

通量修正输运法在动态有限差分 和有限元中的应用*

王肖钧 肖绍平 胡秀章

(中国科技大学近代力学系 合肥 230026)

摘要 阐述了通量修正输运法(FCT方法)的计算格式及其原理。并以一维应力波为例,讨论了FCT方法在有限差分与有限元中的应用。结果表明FCT方法对于提高冲击波分辨率和消除波后振荡是有效的。

关键词 通量修正输运 有限差分 有限元

中图法分类号 O 347. 4

1 引言

国内求解波动问题的计算程序,无论是欧拉型的还是拉格朗日型的,也无论是有限差分方法还是有限元方法,多采用人工粘性的方法来处理冲击波波阵面后的周期性振荡和吉布斯现象。但是由于人工粘性使用时存在很多人为因素,破坏了真实的物理图象,所以在计算冲击波和非定常爆轰波的传播问题时存在较大的局限性。

通量修正输运(Flux-Corrected Transport)方法,简称FCT方法,起源于Boris和Book的工作^[1-3]。他们着重强调FCT方法是一种方法而不是一种固定的算法,它带有普遍性并且可以运用于许多常见的高阶差分格式。但是他们的方法并不能完全消除高阶色散引起的波后振荡。S. T. Zalesak^[4]给出了新的反扩散通量的限制形式,完善了FCT方法,使得FCT方法在处理冲击波波阵面的问题上更加得心应手。可是他的方法需要构造两种差分格式,使用起来依然有些不便^[5]。我们对Boris和Book的方法中反扩散通量限制条件作了改进,取得了十分满意的结果。

FCT方法在冲击动力学中的应用主要集中在有限差分上。在有限差分的计算中,FCT方法必须用于方程中每一个在时间层次上展开的独立变量,较为繁琐。而且,在二维与三维的冲击动力学计算中,目前以有限元方法为主。因此FCT方法与有限元方法结合更具有应用价值。为此,我们将FCT方法推广到有限元程序中,并通过与有限差分结果相比较来说明该方法的有效性。

2 FCT方法的格式与原理

对于任一与时间有关的函数 U ,是时间方向上的差分方程均可表示为

* 国防科技预研基金资助(项目编号96J11 4 4 0102)
王肖钧:男,1941年4月生,教授,博导。
1997-07-25收到原稿,1997-12-08收到修改稿。

$$U_j^{n+1} = f(U_j^n, \Delta t, \Delta x) \quad (1)$$

Boris 和 Book 给出了 FCT 方法的通用格式:

(1) 输运计算, 即由 (1) 式求出待修正的 \tilde{U}_j^{n+1}

$$\tilde{U}_j^{n+1} = f(U_j^n, \Delta t, \Delta x) \quad (2)$$

(2) 求 n 时刻的扩散通量, 其中 Z_1 为扩散系数

$$F_j^n = Z_1(U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (3)$$

(3) 扩散计算

$$U_j^{n+1} = \tilde{U}_j^{n+1} + F_{j+1}^n - F_j^n \quad (4)$$

(4) 反扩散通量, 其中 Z_2 为反扩散系数

$$F_j^{n+1} = Z_2(\tilde{U}_{j+1}^n - \tilde{U}_j^n) \quad (5)$$

(5) 限制反扩散通量条件, 其中 $\Delta_{j-1} = U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}$, $S = \text{sgn}(F_j^{n+1})$

$$F_j^c = S \cdot \max[\min(S \cdot \Delta_{j-1}, |F_j^{n+1}|), S \cdot \Delta_{j+1}] \quad (6)$$

(6) 反扩散

$$U_j^{n+1} = U_j^{n+1} - F_j^c + F_{j-1}^c \quad (7)$$

FCT 方法的本质是对色散输运格式施加一个扩散项, 使之能平滑通过冲击波区或流场陡变区且无数值振荡。反扩散计算则使得扩散误差得到补偿, 然而在冲击波区或流场陡变区它却引起了振荡, 这是因为反扩散之后出现了新的极值。采用限制反扩散通量条件后, 消除了新极值, 也消除了振荡, 获得了稳定解。而且, 修正扩散以守恒方式施加, 即在某一网格点减去某个小量时, 同样大小的小量会被加到另外一个网格点, 这相当于一个小的修正值从一点挤向另外一点, 从而不会导致整个系统的某个量 (动量、能量等) 的增加或减少^[6]。

3 FCT 方法在有限差分中的应用

Boris 和 Book 方法虽然有效地抑制了冲击波区或流场陡变区的色散振荡, 但数值计算表明, 它无法完全消除这种振荡。S. T. Zalesak 注意到了低阶格式本身具有很强的扩散性, 不会出现色散现象。但是低阶格式将冲击波阵面拉得过于平滑, 而这方面正是高阶格式的优点。因此, S. T. Zalesak 推广了 FCT 方法, 使之体现了高阶格式和低阶格式的优点, 描述冲击波时具有更高的精度。同时, 他还重新给出了一个新的反扩散通量的限制形式。

