

# 二维时 空守恒格式及其在激波传播计算中的应用\*

张增产

(清华大学工程力学系 北京 100084)

**摘要** 将改进后的一维时 空守恒格式推广到了二维情形,得到了一个新的一般形式的二维 Euler 方程时 空守恒格式,并用该格式对几个具有复杂波系的流场进行了数值模拟。结果表明,该格式保留了一维格式通用性好、结构简单的优点,其计算结果精度高,对激波等间断具有很强的分辨率。

**关键词** 二维 Euler 方程 守恒元和解元 数值方法 激波分辨率  
**中图法分类号** O 351. 2

## 1 引 言

如何对具有各种复杂波系的流场进行准确的数值模拟,一直是计算流体力学领域中的一个研究重点。自 80 年代初以来,人们提出了许多很好的高精度、高分辨率格式(如 TVD 格式、ENO 格式等),用来计算带有各种间断(尤其是具有激波等强间断)的复杂流场,并取得了巨大的成功。但是这些格式的构造一般都比较复杂,通用性不强,不便于实际应用。为此, S. C. Chang<sup>[1]</sup>在 1995 年提出了一种全新的数值方法——时 空守恒元和解元方法(简称‘CE/SE’方法),与传统的数值方法相比,该方法有不少独特的优点:它的格式构造思想简单、通用性好;它不仅可用来求解连续流动问题,而且可以用来求解含有激波等间断的不连续问题,其高分辨率的数值结果甚至比目前许多流行方法的结果还好。正因为如此,该方法越来越受到人们的重视。但是,当该方法推广到高阶格式及多维情形(尤其是三维)时既困难又复杂,为此,我们对其进行了改进<sup>[2~4]</sup>。改变了原格式的构造方法,由此得到的新格式既保留了原方法的优点,同时格式又更加简单,通用性更强,而且很容易推广到高阶格式及多维情形。我们将文献[2~4]中经过改进后的一维时 空守恒格式推广到了二维情形,得到了一个一般形式的二维 Euler 方程时 空守恒格式,该格式具有很大的灵活性,可用于各种不规则几何区域中的流动问题计算。网格布局非常自由。最后,应用该格式对几个具有复杂波系的流动问题进行了检验计算,其计算结果与已有结果符合很好,而所用网格及计算量都要小得多。

## 2 二维时 空守恒格式

这里直接以二维 Euler 方程组为例来导出二维时 空守恒格式。首先,完全气体二维非定

\* 国家自然科学基金资助(批准号 19602010)。

张增产:男,1961年生,博士,副教授。

1997-08-12收到原稿,1998-07-06收到修改稿。

常 Euler方程组的无量纲形式可写成

$$\partial u_m / \partial t + \partial f_m / \partial x + \partial g_m / \partial y = 0 \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

令  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t$  代表 Euclidean 空间  $E_3$  中的三个坐标, 利用 Gauss 散度定理可知, 微分方程 (1) 可写成为如下积分型守恒律方程形式

$$\oint_{S(V)} h_m \cdot dS = 0 \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

其中:  $S(V)$  是  $E_3$  中任一区域  $V$  的边界,  $h_m = (f_m, g_m, u_m)$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  分别是时间-空间中的质量、动量和能量的流密度向量。

设在  $x-y$  平面上的网点布局如图 1 所示, 它含有两类点, 即计算网格点  $\{A_i\}$  和非计算网格点  $\{B_i\}$ , 各个网点位置设计很自由, 它可以根据不同问题的具体要求来合理地进行网格布置。这里用  $K$  代表所有计算网格点的集合, 它又可以分成两类: 一类由图中叉点组成, 其集合用  $K_1$  来表示; 另一类由图中的空心圆点组成, 用  $K_2$  来表示,  $K = K_1 \cup K_2$ 。它们分别表示两个不同时间半层上的网格点 (不妨假设空心圆点为第  $n$  层上的点, 叉点为  $n-1/2$  层上的点), 它们在空间方向是相互交错的。用  $A$  表示与  $A$  点相应的八边形  $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4 B_4$  的几何重心点,  $K$  中每一个网格点相应的八边形几何重心点组成的集合用  $\tilde{K}$  来表示。对于  $K$  中的每一个点 (如图中  $A$  点) 设有一个解元  $SE(A, n)$  和一个守恒元  $CE(A, n)$  与之相应 (见图 2), 其中解元  $SE(A, n)$  取图中六面体  $B'_1 B'_2 B'_3 B'_4 B''_1 B''_2 B''_3 B''_4$  再加上由八边形  $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4 B_4$  构成的平面, 而守恒元  $CE(A, n)$  则为图中上下两个八边形组成的十面体  $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4 B_4 A'_1 B'_1 A'_2 B'_2 A'_3 B'_3 A'_4 B'_4$ 。

