

# 利用 Laplace 变换确定双层厚壁长圆筒的轴对称界面碰撞压力

尹晓春 冯思艳 龚育宁

(南京理工大学土木工程与力学系 南京 210014)

**摘要** 利用 Laplace 变换, 考虑轴对称弹性波的影响, 采用特征函数展开法求解双层厚壁长圆筒受爆炸载荷作用下的轴对称弹性碰撞冲击问题, 着重研究前几次碰撞冲击引起的轴对称界面碰撞压力。并对轴对称界面碰撞压力与间隙量、爆炸载荷幅值、爆炸载荷衰减系数之间的关系以及相关的动力响应作了初步的分析。

**关键词** 碰撞压力 间隙 Laplace 变换 应力波

**中图分类号** O 521.12\*

## 1 引言

工程中存在着大量的间隙结构或间隙运动机构, 间隙对系统的动力学行为, 特别是对振动与碰撞冲击行为会产生不可忽视的影响<sup>[1]</sup>。即便采用“碰撞对”等振动模型将系统简化为“冲击振动系统”<sup>[2]</sup>, 仍会出现非周期性等较复杂的力学现象。间隙的存在往往还会导致物体间的多次碰撞。由于碰撞属于强加载过程, 有必要考虑应力波的影响, 但因界面力学行为复杂性, 目前还很少考虑到。在爆炸载荷和碰撞产生的界面碰撞压力波的共同作用下, 结构中不仅会出现弹性应力波, 而且还将在动态应力超过材料的动态屈服极限后, 产生波速较慢的塑性应力波, 使得间隙结构的碰撞问题更为复杂。从工程应用角度上看, 通过计算结构的弹性动态应力, 并选取合适的安全系数, 仍是分析结构动态强度简便而有效的方法。通常, 由于材料粘弹性和振动阻尼的衰减作用对后续碰撞的影响较大, 而对前几次碰撞的影响相对较小, 因此, 就结构的强度而言, 前几次碰撞尤为重要。我们利用 Laplace 变换, 考虑轴对称弹性波的影响, 对双层厚壁间隙长圆筒在爆炸载荷作用下的前几次轴对称弹性碰撞冲击进行分析。着重研究由碰撞产生的轴对称界面碰撞压力的分布曲线, 并对轴对称界面碰撞压力与间隙量、爆炸载荷幅值、爆炸载荷衰减程度之间的关系以及相关的动态应力和动态位移作了初步的分析。

## 2 轴对称界面碰撞压力 $p_2(t)$ 的求解方法

双层厚壁间隙长圆筒结构, 是由两同心、具有光滑内外表面的厚壁长圆筒组成, 两筒间存在大小为  $\Delta$  的间隙量, 内筒内径为  $a_1$ , 外径为  $b_1$ , 外筒内径为  $a_2$  ( $a_2 = b_1 + \Delta$ ,  $\Delta/b_1 \ll 1$ )、外径为  $b_2$ , 两筒初始时刻处于静止状态。仅内筒内壁受到沿圆筒轴向均匀分布、轴对称的爆炸载荷

\* 尹晓春: 男, 1963年生, 博士, 副教授。

1997-04-10收到原稿, 1997-10-27收到修改稿。

作用,形式为

$$p_1(t) = \epsilon_0 e^{-Tt} H(t) \quad (1)$$

式中:  $\epsilon_0$  为幅值,  $T$  为衰减系数,  $t$  为时间,  $H(t)$  为 Heaviside 阶跃函数。选定的结构尺寸和材料参数为:  $a_1 = 0.2\text{m}$ ,  $b_1 = 0.3\text{m}$ ,  $b_2 = 0.4\text{m}$ , 两厚壁长圆筒材料相同, 均为各向同性、均质的线弹性材料, Lamé 常数  $\lambda = \mu = 80\text{GPa}$ , 纵波波速  $c = 5\text{km/s}$ 。另外, 选择  $\epsilon_0$  的数值在允许结构不发生塑性变形的范围之内。

根据已给定的结构和载荷条件, 研究的问题被简化为轴对称平面应变问题, 只有沿圆筒径向传播的轴对称弹性波 (柱面波), 波速为  $c$ 。为研究该问题下的双层厚壁间隙长圆筒的轴对称弹性碰撞, 首先研究内径为  $a$  外径为  $b$  的单个厚壁长圆筒, 该筒内壁和外壁分别受到沿圆筒轴向均匀分布、轴对称的内压  $\hat{p}_1(t)$  和外压  $\hat{p}_2(t)$  的共同作用。在轴对称平面应变条件下, 其线性波动方程、边界条件和初始条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \epsilon_r(r, t)|_{r=a} = -\hat{p}_1(t) & \epsilon_r(r, t)|_{r=b} = -\hat{p}_2(t) \quad (a \leq r \leq b, t \geq 0) \\ u(r, 0) = u_0(r) & \left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(r) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $u = u(r, t)$  是径向动态位移,  $r$  是径向位置,  $u_0(r)$ 、 $v_0(r)$  为初始位移与初始速度分布,  $\epsilon_r(r, t)$  为径向应力。根据文献 [3~4], 波动方程 (2) 按特征函数解法求得

$$u(r, t) = u_s(r, t) + \sum_n U_n(r) q_n(t) \quad (3)$$

式中:  $u_s(r, t)$  为满足边界条件的准静态解,  $U_n(r)$  为满足齐次边界条件的特征函数,  $q_n(t)$  为时间函数。则

$$\begin{cases} u_s(r, t) = h_1(r, a, b) \hat{p}_1(t) = h_2(r, a, b) \hat{p}_2(t) \\ U_n(r) = A_n X(k, r) \\ q_n(t) = q_n(0) \cos k_n t + \frac{1}{k_n} \dot{q}_n(0) \sin k_n t + \frac{1}{k_n} \int_0^t \ddot{Q}_n(f) \sin k_n(t-f) df \\ h_1(r, a, b) = \frac{a^2}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)} r + \frac{a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)} \frac{1}{r} \\ h_2(r, a, b) = -\frac{b^2}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)} r - \frac{a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)} \frac{1}{r} \\ X(k, r) = M_2(k_n, a) J_1(k_n r) - M_1(k_n, a) Y_1(k_n r) \\ Q_n(t) = -\mathfrak{X} \int_a^b u_s(r, t) U_n(r) r dr \\ q_n(0) = \mathfrak{X} \int_a^b u_0(r) U_n(r) r dr + \dot{Q}_n(0) \\ \dot{q}_n(0) = \mathfrak{X} \int_a^b v_0(r) U_n(r) r dr + \ddot{Q}_n(0) \\ M_1(k, r) = k J_1'(kr) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} J_1(kr) \\ M_2(k, r) = k Y_1'(kr) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} Y_1(kr) \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $J_1$ 、 $Y_1$  为一阶第一类和第二类 Bessel 函数,  $k$ 、 $k_n$  为波数。自然频率  $k_n = k_n \cdot c$ , 可由频率方

