

端部受斜冲击的刚塑性悬臂梁的双铰模型^①

穆建春 张铁光

(太原理工大学应用力学研究所 太原 030024)

摘要 斜冲击载荷作用在刚塑性悬臂梁的端部,引起作用在梁横截面处的弯矩以及轴力;在发生塑性变形截面处,弯矩及轴力满足交互作用屈服条件。广义应力在移行铰的邻域不违背屈服条件,屈服函数可在移行铰的背面取极大值,移行铰处的剪切力不必为零。如果悬臂梁足够长,在响应的初始阶段移行铰处非零的剪力会在梁上引起多铰变形。通过对双铰模型与单铰模型比较发现,双铰模型计算的结果与单铰模型计算的结果很接近,单铰模型作为一个近似模型具有一定的合理性。

关键词 斜冲击 刚塑性 悬臂梁 弯矩及轴力 交互作用屈服条件

中图法分类号 O347.1

1 引言

移行铰的概念最早是 Lee 及 Symonds^[1] 在分析中部受冲击载荷的自由梁的动力响应时提出来的。Parkes^[2] 用移行铰模型成功地解决了刚塑性悬臂梁端部受刚性物体正冲击的动力响应问题,得到了分析解。在 Parkes 问题中,梁的变形主要是弯曲变形。近来,悬臂梁端部受斜冲击问题的研究得到了重视,这一研究的目的是为了理解梁在冲击载荷下弯曲以及轴向变形之间的交互作用。Shu, Stronge 及 Yu^[3] 报道了悬臂梁端部受斜冲击的实验结果,他们发现斜冲击冲量的轴向分量对梁的弯曲变形的影响不大。

文献[4]用移行铰模型对理想刚塑性悬臂梁端部受一个质点斜冲击的动力响应进行了分析:在移行塑性铰处,轴向变形和弯曲变形同时存在,因此塑性铰被称为广义塑性铰。文献[4]中的分析假定在移行铰处剪切力为零,从移行铰到梁根部的范围内,应力在屈服限以内,因此梁的变形取为单铰模式。文献[4]同时对广义塑性铰的一般性质作了讨论,指出:如果在塑性移行铰处忽略剪切变形,通常采用一个不包括剪力的简化屈服条件,则剪切力将不可能由屈服条件及流动法则来确定。在以往的梁的动力响应分析当中,弯曲是梁的主要变形形式,移行铰处的剪力通常取为零,剪力为零是建立在下列两个条件之上:(1)剪力 Q 及弯矩 M 在移行铰处满足局部的平衡方程 $Q = \partial M / \partial x$; (2)为了不违背屈服条件,弯矩在移行铰处取极值 $\partial M / \partial x = 0$ 。在斜冲击条件下,通常采用轴力和弯矩交互作用屈服条件,这时,弯矩在移行铰处不必取极值。针对斜冲击的情况,文献[4]曾指出:为了在移行铰的局部区域内不违背屈服条件,剪力被限制在一个许可的范围内,这个范围是由弯矩或屈服函数在移行铰处具有局部极值的特性

^① 国家自然科学基金(编号 19842001、19872048)、国家教委留学回国人员科研启动基金、山西省留学回国人员科研基金资助。

穆建春:女,1962年12月生,硕士,副教授。
1998-09-16收到原稿,1999-04-20收到修改稿。

来确定的,既较处的应力合力可满足以下两个极限条件:

1. 弯矩在广义较处取极值;
2. 屈服函数在广义较处取极值。

如果略去梁横截面的转动惯量,第一个极限条件意味着剪力为零,而第二个极限条件要求在较处剪力不为零。广义移行较处剪力的这种不确定性会引起解的不唯一性。在悬臂梁受斜冲击的试验中发现,悬臂梁根部的变形在早期的瞬态变形过程中可能是重要的。例如,悬臂梁在 45°斜冲击下的瞬态应变测量显示,在梁根部形成永久性变形以前,梁的根部在初期的一个很短的时间里曾向反方向转动^[5],这表明在梁的早期响应当中塑性变形可能发生在梁的根部。

我们采用上述的第二个极限条件,讨论悬臂梁端部在受到斜冲击后梁的早期瞬态变形过程中的双较模型。

2 多较模型的可能性

考虑一个宽度为 b 、厚度为 h 、长度为 L 、单位长度的质量为 m 、具有均匀长方形横截面的悬臂梁,梁的端部受到一个质量为 G 的质点的斜冲击,假定质点在撞击后粘在梁的端点(图 1 (a)所示)。质点初始速度的横向分量及轴向分量分别为 v_{y0} 及 v_{x0} 。