在每一个解元中, 可以用不同函数  $u_m^*, f_m^*$  及  $g_m^*$  来逼近方程中相应的  $u_m, f_m$  及  $g_m$ , 这里采用的是最简单的一阶台劳展开式来进行逼近, 即在解元  $SE(A, n)$  中, 取

$$u_m^*(A, n) = (u_m)_A^n + (u_{mx})_A^n (x - \bar{x}_A) + (u_{my})_A^n (y - \bar{y}_A) + (u_{mt})_A^n (t - \bar{t}) \quad (3)$$

$$f_m^*(A, n) = (f_m)_A^n + (f_{mx})_A^n (x - \bar{x}_A) + (f_{my})_A^n (y - \bar{y}_A) + (f_{mt})_A^n (t - \bar{t}) \quad (4)$$

$$g_m^*(A, n) = (g_m)_A^n + (g_{mx})_A^n (x - \bar{x}_A) + (g_{my})_A^n (y - \bar{y}_A) + (g_{mt})_A^n (t - \bar{t}) \quad (5)$$

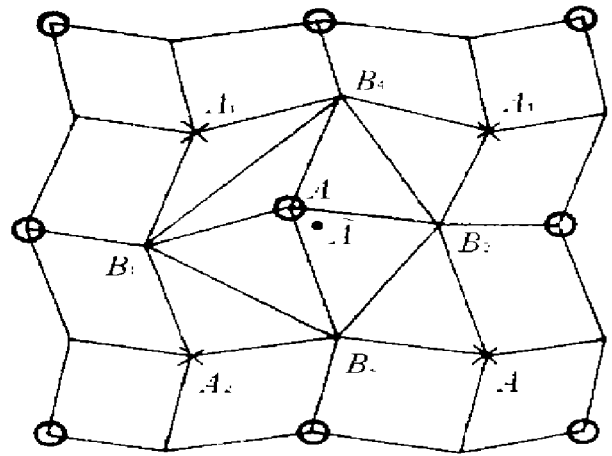


图 1  $x-y$  平面上的网格点布局  
Fig 1 The grids distribution in  $x-y$  plane

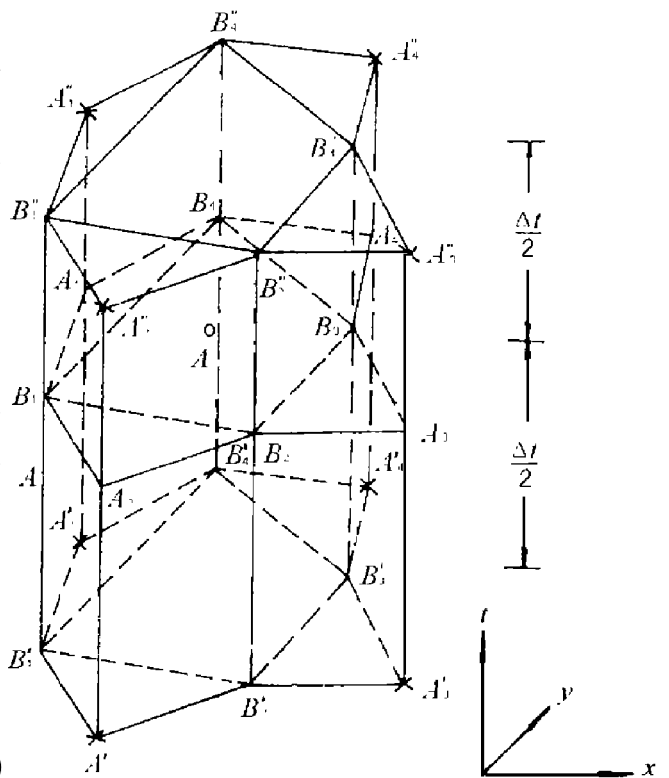


图 2 解元  $SE(A, n)$  和守恒元  $CE(A, n)$  构成  
Fig 2 The  $SE(A, n)$  and  $CE(A, n)$