S. T. Zalesak 方法虽然更加严格和精确, 但是比起 Boris 和 Book 方法, 它需要对方程构造一个低阶格式的差分方程和一个高阶格式的差分方程, 显得过于繁琐。我们对 Boris 和 Book 方法做适当改进, 扩大了限制反扩散通量的区间, 结果发现该措施十分有效。

限制反扩散通量的目的在于不产生新的极值。原有的限制条件中, 通过对 $S \cdot \Delta_{j+1}$ 与 $S \cdot \Delta_{j-1}$ 相比较取最小值的方法对 j 点反扩散通量作出限制, 以防止 j 点出现比 $j+1$ 或 $j-1$ 点更大或更小的值, 避免数值振荡的出现。但是在实际计算中, 我们发现其所限制点的范围过于狭窄, 计算中有可能在波阵面附近出现小的数值振荡。所以我们在对 j 点的反扩散通量进行限制时, 增加 $S \cdot \Delta_j$ 来加强对原区间的限制, 另外增加 $S \cdot \Delta_{j-2}$ 与 $S \cdot \Delta_{j+2}$ 使得 j 点的限制范围扩展到 $j+2$ 点与 $j-2$ 点, 取得了很好的效果。这时限制反扩散通量的关系为

$$F_j^c = S \cdot \max[\min(S \cdot \Delta_{j-2}, S \cdot \Delta_{j-1}, S \cdot \Delta_j, |F_j^{n+1}|, S \cdot \Delta_{j+1}, S \cdot \Delta_{j+2})] \quad (8)$$

下面用有限差分 FCT 方法计算线性硬化材料中的一维应力波来说明该方法的有效性。

设钢杆长 $l = 0.1\text{m}$, 材料常数分别为: 密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 杨氏模量 $E = 2.275 \times 10^{11} \text{Pa}$, 硬化模量 $E_p = 5.7 \times 10^{10} \text{Pa}$, 初始屈服强度 $Y_0 = 5 \times 10^8 \text{Pa}$

在杆的一端施加均匀脉冲面载荷 $q = 8 \times 10^8 \text{Pa}$, 脉宽 $\tau = 6 \times 10^{-6} \text{s}$, 扩散系数和反扩散系数同取 $Z_1 = Z_2 = Z_0 = 0.125$, Boris 和 Book 严格地证明了该值的有效性。

杆中一维应力波的传播方程为

$$d \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial e_x}{\partial x} \tag{9}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{10}$$

$$d e_x = E d X \tag{11}$$

式中: dX 为弹性应变增量。

采用中心差分显格式, 首先由 (9) 式求出 u , 再由 (10) 式求出 X , 然后通过本构关系 (11) 得到 e_x 。如果采用 FCT 方法, 则须在 (1) 式得到空间上所有点的 u 值之后, 对 u 进行修正, 同时还须在 (10) 式求出空间上所有点的 X 值之后对 X 进行修正, 这样才能消除色散效应。

图 1 为未引入 FCT 方法时杆中应力波在三个不同时刻的空间波形, 其中曲线 3 为自由端反射之后的波形。图 1 中由色散效应引起的波后高频振荡较为明显, 这种振荡主要集中在卸载波后方区域。在自由端反射之后, 弹性强间断波阵面后也出现了少许数值振荡。

图 2~ 3 是采用 FCT 方法计算所得的应力波形图。图 2 用的是原来的限制反扩散通量条件, 很好地消除了波阵面后方由色散引起的数值振荡。然而, 在弹性强间断波阵面前方却依然有小的数值振荡, 表现为波头下冲振荡, 这是限制通量不够所引起的。在采用了改进的限制反扩散通量之后, 得到的应力波形如图 3 效果非常好。