程<sup>[5]</sup>得到。  $A_n$  由正则化条件<sup>[3-4]</sup>得到。 径向应力和周向应力可由  $u(r, t)$  求出。 特征函数解法是考虑弹性波作用的有效方法之一<sup>[6]</sup>, 单个厚壁长圆筒波动方程的特征函数解法是本文的基础。

在双层厚壁间隙长圆筒的轴对称弹性碰撞问题中, 两筒初始位移、 初始速度为零, 仅内筒内壁受爆炸载荷  $p_1(t)$  的作用。 当两筒处于碰撞接触时, 在两筒接触的界面上, 将产生轴对称的界面碰撞压力, 内筒外壁和外筒内壁将共同受到它的作用。 而当两筒处于分离阶段时, 界面上不受载。 为研究方便, 可设分离阶段的界面碰撞压力为零, 见后面的图 1, 并设轴对称界面碰撞压力为  $p_2(t)$ 。 设  $u_i(r, t)$ 、  $u_o(r, t)$ 、  $U_{n_i}(r)$  和  $q_{n_i}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) 分别代表内筒和外筒相应的径向动态位移、 准静态位移解、 特征函数及时间函数,  $k_{n_1}$ 、  $k_{n_2}$  分别代表内筒和外筒的自然频率, 它们都可按单个厚壁长圆筒的求解方式, 代入相应的边界条件和初始条件后求出。

在爆炸载荷  $p_1(t)$  产生的压力波作用下, 内筒最先振荡。 当内筒外壁位移  $u_1(b_1, t)$  第一次达到  $\Delta$  的量值时, 两筒发生首次碰撞, 第一次碰撞开始时间  $t_1$  就由此而定。 碰撞在界面上产生了轴对称界面碰撞压力波, 该压力波传入外筒, 引起外筒的振荡。 通常, 两筒之间会发生多次的碰撞接触, 且每次持续不同的时间。 爆炸载荷产生的能量, 先被内筒吸收, 然后经界面碰撞施加给外筒。 两筒吸收能量的多少, 受到了包括间隙量和多次碰撞过程在内的多方面因素的影响。 在相互碰撞的过程中, 能量在两筒间相互传递、 变化着, 其特性有别于单次碰撞问题<sup>[7]</sup>。 我们着重研究轴对称界面碰撞压力, 暂不对此作进一步的分析。

另外, 实际情况中, 轴对称弹性波的幅值会因振动阻尼和材料粘弹性的作用而逐步衰减。 衰减效应对后续碰撞过程的影响较大, 而对前几次碰撞过程的影响相对较小。 因此, 就结构强度而言, 前几次碰撞过程是主要的。 为简便起见, 我们着重研究前几次弹性碰撞过程, 并忽略振动阻尼和材料粘弹性的影响。

为研究方便, 设置无量纲参量:  $p_{2e}(t) = p_2(t) / \rho_0 c^2$ 、  $\epsilon_r(r, t) = \epsilon_r(r, t) / \rho_0 c^2$ 、  $\epsilon_\theta(r, t) = \epsilon_\theta(r, t) / \rho_0 c^2$  ( $\epsilon_\theta(r, t)$  为周向应力),  $T = t \cdot c / (b_2 - a_1)$  和单位均为  $m^3 / N$  的参量:  $\Delta_e = (\Delta / \rho_0 c^2) \times 10^{12}$ 、  $u_e(r, t) = [u(r, t) / \rho_0 c^2] \times 10^{12}$ , 其中  $p_{2e}(t)$  被称为等效轴对称界面碰撞压力。

在每两次碰撞接触过程之间, 两筒处于分离状态。 令  $t_{2N-1}$  和  $t_{2N}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) 分别代表第  $N$  次碰撞和第  $N$  次分离的开始时间, 显然  $t_{2N-1}$  还代表第  $N-1$  次分离结束的时间,  $t_{2N}$  还代表第  $N$  次碰撞结束的时间。 由图 1(a) 知, 界面碰撞压力  $p_2(t)$  可设为

$$p_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \bar{t}_{2-1} \\ P_{21}(\hat{t}_1) & \bar{t}_{2-1} \leq t \leq \bar{t}_{21} \\ 0 & \bar{t}_{21} \leq t \leq \bar{t}_{2-2} \\ \dots & \dots \\ P_{2N}(\hat{t}_N) & \bar{t}_{2N-1} \leq t \leq \bar{t}_{2N} \\ 0 & \bar{t}_{2N} \leq t \leq \bar{t}_{2N-1} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad \hat{t}_N = t - t_{2N-1} \quad (5)$$

两筒的轴对称弹性碰撞条件是: 在分离阶段, 若两筒的相对位移变小直至零, 则发生下一次碰撞, 由此可确定  $t_{2N-1}$ 。 两筒的分离条件是: 在碰撞接触阶段, 若界面碰撞压力变小直至零, 则发生下一次分离, 由此可确定  $t_{2N}$ 。 在每次碰撞接触阶段, 内筒外壁的动态位移  $u_1(b_1, t)$  和外筒内壁的动态位移  $u_2(a_2, t)$  满足协调条件

$$u_1(b_1, t) = u_2(a_2, t) + \Delta \quad (6)$$

$u_1(b_1, t)$ 和  $u_2(a_2, t)$ 中包含有  $p_2(t)$ 项, 亦即包含了  $P_{2N}(\hat{t}_N)$ 项。若对式 (6)采用 Laplace 变换, 可求出  $P_{2N}(\hat{t}_N)$ , 进而求出  $p_2(t)$ 。