相应地可设

$$\mathbf{h}_m^*(A, n) = (f_m^*(A, n), g_m^*(A, n), u_m^*(A, n)) \quad (6)$$

于是方程 (2) 便可以用下式来逼近

$$\oint_{S(\text{CE}(A, n))} \mathbf{h}_m^* \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \forall (A, n) \in K \quad (7)$$

分别将  $u_m = u_m^*(A, n)$ ,  $f_m = f_m^*(A, n)$  和  $g_m = g_m^*(A, n)$  代入方程 (1) 可得

$$(u_{m,t})_A^n = - (f_{m,x})_A^n - (g_{m,y})_A^n \quad (8)$$

由式 (8) 及简单分析不难看出, 在每个网点上最终要求解的变量只有  $u_m$ ,  $u_{m,x}$  和  $u_{m,y}$

将 (3)~ (5) 式代入 (6) 式, 然后一并代入 (7) 式可得

$$(u_m)_A^n = \sum_{k=1}^4 [(S_k(u_m + u_{m,x}(x_{D_k} - x_{\bar{A}_k}) + u_{m,y}(y_{D_k} - y_{\bar{A}_k})) - (Q_1(B_{k-1}, A_k, B_k) - Q_2(B_{k-1}, A_k, B_k)) \cdot \Delta t / 2 \bar{J}_{A_k}^{n-1/2}] / (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \quad (9)$$

其中

$$Q_1(B_{k-1}, A_k, B_k)_{\bar{A}_k} = (y_{B_k} - y_{B_{k-1}}) [f_m + f_{m,x} \left( \frac{x_{B_{k-1}} + x_{A_k}}{2} - x_{\bar{A}_k} \right) + f_{m,y} \left( \frac{y_{B_{k-1}} + y_{B_k}}{2} - y_{\bar{A}_k} \right) + f_{m,t} \frac{\Delta t}{4} - \frac{g_{m,y}(x_{B_k} - x_{A_k})}{2}] \bar{J}_{A_k} \quad (10a)$$

$$Q_2(B_{k-1}, A_k, B_k)_{\bar{A}_k} = (x_{B_k} - x_{B_{k-1}}) [g_m + g_{m,x} \left( \frac{x_{B_{k-1}} + x_{B_k}}{2} - x_{\bar{A}_k} \right) + g_{m,y} \left( \frac{y_{B_{k-1}} + y_{A_k}}{2} - y_{\bar{A}_k} \right) + \frac{g_m \Delta t}{4} - f_{m,y} \frac{y_{B_k} - y_{A_k}}{2}] \bar{J}_{A_k} \quad (10b)$$

式中:  $S_1, S_2, S_3, S_4$  和  $D_k (= D_1, D_2, D_3, D_4)$  分别为四边形  $AB_0A_1B_1, AB_1A_2B_2, AB_2A_3B_3, AB_3A_4B_4$  的面积和几何重心点, 且令  $B_0 = B_4$  接下来令  $u_m^*$  在两个不同的时间半层的解元交接点  $A_1, A_2, A_3$  和  $A_4$  处连续, 便得到

$$(u_{m,x})_A^n = [(y_{A_4} - y_{A_2})(L_{3u_m^+ l_1} + L_{1u_m^- l_1}) - (y_{A_3} - y_{A_1})(L_{4u_m^+ l_2} + L_{2u_m^- l_2})] / L \quad (11a)$$

$$(u_{m,y})_A^n = [(x_{A_3} - x_{A_1})(L_{4u_m^+ l_2} + L_{2u_m^- l_2}) - (x_{A_4} - x_{A_2})(L_{3u_m^+ l_1} + L_{1u_m^- l_1})] / L \quad (11b)$$

