

有限厚度流体层界面运动 Rayleigh-Taylor 不稳定性的数值模拟*

廖海东^{a,b} 孙承纬^a 李永池^b 杨礼兵^a

(a. 中物院流体物理研究所 成都 523 信箱 610003)

(b. 中国科学技术大学力学和机械工程系 合肥 230026)

摘要 采用二阶 TVD 格式及 Level Set 方法计算了二维可压缩有限厚度流体层 Rayleigh-Taylor 流体不稳定性。计算结果与 Taylor 的线性解和 Ott 的薄层非线性解析解符合很好。

关键词 界面不稳定性 有限厚度流体层 TVD 格式 Level Set 方法

中图法分类号 O357.5

1 引言

在重力场中,当重流体放置在轻流体之上时界面扰动会发展。第一个观察到这个现象的是近百年前的 Rayleigh^[1],1950 年 Taylor^[2] 指出重力的作用等价于界面向重流体作加速运动。这种界面不稳定性常称为 Rayleigh-Taylor 不稳定性(简称 R-T 不稳定性)。R-T 不稳定性在惯性聚变、超新星爆发、电磁内爆、水下爆炸等过程中起着重要作用,因而受到广泛重视。

界面不稳定性研究大多集中在经典的两个半无限大流体的界面运动,而实际情况经常是有限厚度流体层问题。Taylor^[2] 在线性假定下首先研究了这个问题,考虑了一个具有两个自由面的有限厚度的流体层。Ott^[3] 研究了薄层问题,并在二维情形下得到了解析结果。

数值模拟流体运动界面不稳定性的关键在于如何计算界面本身的运动情况。过去主要有两种不同的算法。第一种是拉格朗日型的,界面由其上设置的离散点来代表。其中比较有代表性的是涡方法(Vortex methods)^[4]、标志网格(MAC)法^[5]、阵面追踪(Front Tracking)法^[6]等,其中阵面追踪法是最为成功的。但是为了保证界面离散点的均匀性以及界面正确的拓扑结构,必须进行复杂的阵面几何描述和分辨。

另外一种是由 Osher 等发展起来的描述界面的方法^[7]。它本质上是一种欧拉型的方法,不再将界面看作是离散点集。这种方法引入一个等高集合函数(Level Set Function),界面只是这个函数的一个特殊值,将这个函数作为一个变量添加到流体力学变量组中,一起随时间变化,满足一组流体力学方程,求解这个方程就可得到界面的运动情况。

Level Set 法隐含地处理界面的拓扑结构变化,界面位置可以在任何时候重构,对于界面分裂、重合等质点法难以处理的问题可以自然地解决。这种方法减少了计算编码的难度,在晶体生长、几何运动及双流体问题上都得到成功的应用^[7]。Mulder 等^[8] 将这种方法应用到二维

* 中国工程物理研究院科技预研基金资助(编号 980106)。

廖海东:男,1967 年 12 月生,博士,助理研究员。

1998-02-11 收到原稿,1998-08-28 收到修改稿。

R-T 单界面不稳定性计算中。

我们应用 Level Set 法研究双界面问题,即二维可压缩有限厚度流体层的 R-T 不稳定性问题。

2 解析研究的结果

对于有限厚度的不可压流体层, Taylor^[2] 在理想不可压缩线性范围内给出如下的解析解。设 x, y 为水平和垂直坐标, h 为流体层厚度, 则受扰上、下表面分别为 $y_1 = \eta_1(x, t), y_2 = -h + \eta_2(x, t)$ 。

假定初始时刻上、下表面有相同波数、不同幅度的扰动 $\eta_1(x, 0) = \epsilon_1 \cos kx, \eta_2(x, 0) = \epsilon_2 \cos kx$, 则界面扰动的解析解

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{1 - e^{-2kh}} [(\epsilon_1 - \epsilon_2 e^{-kh}) \cos m_0 t + (\epsilon_2 - \epsilon_1 e^{-kh}) e^{-kh} \text{ch} m_0 t] \cos kx \\ \eta_2 = \frac{1}{1 - e^{-2kh}} [(\epsilon_1 - \epsilon_2 e^{-kh}) e^{-kh} \cos m_0 t + (\epsilon_2 - \epsilon_1 e^{-kh}) \text{ch} m_0 t] \cos kx \end{cases} \quad (1)$$