为此, 对 (6)式作针对  $\hat{t}_N$  的 Laplace 变换, 该 Laplace 变换以位移分量为例可表示为

$$\bar{u}_1(r, s) = \int_0^\infty u_1(r, \hat{t}_N + t_{2N-1}) e^{-s\hat{t}_N} d\hat{t}_N \tag{7}$$

则 (6)式变为

$$\bar{u}_1(b_1, s) = \bar{u}_2(a_2, s) + \frac{\Delta}{s} \tag{8}$$

由式 (4)可得

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{q}_{n_1}(s) &= \mathfrak{A} \int_{a_1}^{b_1} u_{01}(r) U_{n_1}(r) r dr \frac{s}{k_{n_1}^2 + s^2} + 2 \int_{a_1}^{b_1} v_{01}(r) U_{n_1}(r) r dr \frac{1}{k_{n_1}^2 + s^2} - \\ &\quad \mathfrak{A} \int_{a_1}^{b_1} h_1(r, a_1, b_1) U_{n_1}(r) r dr \frac{s^2}{k_{n_1}^2 + s^2} \bar{p}_1(s) - \\ &\quad \mathfrak{A} \int_{a_1}^{b_1} h_2(r, a_1, b_1) U_{n_1}(r) r dr \frac{s^2}{k_{n_1}^2 + s^2} \bar{P}_{2N}(s) \\ &= C_{n_1} \frac{s}{k_{n_1}^2 + s^2} + C_{n_2} \frac{1}{k_{n_1}^2 + s^2} + C_{n_3} \frac{s^2}{k_{n_1}^2 + s^2} \bar{p}_1(s) + C_{n_4} \frac{s^2}{k_{n_1}^2 + s^2} \bar{P}_{2N}(s) \\ \bar{q}_{n_2}(s) &= \mathfrak{A} \int_{a_2}^{b_2} u_{02}(r) U_{n_2}(r) r dr \frac{s}{k_{n_2}^2 + s^2} + \mathfrak{A} \int_{a_2}^{b_2} v_{02}(r) r U_{n_2}(r) dr \frac{1}{k_{n_2}^2 + s^2} - \\ &\quad \mathfrak{A} \int_{a_2}^{b_2} h_1(r, a_2, b_2) U_{n_2}(r) r dr \frac{s^2}{k_{n_2}^2 + s^2} \bar{p}_{2N}(s) \\ &= D_{n_1} \frac{s}{k_{n_2}^2 + s^2} + D_{n_2} \frac{1}{k_{n_2}^2 + s^2} + D_{n_3} \frac{s^2}{k_{n_2}^2 + s^2} \bar{p}_{2N}(s) \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$(u_{0i}(r) = u_i(r, \hat{t}_{2N-1}), \quad v_{0i}(r) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(r, \hat{t}_{2N-1}), \quad i = 1, 2)$$

由 (3)和 (4)式可知

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(b_1, \hat{t}_N + t_{2N-1}) &= h_1(b_1, a_1, b_1) p_1(\hat{t}_N + t_{2N-1}) + h_2(b_1, a_1, b_1) P_{2N}(\hat{t}_N) + \\ &\quad \sum_n U_{n_1}(b_1) q_{n_1}(\hat{t}_N) \\ u_2(a_2, \hat{t}_N + t_{2N-1}) &= h_1(a_2, a_2, b_2) P_{2N}(\hat{t}_N) + \sum_n U_{n_2}(a_2) q_{n_2}(\hat{t}_N) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

$$(\mathbf{0} \leq \hat{t}_N \leq t_{2N} - t_{2N-1})$$

因此

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{P}_{2N}(s) &= A(s) B(s) \\ A(s) &= \left[ h_1(b_1, a_1, b_1) + \sum_n U_{n_1}(b_1) C_{n_3} \frac{s^2}{k_{n_1}^2 + s^2} \right] \bar{p}_1(s) + \sum_n U_{n_1}(b_1) \left( C_{n_1} \frac{s}{k_{n_1}^2 + s^2} + \right. \\ &\quad \left. C_{n_2} \frac{1}{k_{n_1}^2 + s^2} \right) - \sum_n U_{n_2}(a_2) \left( D_{n_1} \frac{s}{k_{n_2}^2 + s^2} + D_{n_2} \frac{1}{k_{n_2}^2 + s^2} \right) - \frac{\Delta}{s} \\ B(s) &= h_1(a_2, a_2, b_2) - h_2(b_1, a_1, b_1) + \sum_n \left[ U_{n_2}(a_2) D_{n_3} \frac{s^2}{k_{n_2}^2 + s^2} - U_{n_1}(b_1) C_{n_4} \frac{s^2}{k_{n_1}^2 + s^2} \right] \end{aligned} \right. \tag{11}$$

式中  $\bar{p}_1(s) = e_0 e^{-T_{2N-1}} \frac{1}{s + T}$  (11) 式中的极点除  $-T$  和  $0$  外, 还存在一系列的极点, 它们是非线性方程  $B(s) = 0$  的点 ( $\pm k_{n_1} i \pm k_{n_2} i$  除外, 它们是可去奇点), 可以通过求解该非线性方程确定。数值计算表明, 当  $\Delta/b_1$  远小于 1 时, 这些极点的数值与内径为  $a_1$ 、外径为  $b_2$  的厚壁长圆筒的自然频率误差极小。令它们为  $\pm k_{n_r} i$  可以证明  $P_{2N}(s)$  满足展开定理, 通过残数展开得

$$\left\{ \begin{aligned} P_{2N}(\hat{t}) &= K_{N_0} + K_{N_1} e^{-T\hat{t}} + \sum_{n=1}^M [2F_{N_1}^n \cos(k_{n_r} \hat{t}) - 2F_{N_2}^n \sin(k_{n_r} \hat{t})] \\ K_{N_0} &= - \frac{\Delta}{h_1(a_2, a_2, b_2) - h_2(b_1, a_1, b_1)} \\ K_{N_1} &= \frac{\left[ h_1(b_1, a_1, b_1) + \sum_n U_{n_1}(b_1) C_{n_3} \frac{T^2}{k_{n_1}^2 + T} \right] e_0 e^{-T_{2N-1}}}{B(-T)} \\ F_{N_1}^n + iF_{N_2}^n &= \frac{A(k_{n_r} i)}{dB(s)/ds|_{s=k_{n_r} i}} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$(t_{2N-1} \leq \hat{t} \leq t_{2N} \text{ 或 } 0 \leq \hat{t} \leq t_{2N} - t_{2N-1})$