其中

$$u_{m l_1}^\pm = \pm ((u_m)_A^n)_{2\pm 1} - (u_m)_A^n / L_{2\pm}; \quad u_{m l_2}^\pm = \pm ((u_m)_A^n)_{3\pm 1} - (u_m)_A^n / L_{3\pm};$$

$$L = (y_{A_4} - y_{A_2})(x_{A_3} - x_{A_1}) - (y_{A_3} - y_{A_1})(x_{A_4} - x_{A_2});$$

$$L_i = ((x_{A_i} - x_{\bar{A}_i})^2 + (y_{A_i} - y_{\bar{A}_i})^2)^{1/2}$$

$$(u_m)_A^n = \{u_m + u_{m,x} \cdot (x_{A_i} - x_{\bar{A}_i}) + u_{m,y} \cdot (y_{A_i} - y_{\bar{A}_i}) + u_{m,t} \cdot \Delta t / 2\} \bar{J}_{A_i}^{n-1/2}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

对于含有激波等间断问题的计算, 可将 (11) 式右端的  $u_{m l_i}^\pm (i = 1, 2)$  用下式来替代, 即取

$$u_{m l_i}^+ = u_{m l_i}^- = W(u_{m l_i}^-, u_{m l_i}^+); \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

这里  $W$  是一个加权平均函数, 其定义如下:

$$(i) \quad W(0, 0) = 0$$

$$(ii) \quad W(x_-, x_+) = [|x_+| |x_-| + |x_-| |x_+|] / [|x_+| + |x_-|] \text{ 当 } |x_+| + |x_-| \neq 0 \text{ 时}$$

这相当于对流场变量的梯度进行了一种简单的限制, 大量的计算结果表明它可以有效地抑制计算过程中的非物理波动 (见后面的算例)

式 (9)和 (11)就是本文得到的一种一般形式的二维 Euler方程时 空守恒格式。这是一个显格式,它具有‘CE/SE’方法的优点:如它可严格保证局部及全局范围的时间-空间统一的物理守恒律;格式所需网格单元少,便于边界处理,而且它还不会因格式精度的提高而增加等。

这里得到的是任意网格划分下的一种二维 Euler方程时 空守恒格式,它具有很好的适用性,可用于各种几何区域中流动问题的计算,边界处理也比较容易,对网格的质量要求也较低。另外,由于该格式把流场变量及其关于空间的偏导数都作为因变量来同时进行求解,所以可方便于边界条件的较精确履行,同时它还可以在不增加网格点数的情况下,有效地提高计算精度。在后面的算例中,出口等边界上采用了简单的外推方法,而在固壁边界上则采用的是反射边界条件。从几个算例的计算结果来看,即使采用这样简单的边界处理方法,其计算结果也已很好了。

假如在 (3)~ (5)式中采用二阶台劳展开式来进行逼近,便可以得到相应于二阶台劳展开式的时 空守恒格式,这里不再一一列出。

### 3 数值结果

这里应用二维时 空守恒格式对几个具有复杂波系的二维非定常流动问题进行检验计算。

算例 1是一个多角激波在一个方盒中的传播问题(爆聚),其中方盒大小为  $-2 \leq x, y \leq 2$  过激波的压比为 10 这里选用了二种初始激波形式,即三角形和四边形,在 多边形内部为低压区,图 3和图 4是应用二维 Euler方程时 空守恒格式得到的数值计算结果(取均匀网格,网点数为  $24 \times 24$ ),图中分别给出了三个不同时刻的密度(压力)等值线图,它清晰地展示了初始阶段激波的发展、演化过程。