式中: $m_0 = \sqrt{kg}$, g 为重力加速度。

由(1)式可见,上、下表面互相影响,影响因子为 e^{-kh} 。两个表面只要有一个不稳定,另一个在足够长的时间后,也会变得不稳定。

Ott^[3] 得到不可压流体双自由面薄层非线性 R-T 问题在二维情况下的解析解。设 x, y 为薄层上某点的位置,假定薄层处于平衡位置时其 x 坐标对应的拉格朗日坐标为 ξ_0 , 即

$$y = 0, \quad x = \xi_0$$

Ott 给出 x, y 的 Fourier 级数表达式

$$\begin{cases} x(\xi_0, t) = \xi_0 - \sum_{k, m} A_x^m(k, t) \cos(k\xi_0 + \theta_k^n) \\ y(\xi_0, t) = \sum_{k, m} A_y^m(k, t) \sin(k\xi_0 + \theta_k^n) \end{cases} \quad (2)$$

式中: k 是谐波的阶数, θ_k^n 是相应谐波的初相角, A_x, A_y 满足下列方程

$$\begin{cases} \dot{A}_x^m(k, t) - kgA_y^m(k, t) = 0 \\ \dot{A}_y^m(k, t) - kgA_x^m(k, t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

变量上面的点表示对其时间的微商。方程(2)和(3)在不同的初始条件下,有相应的解。我们将分析它的一个特解,并与数值解相比较。

3 数值模拟

3.1 界面运动方程

传统的计算有界面运动问题的方法基本上采用拉格朗日形式,利用界面与质点一起运动,在流体介质内部设置示踪粒子,用这些粒子来跟踪界面的运动。采用拉格朗日方法的优点是界面位置精确,但和所有拉格朗日方法一样在处理大变形问题上有相当大的困难。同时由于三维问题拓扑结构复杂,这种方法也难以拓展到三维问题。

位标函数法(Level Set Method)是在欧拉坐标下的流场中,建立界面运动的微分方程,并数值求解该方程,方程中的变量——位标函数 Ψ 代表流场中的一种流形,这种流形与界面相对

应。

考虑运动曲面(二维时为一曲线)

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

式中: \mathbf{r} 为空间坐标, t 为时间。假定该曲面为界面, 由于界面是物质面, 以该处流体质点速度运动, 因此

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Psi_t + u\Psi_x + v\Psi_y = 0 \quad (5)$$

采用欧拉方法数值求解方程(5), 必须在全流场给该函数赋初值。位标函数的取值依据问题不同可以有不同的形式, 可以是几何量, 也可以是界面一侧物质的质量分数等, 总之能反映流场中含有界面这一拓扑结构。我们采用 Mulder 等^[8] 的赋值方法

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \pm d$$

式中: d 为初始时点 \mathbf{r} 到界面的距离。这样界面上、下两侧的流体介质就具有不同的符号, 而流体界面在 $\Psi=0$ 的位置上。可以看出, 这种赋值方法使得位标函数的等位面代表的是在初始时和流体界面平行的一系列曲面。

采用欧拉型方法描述界面运动有以下三点好处: 首先, 不管界面拓扑结构如何变化, 包括破裂、合并以及形成尖角等, 位标函数始终保持为一个函数, 使得能够隐含地处理复杂变形问题; 其次, 由于 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 保持为函数, 可以采用差分近似来求解方程(5); 第三, 这种方法很容易扩展到三维问题。

3.2 计算模型

假定流体可压缩、无粘, 表面张力的影响可忽略, 则流体运动可用如下的偏微分方程组描述

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{H} \quad (6)$$

式中: 下标 t, x, y 分别表示相应的偏微商, 向量 \mathbf{q} 、通量 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 、力 \mathbf{H} 分别为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u e + u p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v e + v p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \\ \rho v g \end{bmatrix}$$

这里 u, v 分别为水平和垂直方向的速度分量, ρ, e, p 分别为密度、比总能和压力, g 是重力加速度。

采用理想气体的状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho[e - (u^2 + v^2)/2] \quad (7)$$

显然位标函数的添加并未改变原来欧拉方程的性质(除了需要用 Ψ 来判断该位置流体的多方指数外), 可以采用原有的方法求解欧拉方程(5)。对于多界面问题, 可以提出多个位标函数。对应于有限厚度层问题, 需要有两个位标函数 Ψ_1, Ψ_2 , 初始值分别以上、下界面为基准定义, 并且都满足方程(5)。

为计算方便, 将方程组(6)无量纲化

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{y} &= \frac{y}{L}, & \bar{t} &= \frac{\sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}}{L} t, & \bar{p} &= \frac{p}{\gamma p_0}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0} \\ \bar{u} &= \frac{u}{\sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}}, & \bar{e} &= \frac{e}{(\gamma p_0 / \rho_0)}, & \bar{g} &= \frac{gL}{(\gamma p_0 / \rho_0)} \end{aligned} \quad (8)$$