式中  $M$  为截项。至此可求出  $P_{2N}(\hat{t})$ , 并可逐次循环地按下面步骤求出  $p_2(t)$ :

- (1) 根据分离条件确定  $t_{2(N-1)}$ , 并计算  $u_i(r, \bar{t}_{2(N-1)})$  和  $v_i(r, \bar{t}_{2(N-1)})$ ;
- (2) 计算第  $N-1$  次分离状态时的  $u_i(r, t)$  和  $v_i(r, t)$ ;
- (3) 根据碰撞条件确定  $t_{2N-1}$ , 并计算  $u_i(r, \bar{t}_{2N-1})$  和  $v_i(r, \bar{t}_{2N-1})$ ;
- (4) 利用公式 (6) 至 (12) 计算  $P_{2N}(\hat{t})$ ;
- (5) 计算第  $N$  次碰撞接触过程中的  $u_i(r, t)$  和  $v_i(r, t)$ 。

### 3 轴对称界面碰撞压力计算结果

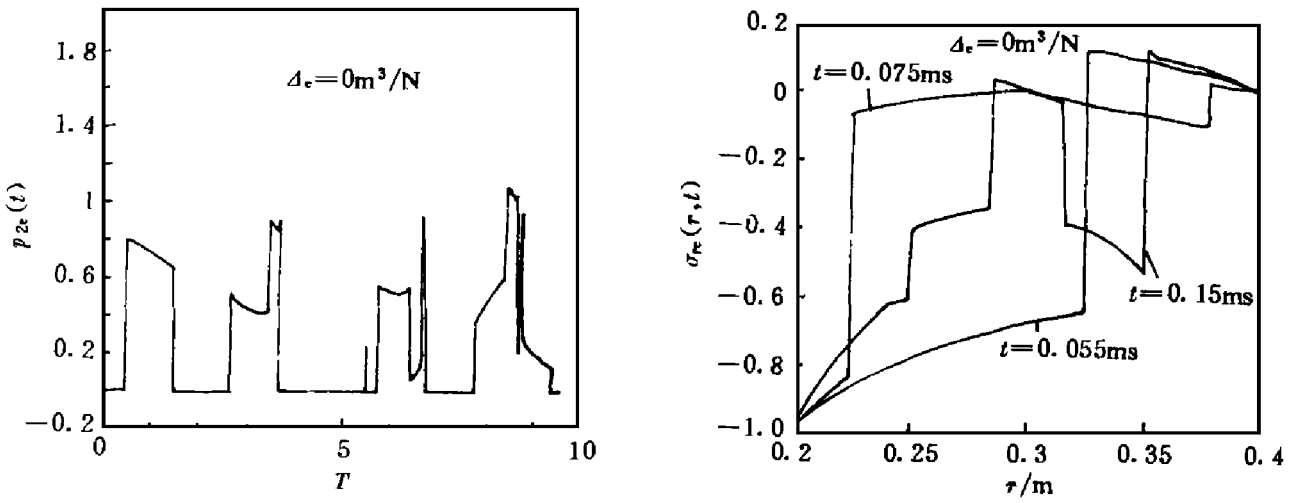
图 1(a) 给出了一个典型的轴对称界面碰撞压力曲线。图 1(b) 给出了  $t = 0.055\text{ms}$  ( $1.375T_0$ )、 $0.075\text{ms}$  ( $1.875T_0$ )、 $0.15\text{ms}$  ( $3.75T_0$ )、( $T_0 = (b_2 - a_1)/c$ ) 时, 双层厚壁间隙长圆筒中径向应力分布情况。图 1(a) 中各有关碰撞和分离时间为:  $t_1 = 0.5T_0$ ,  $t_2 = 1.61T_0$ ,  $t_3 = 2.675T_0$ ,  $t_4 = 3.675T_0$ ,  $t_5 = 5.45T_0$ 。

$t = 0.055\text{ms}$  处于第一次碰撞过程中。由于两筒材料相同, 第一次轴对称界面碰撞压力波是由爆炸载荷形成的柱面压力波, 经界面完全透射而形成的。 $t = 0.055\text{ms}$  时, 第一次轴对称界面碰撞压力波经外筒外壁反射成拉伸波后, 波前已到达  $r = 0.325\text{m}$  处, 并与后续的压力波叠加, 形成图 1(b) 所示的情形。 $t = 0.075 \sim 0.15\text{ms}$  时, 分别处于第一次和第二次分离过程中。图 1(b) 清楚地显示了第一次和第二次轴对称界面碰撞弹性波的波前位置、传播及相互作用情况。图 1(b) 还表明, 前面碰撞所产生的轴对称界面碰撞压力波, 对后续碰撞过程继续施加着影响, 因此, 多次碰撞过程应是复杂多变的。另外, 图 1(b) 中径向应力在外筒外壁、及分离过程中在界面上为零, 符合边界条件要求和分离过程中界面碰撞压力为零的假设。

通过图 1 可看出, 考虑轴对称弹性波的影响, 可进一步分析双层厚壁间隙长圆筒的多次轴对称弹性碰撞问题。

另外, 由式 (3)~ (13) 可以证明: 当两筒初始状态为静止, 边界条件、所受外载荷构形 (即  $T$ )、材料和结构参数不变时, 若  $\Delta/b_1 \ll 1$ , 则相同  $\Delta$  下 (即  $\Delta/c_0$ ) 轴对称弹性碰撞引起的等效轴

对称界面碰撞压力  $p_{2c}(t)$  (即  $p_2(t) / \epsilon_0$ ) 相同。等效的内容包括相同时间内的碰撞次数、每次碰撞和分离开始的时间、每次轴对称界面碰撞压力构形以及  $p_{2c}(t)$  的数值。因此, 本文各图中所给出的结果, 对于不同的幅值  $\epsilon_0$ , 仍是有效的。



