库塔法求得数值解, 从而得到分别在第一相内任意时刻梁 BC 上 N 个点处的位移及移行铰的位置。对于在中点受到撞击时其第二相的响应, 则可由 (23) 得到梁 BC 上 N 个结点在各个时刻的位移值, 从而得到梁的最终变形形状。在计算中给定初始时刻 $t_0 = 0.0001$, 并取 $N = 20$ 。

计算分别取几种情形下的质量比和初始冲击能量。对于在端点受撞击的情形, 图 4 图 5 为移行铰消失时的位置及最终变形形状曲线。在中点受撞击的情况下, 图 6 图 7 为梁的初态和各相结束时的终态位移曲线及移行铰位置图和在第一相和第二相响应时间内的瞬态位移曲线及

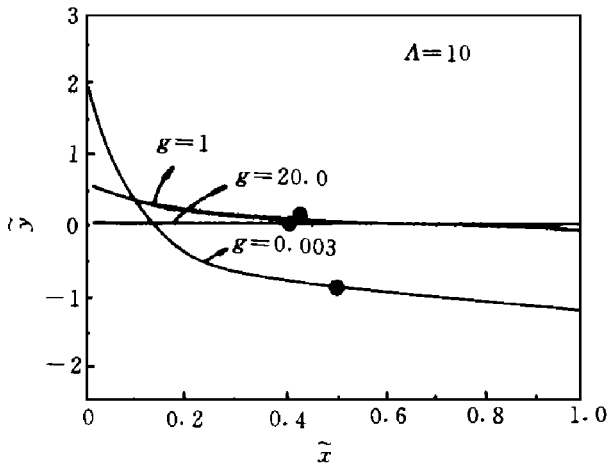


图 4 最终变形及移行铰消失时的位置
Fig. 4 Final deforming shape and faded position of moving hinge