式中: L 为计算区域水平方向长度, p_0 、 ρ_0 和 γ 分别为初始时刻流体层中心位置的压强、密度和绝热指数。采取这种形式的无量纲化, 变化后的方程与原方程具有完全相同的形式。方程无量纲化的好处是, 用一个模型就可以反映一类问题。

计算区域为矩形, 上、下是反射边界, 左、右是周期边界, 重力的方向向下, 高密度的流体层(用下标 2 表示)处在中间, 上、下为相同的低密度流体层(用下标 1 表示)。

在重力场中, 当理想气体处于静止平衡状态时, 根据方程(7), 其密度和压力将依赖于高度 y 。因此只要确定了流场中一点的密度和压力, 整个流场的密度和压力就可确定。当流场有界面时, 只要界面两侧的流体密度和压力确定, 就能确定整个流场中的密度和压力。假定初始时刻流体界面上有波长为 λ 的小幅度正弦扰动, 则整个流场中各物理量将产生一个小扰动增量。Gardner 等^[9]采用线性小扰动假定, 简化了方程(7), 通过解析求解得出确定密度、压力、速度等物理量的扰动增量的公式。我们采用这个解为初始条件。

计算网络划分为 64×128 (水平方向 64 个网格, 垂直方向 128 个网格), 水平方向和垂直方向的空间步长相等, 因此水平方向长度为 1, 垂直方向长度为 2。在计算中采用了左右对称的假定, 即实际计算网格划分为 32×128 。

3.3 计算方法

方程组(6)是双曲型的, 对于非线性双曲型方程, 不管初始条件如何光滑, 其解都会出现间断。采用耗散性较大的一阶格式, 可使间断平滑过渡, 但这样将会使间断过渡区过宽, 使界面变得模糊。采用传统的高阶格式, 则会在间断区造成波头振荡, 导致计算不稳定, 因此必须添加人为粘性。由于 R-T 界面不稳定性扰动增长对界面两侧密度比的变化非常敏感, 因此采用通常的 Richtmyer-Meshkov 人为粘性, 间断将散布在过多的网格上, 这就降低了界面两侧的密度梯度。高精度的 TVD (Total Variation Diminishing) 格式^[10]利用一阶迎风格式的大耗散特性, 并以其为基本格式, 然后通过限制总的变分来构造高阶格式, 因而高阶格式同一阶格式一样在计算过程中不产生新的极大和极小, 使物理量能够平滑地通过激波区, 并且激波过渡区很小, 适合于计算含有界面的流场问题。

二阶 TVD 格式在时间上采用两步 Runge-Kutta 法, 定义空间差分算子

$$L(q) = L^x(q) + L^y(q) + H(q)$$

式中: L^x 是 $-F_x$ 在网格点上的近似值, L^y 是 $-G_y$ 的近似值, $H(q)$ 是 $H(q)$ 的准确值。

则二阶 TVD 格式为

$$\begin{aligned} q^* &= q^n + \Delta t L(q^n) \\ q^{n+1} &= \frac{1}{2}(q^n + q^*) + \frac{\Delta t}{2} L(q^*) \end{aligned} \quad (9)$$

文中 TVD 格式的空间差分格式采用文献[8]中的方法。

4 计算结果

图 1 为计算结果与 Ott 理论比较, 计算区域为矩形, 初始时刻高密度的流体层处在中间(阴影区), 上、下为相同的低密度流体(空白区), 实线为 Ott 理论结果。计算采用的参数: $\bar{\rho}_2 / \bar{\rho}_1 = 10$, $\bar{g} = 0.1$, 中间流体层厚度 $\bar{h} = 0.2$, 初始扰动幅度上表面 $\bar{A}_u = 0$, 下表面 $\bar{A}_b = -0.015$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4$ 。

Ott 理论的结果表示如下：对于厚度为 h 的流体薄层，其上表面未受扰动，下表面具有 $\delta = A \cos kx$ 形式的初始扰动，假定初始速度为零，则由公式(2)、(3)可得

$$x(\xi_0, t) = \xi_0 + \frac{A}{2} \left[\left[\frac{1}{kh} + \frac{1}{2} \right] \text{ch}(\sqrt{kgt}) + \left[\frac{1}{kh} - \frac{1}{2} \right] \cos(\sqrt{kgt}) \right] \sin k\xi_0$$

$$y(\xi_0, t) = \frac{A}{2} \left[\left[\frac{1}{kh} + \frac{1}{2} \right] \text{ch}(\sqrt{kgt}) - \left[\frac{1}{kh} - \frac{1}{2} \right] \cos(\sqrt{kgt}) \right] \cos k\xi_0$$