(a) 轴对称界面碰撞压力曲线 (b) 三时刻径向应力分布情况  
 (a) Evolution of interface impact pressure (b) Distributions of radial stress

图 1 轴对称界面碰撞压力曲线和径向应力分布情况

$$(a_1= 0.2m, b_1= 0.3m, b_2= 0.4m, \epsilon_0= 300MPa, T= 50s^{-1}, T= tc/(b_2 - a_1))$$

Fig 1 Evolution of axisymmetric interface impact pressure and distributions of radial stress

$$(a_1= 0.2m, b_1= 0.3m, b_2= 0.4m, \epsilon_0= 300MPa, T= 50s^{-1}, T= tc/(b_2 - a_1))$$

对于已给出的结构参数和材料参数, 选取幅值  $\epsilon_0= 300MPa$  衰减系数  $T$  为  $50s^{-1}$ , 计算间隙量  $\Delta$  为  $0 \sim 1.376mm$ , 即  $\Delta_c$  为  $0 \sim 4.585m^3/N$  时, 轴对称界面碰撞压力的变化情况。图 2 给出了  $\Delta_c$  为  $0.15345455m^3/N$  时的  $p_{2c}(t)$  曲线。当间隙量大于  $1.376mm$  后, 两筒将不产生碰撞。

由图 2 可知, 最大的轴对称界面碰撞压力, 并不一定出现在首次碰撞过程中, 前几次碰撞过程中都可能出现较大的轴对称界面碰撞压力。另外, 每次碰撞延续的时间变化较大, 首次碰撞也未必持续最长的时间。不过碰撞次数、碰撞密度和总体碰撞接触时间, 大体上随着间隙量的变小而增加。可以预计, 在零间隙量下, 两筒的弹性无阻尼碰撞将随时间的推移一直持续下去。随着间隙量的增加, 碰撞次数减少, 直至不碰撞。计算表明, 当  $\Delta_c= 4.53454455m^3/N$  时的碰撞数分别为三次、二次和一次。另外, 随着间隙量的增加, 第一次碰撞的开始时间逐渐后移, 碰撞接触过程逐步缩短。

图 2 中较复杂的轴对称界面碰撞压力构形, 也必然反映在动态响应上。图 3(a) 给出了  $\Delta_c= 0.1m^3/N$  时, 外筒外壁的径向应力和周向应力曲线。显然, 径向应力满足边界条件。各次碰撞的结果使周向应力开始出现了次振荡。图 3(b) 为三种间隙量下, 外筒外壁的动态位移曲线, 该图表明, 在较小间隙量下将产生整体上较大的外筒外壁的动态位移量; 在较大间隙量下, 如在  $\Delta_c= 4.5m^3/N$ , 其较低的碰撞密度、较少的碰撞次数不仅会降低动态位移的量值, 而且还会导致动态位移在型式上的区别。这说明动力响应中, 包含着各种与碰撞有关的信息, 尤其是与间隙量有关的信息。

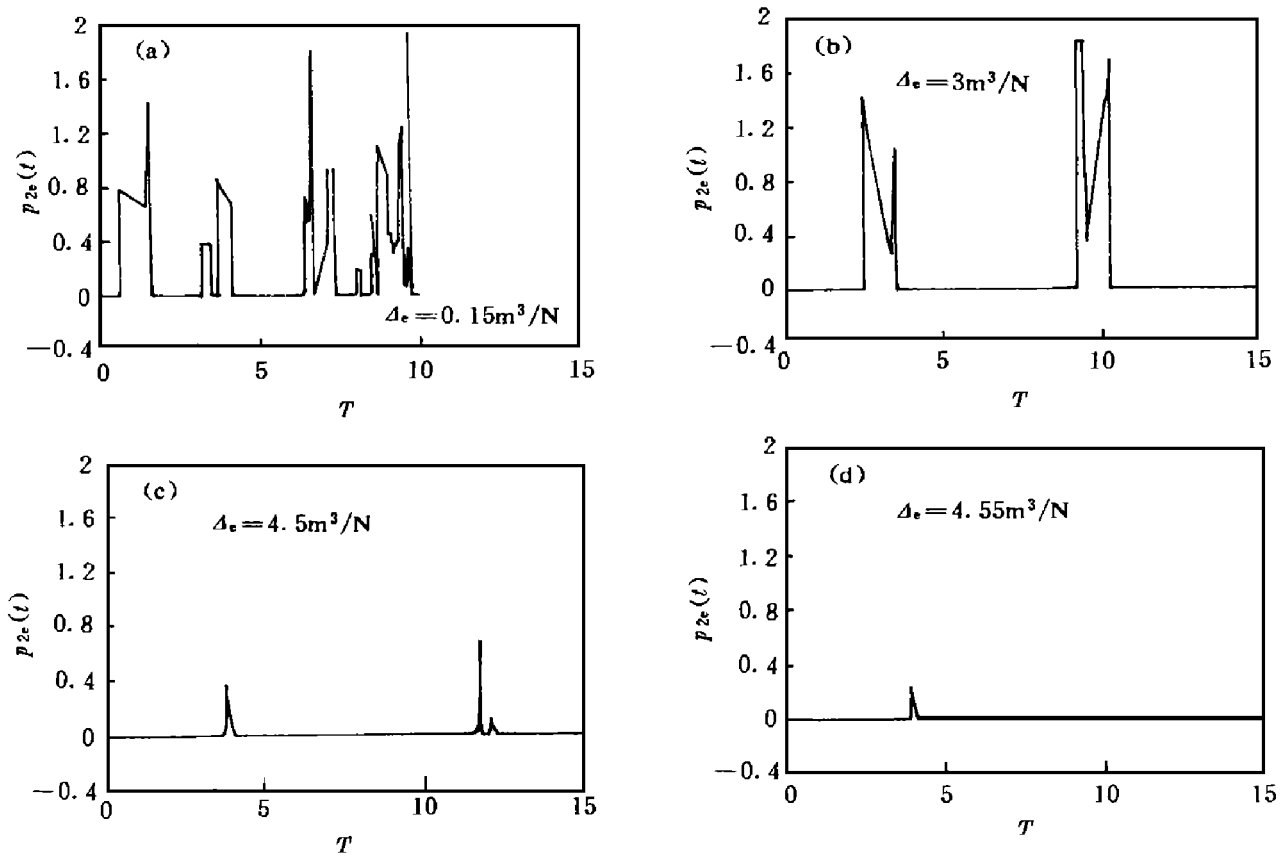
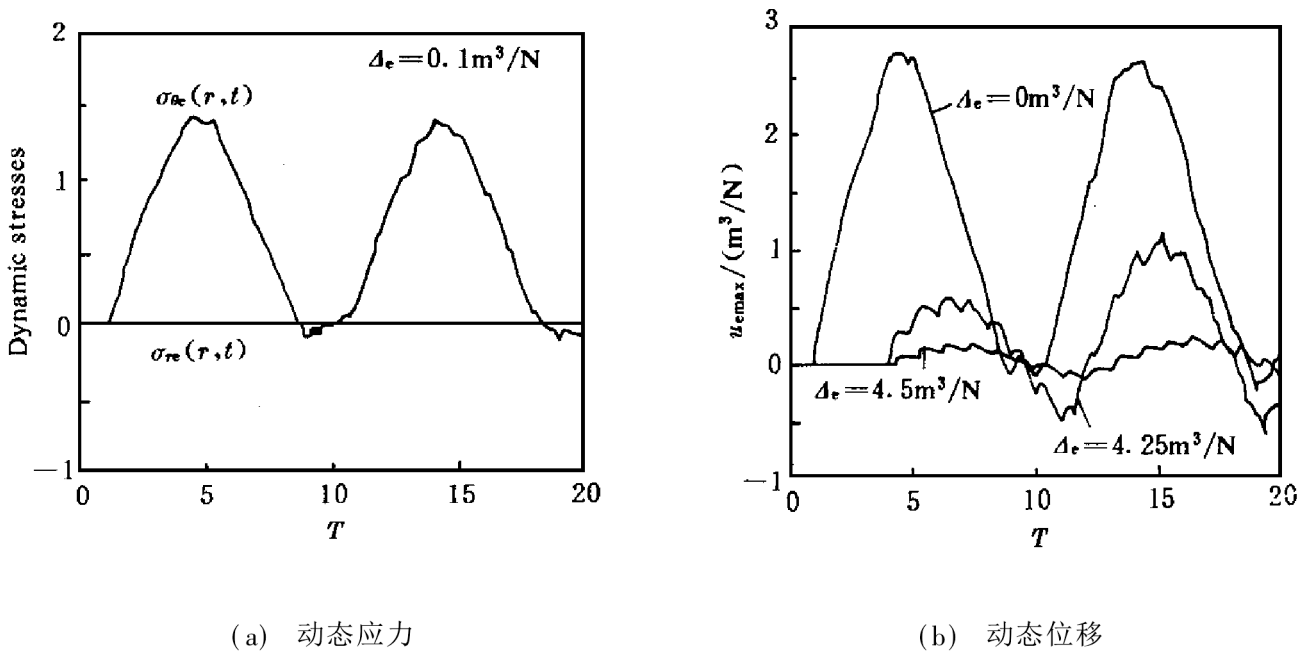