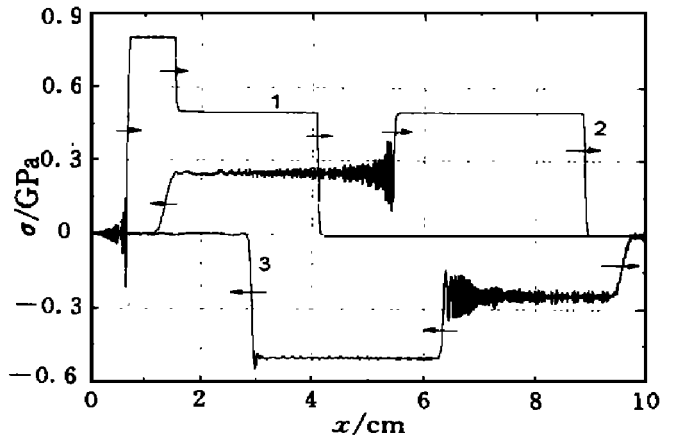


图 1 未引入 FCT 方法的有限差分法
Fig. 1 FDM without FCT method

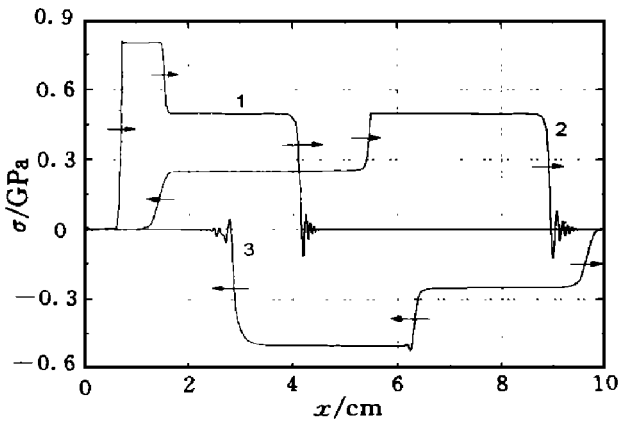


图 2 有限差分 FCT 方法 (原限制条件)
Fig. 2 FDM with FCT method
(original restriction condition)

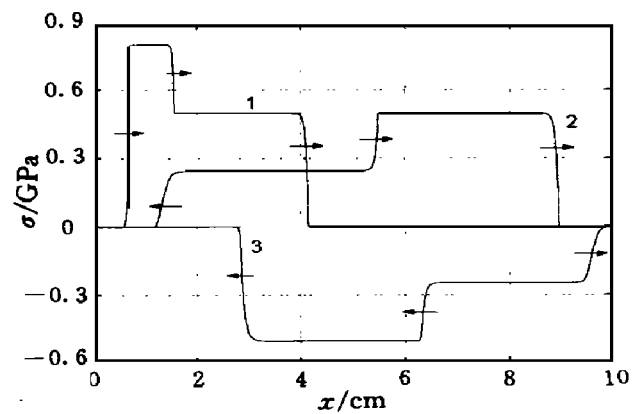


图 3 有限差分 FCT 方法 (改进的限制条件)
Fig. 3 FDM with FCT method
(improved restriction condition)

4 FCT方法在有限元中的应用

FCT 方法在有限差分中的应用已经趋于成熟。但是由于在大型的二维乃至三维冲击力学计算中,有限元方法较有限差分法更为普遍,并且在有限差分方法中使用 FCT 方法需对每一方程中的 $\partial/\partial t$ 项进行修正,比较繁琐。而 Lagrange 有限元计算只须考虑运动方程的时间积分,因此, FCT 方法如能与有限元方法结合,应比有限差分 FCT 方法更简洁有效。

当采用集中质量法后,有限元的运动方程近似归结为解如下方程

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{F_j}{m_j} \tag{12}$$

式中: F_j 为单元节点力, m_j 为节点集中质量, u_j 则为节点的速度。对 (12) 式使用 FCT 方法, 须在每一个时间层次求得速度之后, 对速度进行通量修正, 然后采用改进后的通量限制条件即可。

有限元 FCT 方法的计算过程如下: (1) 由运动方程 (12) 求出待校正的节点速度 \dot{u}_j ; (2) 计算 n 时刻扩散通量 $F_j^n = Z_1(\dot{u}_{j+1}^n - \dot{u}_j^n)$; (3) 扩散的计算 $\bar{u}_j^{n+1} = \dot{u}_j^n + F_{j+1}^n - F_j^n$; (4) 由 (2) 结果计算反扩散通量 $F_j^{n+1} = Z_2(\dot{u}_{j+1}^{n+1} - \dot{u}_j^{n+1})$; (5) 计算限制反扩散通量, 其中 $\Delta_{j-1} = \bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}$, $S = \text{sgn}(F_j^{n+1})$

$$F_j^c = S \cdot \max [0, \min (S \cdot \Delta_{j-2}, S \cdot \Delta_{j-1}, S \cdot \Delta_j, |F_j^{n+1}|, S \cdot \Delta_{j+1}, S \cdot \Delta_{j+2})]$$

(6) 反扩散的计算 $\dot{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} - F_j^c + F_{j-1}^c$ 。

下面用有限元 FCT 方法计算, 在两端都受到压力脉冲载荷的情况下, 杆中应力波的传播波形。材料常数与前面的算例一样, 杆左端受到的压力脉冲 $q = 8 \times 10^8 \text{ Pa}$, 右端所受压力脉冲 $q = 6 \times 10^8 \text{ Pa}$, 脉宽 $\tau = 6 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。图 4~5 为杆中相同时刻的空间波形。曲线 1 为两波相遇前 ($t = 3 \times 10^{-8} \text{ s}$) 的空间波形, 曲线 2 为两波相遇作用多次后 ($t = 13 \times 10^{-8} \text{ s}$) 的空间波形。