从结果来看，数值计算和 Ott 解析理论直到解析解失效以前都符合得很好。

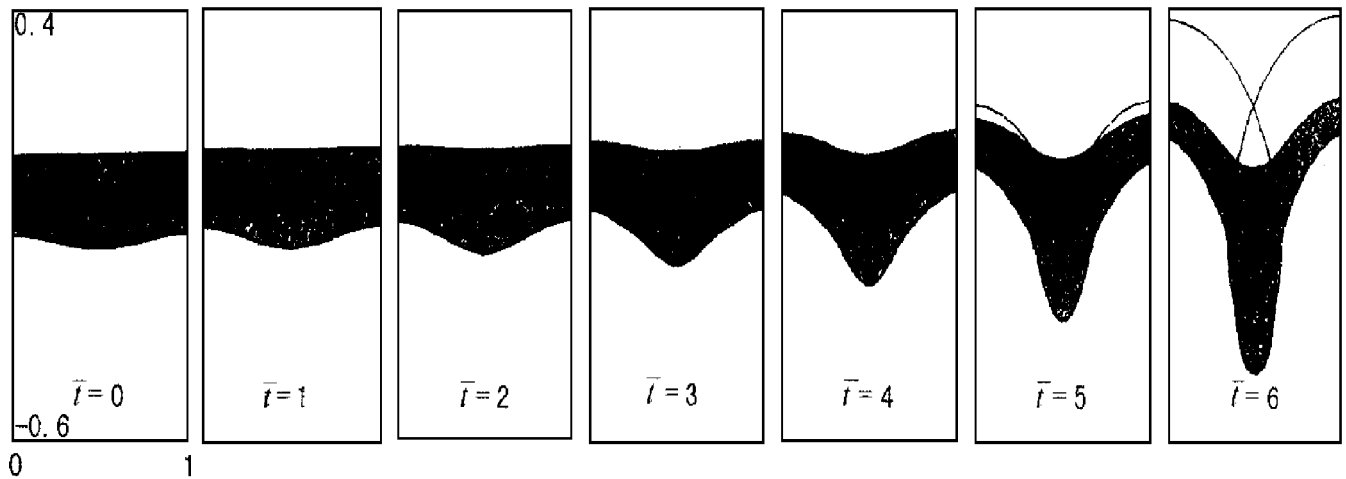


图 1 计算结果与 Ott 理论比较

Fig.1 Comparison of the calculated results with Ott's model, the solid line is Ott's solution, the calculated shadow area is the fluid of higher density

图2为计算结果与Taylor线性理论比较，计算采用的参数： $\bar{\rho}_2 / \bar{\rho}_1 = 2$, $\bar{g} = 0.5$, 中间流体层厚度 $\bar{h} = 0.4$, 初始扰动幅度上表面 $\bar{A}_u = 0.005$, 下表面 $\bar{A}_b = 0$, 采用小幅度扰动与线性理论对照, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4$ 。

根据公式(1), 当初时刻流体层下界面无扰动, 而上界面有扰动时, 经过一段时间, 扰动在上、下界面都发展起来, 不过扰动方向都与初始时刻上界面的扰动方向相反, 计算结果与此