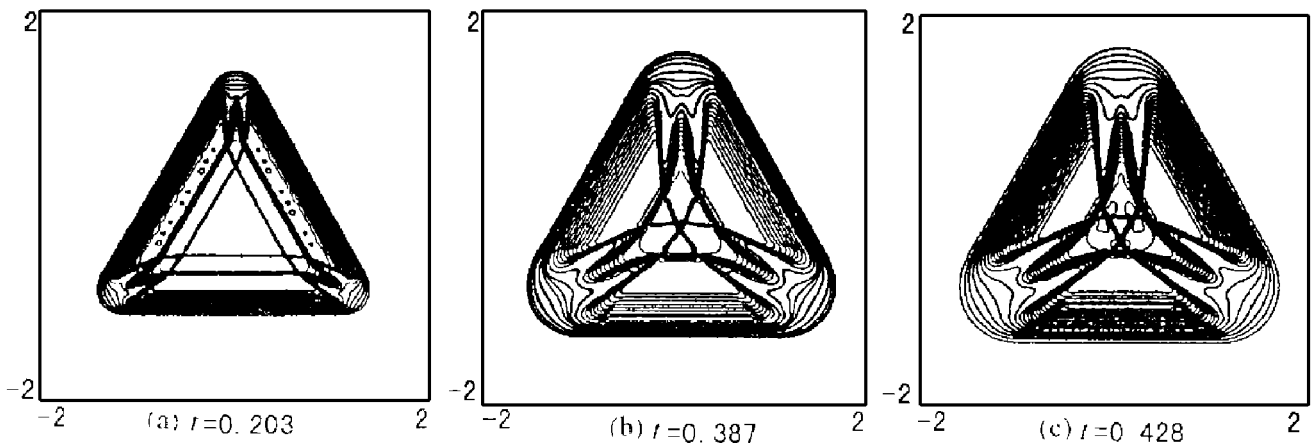


图 3 方盒中多角激波爆聚问题的等密度线图

Fig 3 Density contours for implosion of a polygonal shock in a square box

算例 2是一个激波与运动机翼间的相互干扰问题<sup>[5]</sup>。由于其对称性,这里只取其上半部分作为计算区域,即取  $-0.5 \leq x \leq 2.5$   $0 \leq y \leq 1$ (均以机翼弦长为特征长度),机翼厚度为 10%。首先假设自由来流马赫数  $M_\infty = 2.304907$  计算出机翼绕流流场的定常解,此时在机翼的头部和尾部各有一道斜激波,然后在机翼的前面 ( $x = -0.2$  处)引入一道正激波,其强度与文献 [6] 相同,该激波与原机翼流场之间将产生相互干扰。该问题如果应用传统数值方法来计算,需要进行局部网格加密,计算工作量很大,为此文献 [5]采用 FAS 方法进行了计算,为了检验本文

格式, 这里用本文得到的二维 Euler 方程时 空守恒格式对该问题进行了计算, 图 5 是由此得到的几个不同时刻的密度等值线图, 它揭示了该正激波与机翼流场之间的相互干扰过程, 其结果与文献 [5] 相当, 但所需网格数及计算工作量都要少得多, 这里所用的网点数仅为  $24 \times 81$

由前面的格式构造方法及部分算例的计算结果可知, 本文的格式不仅具有构造思想简单 (不需要进行通量分裂或任何特征技术), 通用性好, 对网格质量要求低, 适应性广等特点, 而且其计算结果精度高, 计算量小, 同时对激波具有很高的分辨率, 是一种发展潜力很大的数值方法, 具有非常广阔的应用前景。