坐标系选取如图 1(a)所示,设到梁端部冲击点距离为 λ 的塑性较的移行速度为 $\dot{\lambda} = \partial\lambda / \partial t$ 。文献[4]曾指出:广义速度在移行较处具有强间断的性质,如果不忽略广义质量,对应的广义应力及屈服函数在移行较处也具有强间断。移行较右侧的位置记为 $\lambda_+ = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} (\lambda + \Delta\lambda)$,移行较的左侧的位置记为 $\lambda_- = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} (\lambda - \Delta\lambda)$ 。对任一变量,下标“-”及下标“+”分别表示该量在 λ_- 及 λ_+ 处的值。屈服函数在移行较的背面具有最大值,移行较的背面记为 λ ($-\text{sgn}(\dot{\lambda})$),这里

$$\begin{aligned} \lambda(-\text{sgn}(\dot{\lambda})) &= \lambda_- & \dot{\lambda} > 0 \\ \lambda(-\text{sgn}(\dot{\lambda})) &= \lambda_+ & \dot{\lambda} < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

我们采用下列假定:

(1)刚塑性梁的屈服条件为

$$\left| \frac{M_H^*}{M_0} \right| + \left[\frac{N_H^*}{N_0} \right]^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

式中: M_H^* 及 N_H^* 分别为在 $\lambda(-\text{sgn}(\dot{\lambda}))$ 处的弯矩及轴力, $M_0 = Ybh^2/4$, $N_0 = Ybh$, Y 是材料的屈服应力。

(2)梁横截面的尺寸很小,横截面对通过截面中心的横轴的转动惯量可以忽略不记。因此弯矩在移行较 H 处是连续的,即 $M_H^* = M_{H-} = M_{H+} = M_H$ 。

(3)由于屈服条件不包含剪力,在移行较 H 处的剪力不能由屈服条件和流动法则来确定。

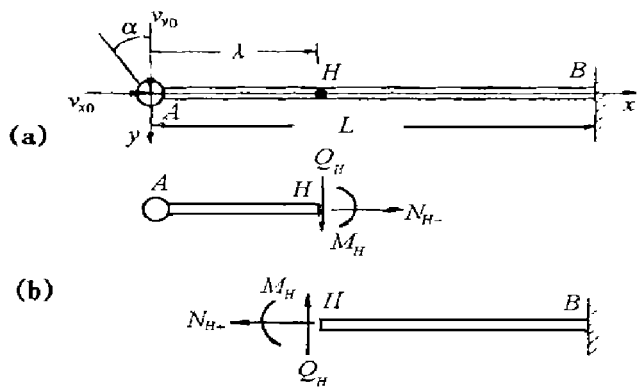


图 1 受斜冲击的悬臂梁

Fig.1 A cantilever subjected to an oblique impulsive loading

为确保广义应力在铰的一个邻域不违背屈服条件,假定屈服函数在广义移行铰的背面处取极值,移行铰处的剪力将由下式来确定

$$Q_H = \frac{2H_H^*M_0}{N_0^2} \frac{\partial N(x)}{\partial x} \Big|_{x=\lambda(-\text{sgn}(\dot{\lambda}))\text{sgn}(M_H)} \quad (3)$$

这里屈服函数定义为

$$\Psi(x) = \left| \frac{M(x)}{M_0} \right| + \left| \frac{N(x)}{N_0} \right|^2 - 1 \quad (4)$$

$M(x)$ 及 $N(x)$ 是在 x 处的弯矩及轴力。

受斜冲击的悬臂梁的受力图如图 1(b)所示,这里 N_{H-} 及 N_{H+} 为在 λ_- 及 λ_+ 处的轴力, M_H 及 Q_H 为在铰 H 处的弯矩和剪力。由于 $\dot{\lambda} > 0$,我们有 $\lambda(-\text{sgn}(\dot{\lambda})) = \lambda_-$ 及 $N_H^* = N_{H-}$ 。从假定(3)可以得到在铰处的剪力应满足

$$Q_H = \frac{2M_0N_{H-}}{N_0^2} \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{H-} \quad (5)$$

如果剪力很大或者 HB 段的长度足够长,剪力会引起在 HB 段里的某些部位发生塑性变形。例如,如果

$$Q_H = \frac{1}{(L-\lambda)} \left\{ M_H + M_0 \left[1 - \left| \frac{N_{H+}}{N_0} \right|^2 \right] \right\} \quad (6)$$