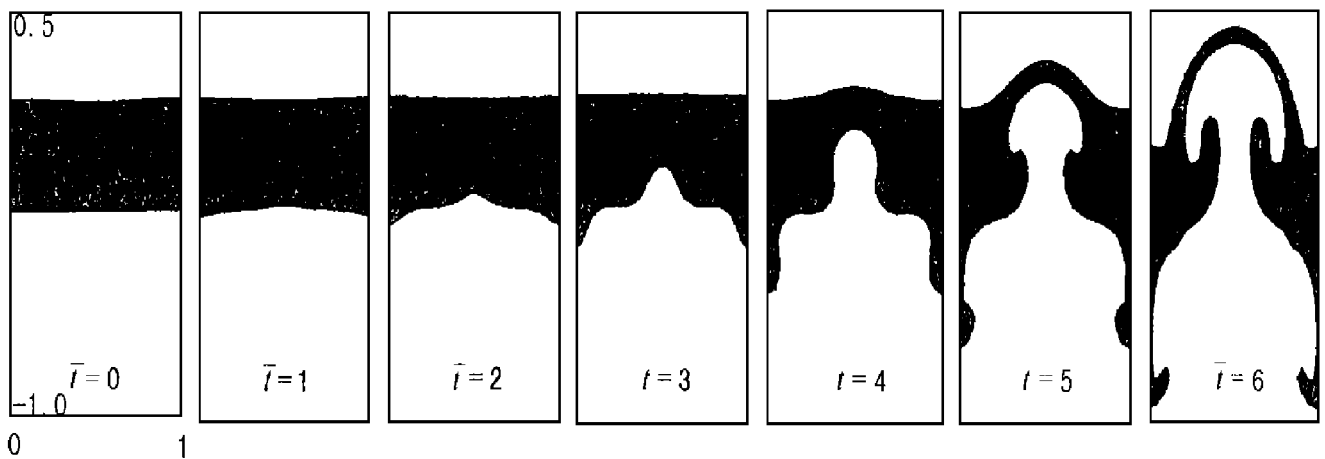


图 2 仅上表面受扰的流体层界面随时间的变化

Fig.2 The interface evolution sequence of the fluid layer disturbed only on the upper surface. The spatial coordinates are all the same as that in right bottom

是符合的。

5 结 论

有限厚度流体层的界面不稳定性现象比在单界面的半无限流体中表现得更为复杂、丰富,这就更适于用来检验计算编码的准确性。

Level Set 方法是一种稳定有效的处理界面大变形问题的方法,是欧拉型的方法,与阵面追踪(Front Tracking)等拉格朗日型方法相比,能将位标函数作为一个变量添加到流体运动中,界面的拓扑变化通过求解位标函数所满足的偏微分方程而隐含地处理,并且通过位标函数可以很方便地进行界面的重构。采用 TVD 格式配以 Level Set 方法,可以相当准确地计算界面不稳定性现象,参照 Taylor 公式和 Ott 理论所满足的条件我们分别计算了中等密度比、中等厚度和起始小扰动与大密度比、薄层和起始中等扰动两种情形下流体界面的扰动发展,与解析理论比较表明了方法的可靠性。

参 考 文 献

- 1 Rayleigh L. Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Fluid of Variable Density, Scientific Paper II. Cambridge: Cambridge UN Press, 1900. 200 ~ 207
- 2 Taylor G I. The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to the Planes. Proc Roy Soc, 1950, A201: 192 ~ 196
- 3 Ott E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh-Taylor Instability of a Thin Layer. Phys Rev Letts, 1972, 29: 1429 ~ 1431
- 4 Tryggvason G. Numerical Simulations of the Rayleigh-Taylor Instability. J Comput Phys, 1988, 75: 253 ~ 282
- 5 Harlow F H, Welch J E. Numerical Study of Large Amplitude Free Surface Motion. Phys Fluids, 1965, 8: 2182 ~ 2189
- 6 Chern I L, Glimm J, McBryan O, et al. Front Tracking for Gas Dynamics. J Comput Phys, 1986, 62: 83 ~ 110
- 7 Osher S, Sethian J. Front Propagation with Curvature-dependent Speed; Algorithm Based on Hamilton-Jacobi Formulations. J Comput Phys, 1988, 79: 12 ~ 49
- 8 Mulder W, Osher S, Sethian J. Computing Interface Motion in Compressible Gas Dynamics. J Comput Phys, 1992, 100: 209 ~ 228
- 9 Gardner C, Glimm J, McBryan O, et al. The Dynamic of Bubble Growth for Rayleigh-Taylor Unstable Interfaces. Phys Fluids, 1988, 31: 447 ~ 451
- 10 Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. J Comput Phys, 1983, 49: 357 ~ 393

NUMERICAL SIMULATION OF RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY IN FLUID LAYERS WITH FINITE THICKNESS

Liao Haidong^{a,b}, Sun Chengwei^a, Li Yongchi^b, Yang Libing^a

(a. *Institute of Fluid Physics, CAEP, P. O. Box 523, Chengdu, 610003*)

(b. *University of Science and Technology of China, Hefei, 230026*)

ABSTRACT The numerical simulation of two-dimensional Rayleigh-Taylor instability in the fluid layers of finite thickness has been performed with a second-order TVD scheme and the level set method, where a layer of higher density is embedded into two layers of lower density. The predicted evolutions of the interface disturbance agree well with the analytical theories given by Ott and Taylor.

KEY WORDS interfacial instability, finite thickness fluid layer, TVD scheme, level set method