图 2 不同间隙量下的界面碰撞压力 ( $e_0 = 300 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $T = t c / (b_2 - a_1)$ )

Fig 2 Evolution of axisymmetric interface impact pressure for four clearances ( $e_0 = 300 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $T = t c / (b_2 - a_1)$ )



(a) 动态应力

(b) 动态位移

(a) Radial stress and tangential stress

(b) Radial displacements

图 3 外筒外壁的动态应力和动态位移 ( $e_0 = 300 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $T = t c / (b_2 - a_1)$ )

Fig 3 Evolution of dynamic stresses and displacements for outer boundary surface of outer hollow cylinder ( $e_0 = 300 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $T = t c / (b_2 - a_1)$ )

图 4 给出了  $\epsilon_0 = 300 \text{ MPa}$ ,  $T$  为  $5 \ 50 \ 5000 \text{ s}^{-1}$  时, 不同间隙量下, 前四次碰撞过程中, 等效轴对称界面碰撞压力峰值  $P_{2\text{em ax}}$  随  $\Delta_e$  变化的情况. 相对而言, 首次碰撞过程中,  $p_{2\text{em ax}}$  的分布较有规律性. 当  $T$  为  $5 \ 50 \text{ s}^{-1}$ , 间隙量  $\Delta$  为  $0 \sim 0.9 \text{ mm}$ , 即  $\Delta_e$  为  $0 \sim 3 \text{ m}^3/\text{N}$  时,  $P_{2\text{em ax}}$  开始有一个短暂的上升, 之后则变化并不大; 当间隙量  $\Delta$  为  $0.9 \sim 1.376 \text{ mm}$ , 即  $\Delta_e$  为  $3 \sim 4.585 \text{ m}^3/\text{N}$  时,  $p_{2\text{em ax}}$  逐步减弱, 直至为零. 对  $T = 5000 \text{ s}^{-1}$ ,  $p_1(t)$  衰减得很快,  $0.5 \text{ ms}$  后, 其幅值就衰减了  $90\%$  以上, 其  $p_{2\text{em ax}}$  的变化有所不同. 在其首次碰撞过程中,  $p_{2\text{em ax}}$  开始也有一相同的短暂上升阶段, 之后便缓慢降低, 当  $\Delta_e$  在  $2.5 \sim 3.25 \text{ m}^3/\text{N}$  时, 则衰减得较快.