会在梁的根部形成一个静止的塑性铰。如果 $Q_H > \frac{1}{(L-\lambda)} \left\{ M_H + M_0 \left[1 - \left| \frac{N_{H+}}{N_0} \right|^2 \right] \right\}$ (7)

第二个铰将处于 (λ, L) 的范围内。随着铰处剪力的增加,在 (λ, L) 的范围内还会出现更多的铰。为了简化对问题的分析,下面讨论最简单的高阶变形模态,即双铰变形模型。

3 双铰模型的公式

假定在变形初期悬臂梁上形成了两个铰。一个是广义移行铰 H ,该铰从梁的端部移向梁的根部 B ,移行铰的速度 $\dot{\lambda} > 0$ 。另外一个铰形成在梁的根部 B ,为固定铰(如图 2)。运动可分为四个阶段。第一阶段 l_1 ,广义移行铰 H 从端部 A 向根部 B 移动,刚性段 HB 绕根部 B 转动。除了各刚性段的转动,刚性段 AH 还有轴向运动;弯曲及轴向变形同时发生在广义移行铰 H 处。在静止铰 B 处位移保持连续, BH 段没有轴向运动。 AH 段的轴向运动在 t_1 时刻停止(后面可以看到这时铰 H 的位置仍然离端部 A 很近)。第二阶段 l_2 ,只有弯曲变形发生在移行铰 H 处,刚性段 HB 继续绕根部 B 转动。 HB

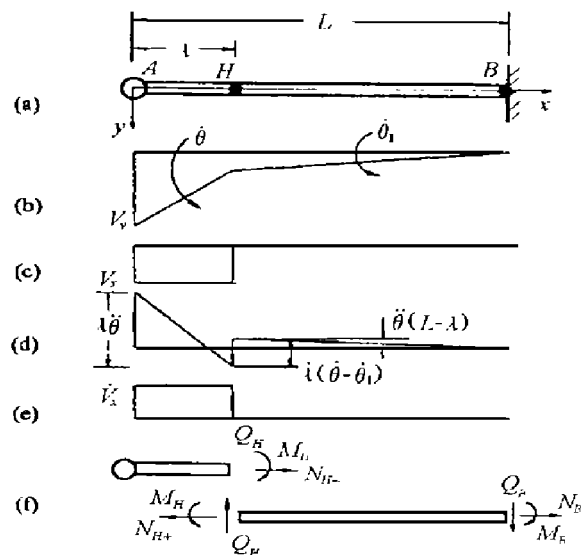


图 2 (a)端部受斜冲击的悬臂梁的双铰模型;(b)横向速度场;(c)轴向速度场;(d)横向加速度场;(e)轴向加速度场;(f)梁的受力图

Fig.2 (a) Double hinge model for a cantilever subjected to an oblique impulsive loading; (b) Transverse velocity field; (c) Axial velocity field; (d) Transverse acceleration field; (e) Axial acceleration field; (f) Free body diagram

段的反向转动在 t_2 时刻停止; 在第三阶段 l_3 , 仅有弯曲移行铰 H 存在, 最后铰移行到根部 B 。在最后阶段 L , 整个梁的运动为绕梁根部 B 的定轴转动。头三个阶段 l_1 、 l_2 及 l_3 合起来称为瞬态阶段或移行铰阶段。

第一阶段 l_1 , 梁的速度场为

$$v_y(x, t) = \begin{cases} \dot{\theta}(\lambda - x) + \dot{\theta}_1(L - \lambda) & (0 \leq x < \lambda) \\ \dot{\theta}_1(L - x) & (\lambda \leq x \leq L) \end{cases} \quad (8)$$

$$v_x(x, t) = \begin{cases} V_x & (0 \leq x < \lambda) \\ 0 & (\lambda \leq x \leq L) \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\dot{\theta}$ 及 $\dot{\theta}_1$ 分别为 AH 及 HB 段的角速度。梁的加速度场可由对梁的速度场微分得到

$$\dot{v}_y(x, t) = \begin{cases} \ddot{\theta}(\lambda - x) + \dot{\theta}\dot{\lambda} + \ddot{\theta}_1(L - \lambda) - \dot{\theta}_1\dot{\lambda} & (0 \leq x < \lambda) \\ \ddot{\theta}_1(L - x) & (\lambda \leq x \leq L) \end{cases} \quad (10)$$