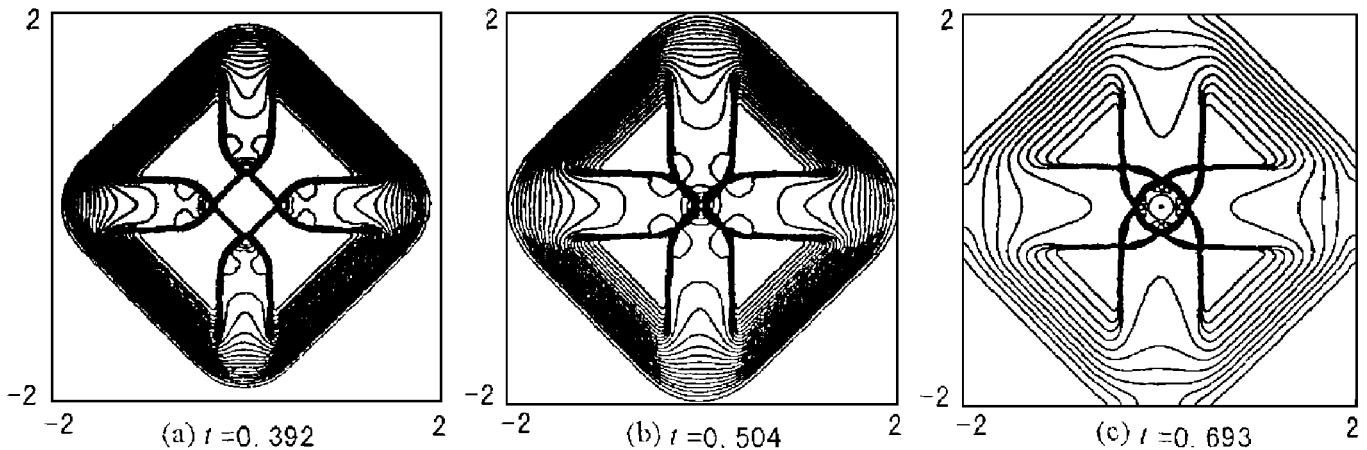


图 4 方盒中多角激波爆聚问题的等压力线图

Fig 4 Pressure contours for implosion of a polygonal shock in a square box

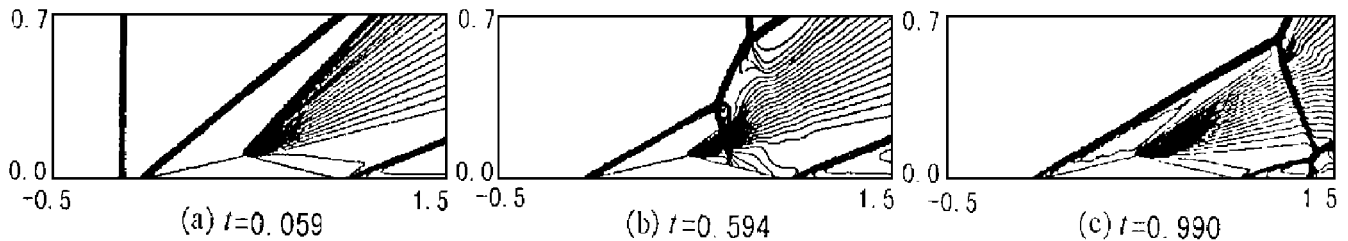


图 5 激波与运动机翼间相互干扰问题的密度等值线图

Fig 5 Density contours for interaction of a shock wave with a moving projectile

### 参 考 文 献

- 1 Chang S C. The Method of Space-time Conservation Element and Solution Element—A New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations. *Journal of Computational Physics*, 1995, 119: 295~ 324
- 2 张增产, 沈孟育. 改进的时 空守恒元和解元方法. *清华大学学报 (自然科学版)*, 1997, 37(8): 65~ 68
- 3 Zhang Z C, Shen M Y. A New Approach to Obtain Space-Time Conservation Schemes. *Chinese Journal of Aeronautics*, 1997, 10(2): 81~ 90
- 4 张增产. 一种改进的满足时 空守恒律的数值方法. *计算力学学报*, 1997, 14(增刊): 741~ 744
- 5 Watanabe R, Fujii K, Higashino F. Numerical Simulation of the Flow around a Projectile Passing Through a Shock Wave. *IAA Paper*, 95-1790, 1995

- 6 Wang X Y, Chow C Y, Chang S C. Numerical Simulation of Flows Caused by Shock-Body Interaction. AIAA Paper, 96-2004, 1996

## A GENERAL 2D SPACE-TIME CONSERVATION SCHEME AND ITS APPLICATION IN THE CALCULATIONS OF COMPLICATED FLOW PROBLEMS

Zhang Zengchan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing, 100084)

**ABSTRACT** In this paper, the 1D space-time conservation scheme modified by the authors is extended to two-dimensional ones and a general form of space-time conservation scheme for 2D Euler equations is obtained. Some complicated flow problems are calculated using this scheme. The numerical results show that this scheme has all the features which the 1D space-time conservation scheme has, such as its simplicity and generality etc., and the solution accuracy and shock resolution are also very high.

**KEY WORDS** 2D Euler equations, conservation element and solution element, numerical method, shock resolution