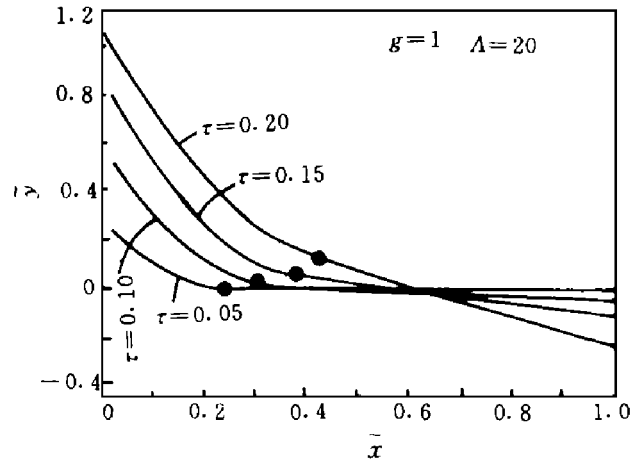


图 5 瞬态位置曲线及移行铰位置
Fig. 5 Instantaneous profile and position of moving hinge

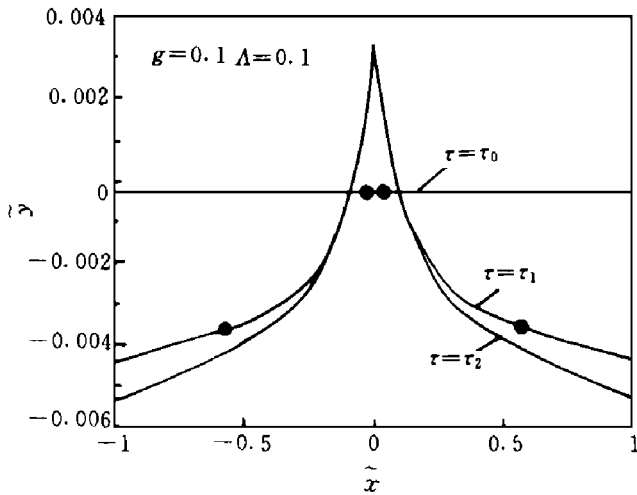


图 6 瞬态位移曲线及移行铰位置
Fig. 6 Instantaneous profile and position of moving hinge

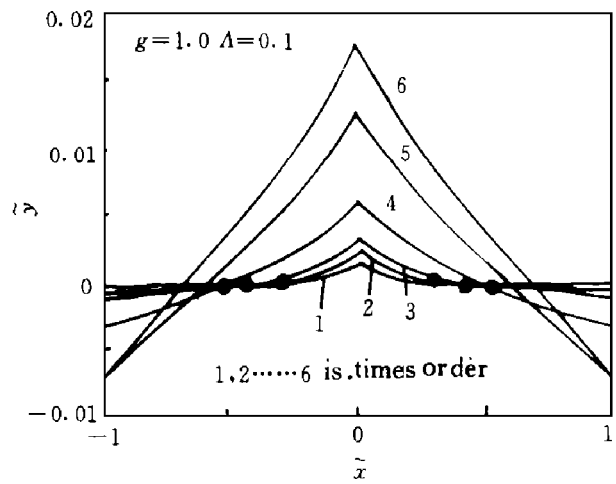


图 7 瞬态位移曲线及移行铰位置
Fig. 7 Instantaneous profile and the position of moving hinge

移行铰位置。分析计算结果,可得到下面几点结论。

(1)中点受撞击的情形:在冲击能量 Λ 给定时,质量比 g 对第二相的位移响应影响很大;随着 g 的增大,梁的变形由以第一相为主转化为以第二相为主,即梁受到轻而快的质量块撞击时,塑性变形包括移行铰两侧截面和中点塑性铰两侧截面的转动位移;当受到重而慢的质量块撞击时,塑性变形主要是中点塑性铰两侧截面的转动位移。

(2)端点受撞击的情形:在冲击能量 Λ 给定时,质量比 g 的大小对梁的塑性变形影响很大,随着 g 的增大,梁的塑性变形越来越小。

(3)两种撞击情况下,移行铰均向外端部迁移。

(4)两种撞击情况下,梁的位移均随初始冲击能量的增大而增大;冲击能量对中点受撞击梁的变形模态影响不大。

(5)两种撞击情形,移行铰消失位置分别位于 BC 梁中央截面的左右两侧;对于在端点受到轻而快的物体撞击时的自由梁,移行铰在 BC 梁中点附近消失;而当在中点受到重而慢的物体撞击时,移行铰也在 BC 梁中点附近消失。

3.2 能量耗散的计算

(11)、(12)、(22)式可得到 \bar{E}_p/Λ g 关系曲线如图 8 所示。可以发现, 两种撞击情况下, 在端点撞击时梁的塑性耗散能量低于在中点撞击时所消耗的能量。塑性功随质量比的增大而减小, 特别是当质量比 $g < 1$ 时, 塑性功几乎等于所施加的冲击能量; 而当 $g > 5$ 时, 对于中点受撞击的梁, 只有不到 40% 的初始能量为塑性变形所吸收; 同样长度, 端点受撞击的梁, 则不超过 30%; 长度减半时, 能量耗散更低, 其余大部分能量使得自由梁做刚体运动。

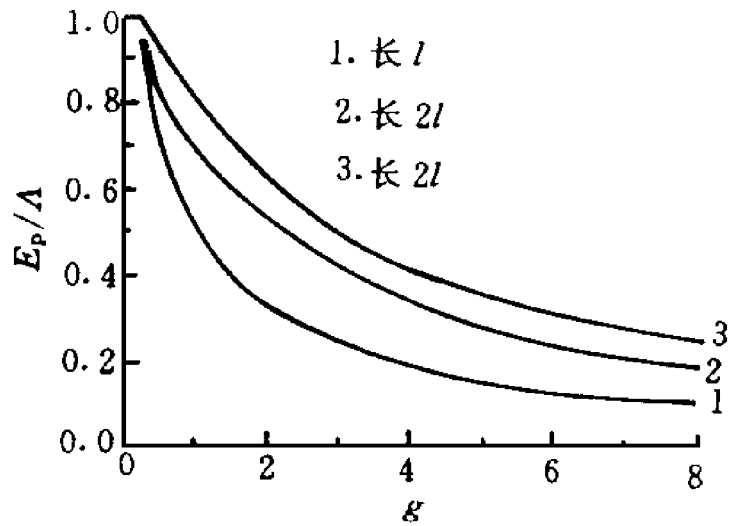


图 8 能量耗散与质量比的关系曲线

Fig. 8 Curves of relationship between energy and mass ratio

参 考 文 献

- 1 Lee E H, Symonds P S. Large Plastic Deformations of Beam under Transverse Impact. *J Appl Mech*, 1952, 19: 308~ 314
- 2 Symonds P S. Dynamic Load Characteristics in Plastic Bending of Beams. *J Appl Mech*, 1953, 20: 475~ 481
- 3 Jones N, Wierzbicki T. Dynamic Plastic Failure of a Free-free Beam. *Int J Impact Engng*, 1987, (6): 240~ 255
- 4 Yu T X, Yang J L, Reid S R. Dynamic Behaviour of Elastic-plastic Free-free Beams Subjected to Impulsive Loading. *Int J Solids Structures*, 1996, 33(8): 2659~ 2680