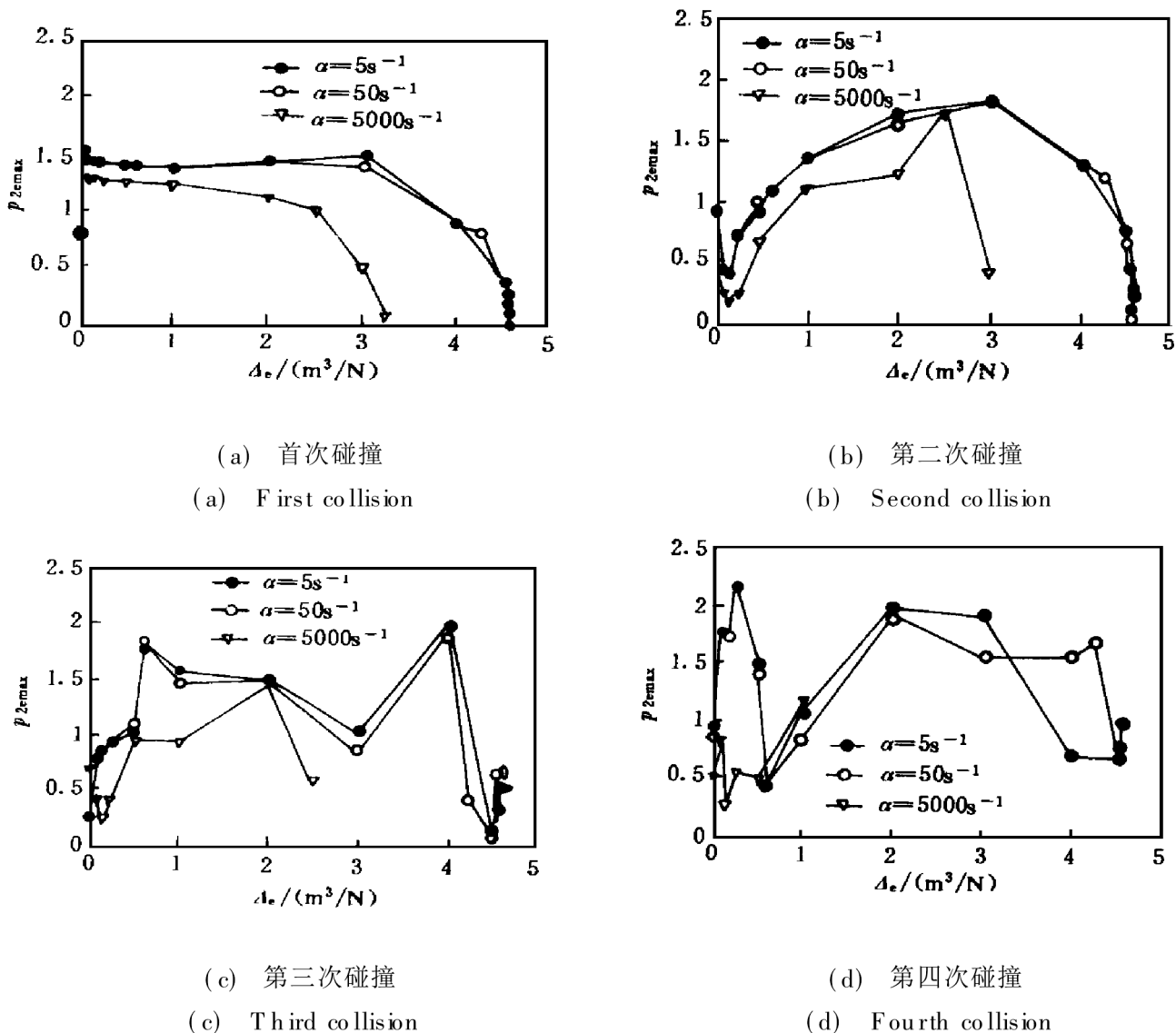


图 4 前四次碰撞过程中的  $p_{2\text{em ax}}$  与  $\Delta_e$  的对应关系 ( $\epsilon_0 = 300 \text{ MPa}$ )

Fig. 4 Relationship between  $p_{2\text{em ax}}$  and  $\Delta_e$  during first four collisions ( $\epsilon_0 = 300 \text{ MPa}$ )

第二次碰撞过程则与首次碰撞过程有较大区别.  $p_{2\text{em ax}}$  开始有短暂的下降阶段. 在  $T$  为  $5 \ 50 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta_e$  为  $0.1 \sim 3 \text{ m}^3/\text{N}$  时, 以及  $T$  为  $5000 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta_e$  为  $0.1 \sim 2.5 \text{ m}^3/\text{N}$  时,  $p_{2\text{em ax}}$  逐步上升, 之后才开始衰减.

第三、四次碰撞的峰值分布缺少规律性. 由于  $T$  越大表明爆炸冲击力度越小, 一般前四次碰撞的等效轴对称界面碰撞压力的峰值  $p_{2\text{em ax}}$  随  $T$  的增加而降低, 但当间隙量较小或较大时, 由于碰撞性质变化大而复杂化. 由图 4 可知, 当  $T$  为  $5 \ 50 \text{ s}^{-1}$  时, 前四次碰撞的界面碰撞压力峰值分布很接近, 说明界面碰撞压力随  $T$  的变化缓慢. 另外, 当  $T = 5000 \text{ s}^{-1}$  时, 两筒在间隙量大于



0.981mm 后 (即  $\Delta_e > 3.27 \text{ m}^3/\text{N}$  后), 将不产生碰撞。因此, 它的等效界面碰撞压力峰值随间隙量衰减得更快。

图 5 给出了  $\sigma_0 = 30 \text{ MPa}$ ,  $a$  为  $5 \sim 5000 \text{ s}^{-1}$ ,  $T = 0 \sim 40$  时  $[T = t c / (b_2 - a_1)]$  外筒外壁的最大动态位移  $u_{\text{emax}}$  随等效间隙量参数  $\Delta_e$  变化的情况。当  $T$  为  $5 \sim 50 \text{ s}^{-1}$  时  $u_{\text{emax}}$  很接近。随着间隙量的增加, 三种  $T$  下的  $u_{\text{emax}}$  基本上是逐渐衰减的, 并有一定的规律性。但当  $T$  为  $5000 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta_e$  为  $0 \sim 1.0 \text{ m}^3/\text{N}$  时, 及  $T$  为  $5 \sim 50 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta_e$  为  $0.5 \sim 1.0 \text{ m}^3/\text{N}$  时,  $u_{\text{emax}}$  反而随着  $\Delta_e$  的增加而增加。这再次说明了多次碰撞问题的复杂性。