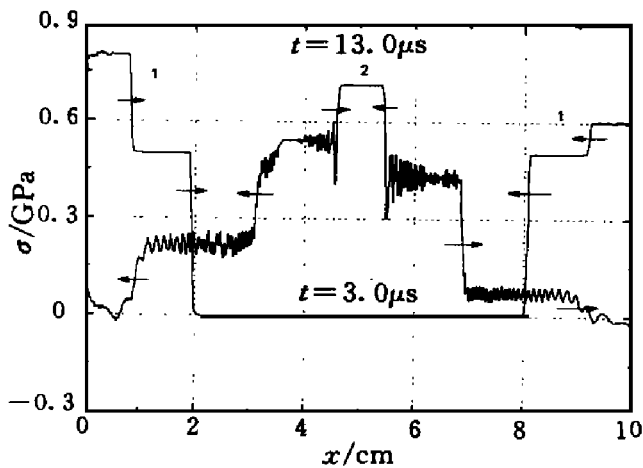


图 4 未采用 FCT 方法的有限元法
Fig. 4 FEM without FCT method

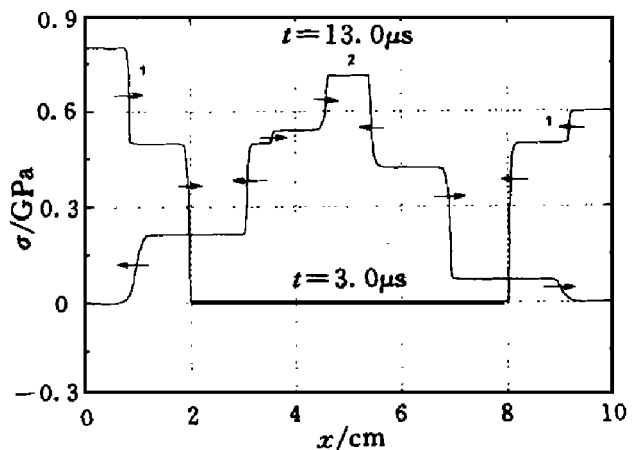


图 5 有限元 FCT 方法 (改进的限制条件)
Fig. 5 FEM with FCT method (improved restriction condition)

图 4 是未采用 FCT 方法的计算结果, 在相对的两个冲击波相互作用后, 各个冲击波的波前或波后都出现了不同程度的高频振荡现象。图 5 则是引入 FCT 方法之后的有限元计算结果。可见, 引入本文改进后的 FCT 方法之后, 有限元法能十分准确地描述强间断冲击波的加卸载过程及其相互作用。由于 FCT 方法没有引入任何人为因素, 因此它能比人工粘性更有效地消除

色散

5 小 结

Boris和 Book方法的限制通量条件有一定的局限性,只要对它进行适当改进,就可以消除高阶色散引起的波头上冲和下冲振荡,获得满意的结果。由于 FCT方法本身简洁明了,易于嵌入目前大多数冲击动力学有限差分和有限元计算程序,因此具有广阔的应用前景和实用价值。

参 考 文 献

- 1 Boris J P, Book D L. Flux-corrected Transport 1. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm that Works. *J Comput Phys* 1973 11(1): 38
- 2 Book D L, Boris J P, Hain K. Flux-corrected Transport 2. Generalizations of the Method. *J Comput Phys* 1975 18(3): 248
- 3 Boris J P, Book D L. Flux-corrected Transport 3. Minimal-error FCT Algorithms. *J Comput Phys* 1976 20(4): 397
- 4 Zalesak S T. Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms of Fluids. *J Comput Phys* 1979 31(3): 335
- 5 傅竹风,胡友秋.空间等离子体数值模拟.合肥:安徽科学技术出版社,1995 107
- 6 张举华.固体含能材料冲击起爆——计算方法、冲击能量向分子能部流动模型、超细多孔材料中冲击波能量耗散机制: [博士学位论文]北京:北京理工大学,1995

APPLICATIONS OF FLUX-CORRECTED TRANSPORT (FCT) METHOD IN DYNAMIC FINITE DIFFERENCE AND FINITE ELEMENT COMPUTATIONS

W ang X iao jun, X iao Shaoping H u X iu zhang
(*Department of Modern Mechanics, University of
Science and Technology of China, H efei, 230026*)

ABSTRACT The computational scheme and the basic idea of the Flux-Corrected Transport (FCT) method are studied in the paper. With the numerical simulations of one-dimensional stress waves, its applications to Finite Difference Method (FDM) and Finite Element Method (FEM) are also discussed. The results show that FCT method is very efficient in accurate describing the shock waves and eliminating the dispersive fluctuation behind the shock front.

KEY WORDS flux-corrected transport, finite difference method, finite element method