附 录

自由梁端部作用阶跃载荷时的完全解分析

当较小的阶跃载荷 $P(t)$ 作用于梁的端部, 自由梁作刚体运动, 其运动方程为

$$u = 4P/m\dot{\theta} = 6P/m\ddot{\theta}$$

梁内任一 x 截面上的弯矩为

$$M(x) = Px - \frac{m\dot{u}}{2}x^2 + \frac{m\ddot{\theta}}{6}x^3 = Px - \frac{2P}{l}x^2 + \frac{P}{l^2}x^3$$

由 $dM/dx = Q$ 得到: $x = l/3$ $M(l/3) = M_{max} = 4Pl/27$ 令 $M_{max} = M_p$, 有 $P = 27M_p/4l = P^*$ 。当 $P < P^*$ 时, 梁只有刚体运动, 并没有截面达到塑性极限弯矩; 当 $P = P^*$ 时, 在离撞击端 $x = l/3$ 处达到塑性极弯矩 M_p (形成塑性铰); 而当 $P > P^*$ 以后, 梁的响应模式是在 $x = x_h < l/3$ 处形成塑性铰, 变形机构如图 2 所示。容易证明这样的响应模式是对应于高载 $P > P^*$ 以后的完全解的响应模式。实际上, 梁的运动微方程为

$$\begin{cases} P - m x_h (\ddot{u} - x_h \ddot{\theta} / 2) = 0 \\ M_p - m x_h^2 \ddot{u} + m x_h^3 \ddot{\theta} / 3 = 0 \\ \ddot{u} - x_h \ddot{\theta} - (l - x_h) \ddot{\theta} / 2 = 0 \\ M_p - m (l - x_h)^3 / 12 = 0 \end{cases}$$

现在证明在 $x \neq x_h$ 的梁的任一截面上, 有 $|M(x)| < M_p$

在 BD 内 ($0 < x < x_h$) 任一截面上的剪力为

$$Q = 3M \left[\frac{1}{x_h} - \frac{x_h}{(l - x_h)^2} - \left[\frac{2}{x_h^2} - \frac{4}{(l - x_h)^2} \right] x + \frac{1}{x_h} \left[\frac{1}{x_h^2} - \frac{3}{(l - x_h)^2} \right] x^2 \right]$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{M_p}{x_h^2(l-x_h)^2} \left\{ 2x_h^2 - (l-x_h)^2 + [-3x_h^2 + (l-x_h)^2] \frac{x}{x_h} \right\}$$

由 $\frac{l}{3} > \frac{\sqrt{3}}{3} x_h > (1 - \sqrt{3})x_h$, 有 $(l-x_h)^2 - 3x_h^2 > 0$ 所以

$$\frac{dQ}{dx} < \frac{M_p}{x_h^2(l-x_h)^2} \{ 2x_h^2 - (l-x_h)^2 + [-3x_h^2 + (l-x_h)^2] \} = -\frac{M_p}{(l-x_h)^2} < 0$$

即剪力 Q 在 BD 内沿 x 单调下降; 又因为 $Q|_{x=0} = P$, $Q|_{x=x_h} = 0$ 所以 $Q \neq 0$ 即当 $0 < x < x_h$ 时, 弯矩无极值点, $|M(x)| < M_p$

在 DC 段内任一 x 截面上的剪力为: $Q = \frac{M_p}{(l-x_h)^3}(x-l)(x-x_h)$ 。显然, 当 $x_h < x < l$ 时, $Q \neq 0$ 即弯矩无极值点, 所以 $|M(x)| < M_p$

结论: 对于高载情形 ($P > P^*$), 采用图 2 所示的变形机构并不违背静力屈服条件, 且塑性铰的位置随载荷的增大而向载荷作用的端部移动, 当 $P \rightarrow \infty$ 时, $x_h \rightarrow 0$

DYNAMIC RESPONSE OF A RIGID, PERFECTLY PLASTIC FREE-FREE BEAM SUBJECTED TO IMPULSIVE LOADING

Xi Feng, Yang Jialing, Zheng Xiaoning, Jin Zhigang

(Solid Mechanics Research Center, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

ABSTRACT In this paper, the rigid-perfectly plastic dynamic response of a free-free beam subjected to impact by a projectile at the free end and the mid-span cross-section is presented. The influence of some parameters such as input energy and mass ratio on the final deflection, travelling plastic hinge position and energy partitioning of the beam are discussed.

KEY WORDS free-free beam, impact, dynamic plastic response