值得注意的是, 由于图 5 是以无量纲参量  $u_{\text{emax}}$  和等效间隙参量  $\Delta_e$  表示的, 通过适当的转换, 图 5 不仅可给出在固定  $\sigma_0$  下,  $u_{\text{emax}}$  与间隙量  $\Delta$  之间的初步关系, 而且还可给出在固定  $\Delta$  下,  $u_{\text{emax}}$  与  $\sigma_0$  的初步关系 (即在某种程度上的  $u_{\text{emax}}$  与  $p_1(t)$  之间的初步关系)。

综合图 1~5 这些碰撞属强加载方式, 并在轴对称弹性波的作用下, 变得较为复杂, 使得结构的动态响应对包括间隙量在内的结构参数、材料参数、载荷信息等较为敏感。其复杂多变的特性仍有待于进一步研究。

## 4 结 论

利用 Laplace 变换, 考虑轴对称弹性波的影响, 对双层厚壁间隙长圆筒的轴对称弹性碰撞问题作了初步的研究。根据已得到的若干计算和分析结果, 可得出以下的初步结论:

(1) 图 1、2 表明, 在每次碰撞过程中, 轴对称界面碰撞压力一开始均有陡峭的上升阶段, 因此, 碰撞属于强加载方式, 有必要考虑轴对称弹性波的影响。

(2) 两筒之间的碰撞次数、碰撞密度、每次碰撞的开始与结束时间, 以及轴对称界面碰撞压力构形与幅值, 均受到内筒所受内压的幅值、衰减程度 (内压构形) 和间隙量的影响。

(3) 图 1、2、4 表明, 最大的轴对称界面碰撞压力不一定发生在首次碰撞过程中。前几次碰撞过程中, 均可能有较大的量值。在本文的简化下, 对具体问题的参数组合情况, 多次轴对称弹性碰撞问题是可以计算的。

(4) 间隙量对碰撞特性的影响较为显著, 并在动力响应中有所体现。

(5) 在一定条件下, 当  $\Delta/b_1 \ll 1$  时, 相同的  $\Delta/\sigma_0$ , 其  $p_2(t)/\sigma_0$  构形相同。

(6) 图 5 给出了  $T$  在  $0 \sim 40$  时 ( $T = t c / (b_2 - a_1)$ ), 外筒外壁最大径向动态位移与间隙量以及爆炸载荷幅值之间的初步的对应关系。

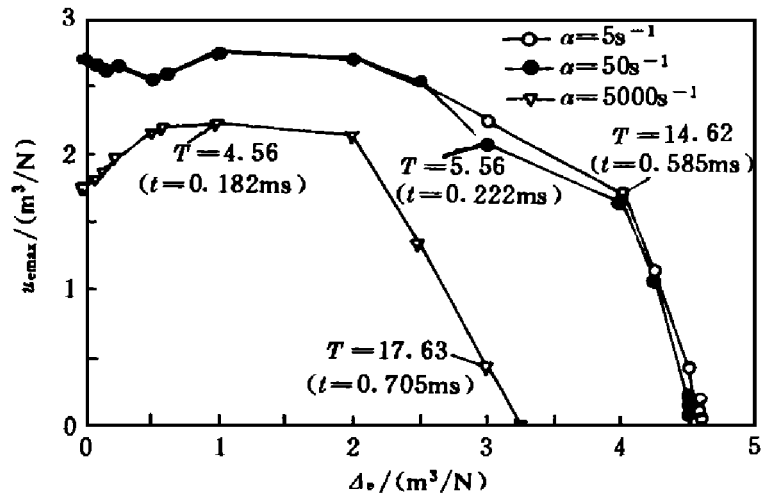


图 5  $T = 0 \sim 40$  时外筒外壁最大动态位移值  $u_{\text{emax}}$  与  $\Delta_e$  的对应关系 ( $\sigma_0 = 30 \text{ MPa}$ ,  $T = t c / (b_2 - a_1)$ )  
Fig. 5 Plots of  $u_{\text{emax}}$  vs  $\Delta_e$  at outer boundary surface of outer hollow cylinder ( $\sigma_0 = 30 \text{ MPa}$ ,  $T = t c / (b_2 - a_1)$ )

## 参 考 文 献

- 1 Dubow sky S, Gardner T N. Dynam ic Interactions of Link Elasticity and Clearance Connections in Planar Mechanical System s Journal of Engineering for Industry, 1975, 97B: 652~ 661
- 2 Budd C, Dux F, Cliff C. The Effect of Frequency and Clearance Variations on Single-degree-of-freedom Impact Oscillators Journal of Sound and V ibration, 1995, 184: 475~ 502
- 3 Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynam ics, VOL. 2 Linear Theory. New York: Academic Press, 1975
- 4 Gong Yun ing, Wang X. Radial V ibrations and Dynam ic Stresses in Elastic Hollow Cylinder: Structural Dynam ics Recent Advances England: Elsevier Science Publication Ltd, 1991
- 5 Gazis D C. Exact Analysis of the Plain Strain V ibration of Thick-w all Hollow Cylinders The Journal of Acoustical Society of American, 1958, 30: 786~ 794
- 6 Pao Y H. Elastic Waves in Solid Journal of Applied M echanics, 1983, 50: 1152~ 1164
- 7 Stoianovici D, Hum uzlu Y. A Critical Study of the Applicability of Rigid-body Collision Theory. Journal of Applied M echanics, 1996, 63: 307~ 316

## EFFECT OF CLEARANCE ON ELASTIC WAVES IN TWO COAXIAL THICK-WALLED HOLLOW CYLINDERS SUBJECTED TO AN INTERNAL EXPLOSION LOADING

Y in X iaochun, Feng S iyan, Gong Y uning

(*N anjing University of Science and Technology, N anjing, 210014*)

**ABSTRACT** A x isymm etric problem of elastic waves is investigated for a system, consisting of two coaxial thick-w alled hollow cylinders with initial clearance. Waves are generated by an interior explosion loading, which decays with time with different rates. The two cylinders have the same material properties, and only radial displacement is considered. Analytical expressions for waves are derived using eigenfunctions and Laplace transform. Emphasis is on the waves generated, when the clearance vanishes several times at first. When geometric, elastic and loading parameters are given, the pressure and velocity may be calculated readily. A series of examples are presented to give a notion about the wave phenomena and maximum pressure inside the cylinders.

**KEY WORDS** impact pressure, clearance, Laplace transform, stress waves