$$\dot{v}_x(x, t) = \begin{cases} \dot{V}_x & (0 \leq x < \lambda) \\ 0 & (\lambda \leq x \leq L) \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\dot{v}_y(x, t)$ 及 $\dot{v}_x(x, t)$ 分别为梁 AB 上任意点 x 在任一时刻 t 的横向及轴向加速度分量, $\ddot{\theta} = d\dot{\theta}/dt$ 及 $\ddot{\theta}_1 = d\dot{\theta}_1/dt$ 分别为梁上 HA 段及 HB 段的角加速度; $\dot{V}_x = dV_x/dt$ 是 HA 段的轴向加速度(见图 2)。根据受力图(图 2(f)), 第一阶段的运动学方程是

$$(G\lambda + \frac{1}{2}m\lambda^2)[\ddot{\theta}_1(L - \lambda) + (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1)\dot{\lambda}] + (G\lambda^2 + \frac{1}{3}m\lambda^3)\ddot{\theta} = -M_H \quad (12)$$

$$(G + m\lambda)[\ddot{\theta}_1(L - \lambda) + (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1)\dot{\lambda}] + (G\lambda + \frac{1}{2}m\lambda^2)\ddot{\theta} = Q_H \quad (13)$$

$$(G + m\lambda)\dot{V}_x = N_{H-} \quad (14)$$

$$\frac{1}{3}m(L - \lambda)^3\ddot{\theta}_1 = M_H - M_B - Q_H(L - \lambda) \quad (15)$$

$$N_B = N_{H+} \quad (16)$$

$$N_{H-} = N_{H+} - mV_x\dot{\lambda} \quad (17)$$

在移行铰处与广义应力共轭的广义应变是广义速度分量在铰处的跳跃^[4]。在本文中, 移行铰 H 处的广义应变率分别为 $[v_x]_H = -V_x$ 及 $[\dot{\theta}] = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}$ 。根据屈服条件及流动法则, 在 $H-$ 处的轴力及弯矩为

$$\begin{cases} N_{H-} = -N_0 \\ M_H = 0 \end{cases} \quad |V_x| \triangleright 2 \left| \frac{M_0}{N_0} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) \right| \quad (18)$$

$$\begin{cases} N_{H-} = -\frac{N_0^2}{2M_0} \left| \frac{V_x}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}} \right| \\ M_H = M_0 \left| 1 - \left[\frac{N_0 V_x}{2M_0 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta})} \right]^2 \right| \end{cases} \quad |V_x| \leq 2 \left| \frac{M_0}{N_0} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) \right| \quad (19)$$

$$M_B = M_0 \left| 1 - \left[\frac{N_B}{N_0} \right]^2 \right| \text{sgn}(\dot{\theta}_1) \quad (20)$$

方程(18)是轴向速度较大的情况,铰 H 处的广义应力位于屈服面的角点。根据假定(3),屈服函数在 $H-$ 处取极值,即 $\partial\Psi(x, t)/\partial x|_{H-}=0$, 铰 H 处的剪力是

$$Q_H = \frac{2M_0 N_{H-}^2}{N_0^2} \frac{m}{G + m\lambda} \quad (21)$$

当 AH 段的轴向运动停止,我们有 $V_x=0$ 。然后,第二阶段 l_2 运动开始。在第二阶段我们有: $Q_H=0, M_H=M_0$ 及 $M_B=M_0 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1)$, 而方程(12)、(13)及(15)仍可用作为这一阶段的运动方程。

在运动第三阶段 l_3 , $\dot{\theta}_1=0$ 及 $\ddot{\theta}_1=0$, 这一阶段的运动方程为

$$(G\lambda + \frac{1}{2}m\lambda^2)\dot{\theta}\dot{\lambda} + (G\lambda^2 + \frac{1}{3}m\lambda^3)\ddot{\theta} = -M_0 \quad (22)$$

$$(G + m\lambda)\dot{\theta}\dot{\lambda} + (G\lambda + \frac{1}{2}m\lambda^2)\ddot{\theta} = 0 \quad (23)$$

当移行铰到达梁根部,梁的模态阶段 L 的运动为绕根部的转动,这个阶段的运动方程是

$$(G + \frac{1}{3}mL)L^2\ddot{\theta} = -M_0 \quad (24)$$

4 数值计算结果

表1给出了计算中所用梁的尺寸及梁的材料性能。

表1 悬臂梁的尺寸及材料性能

Table 1 Dimensions and properties of cantilever

b/m	h/m	L/m	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	$Y/(\text{N}/\text{m}^2)$	$M_0/(\text{N}\cdot\text{m})$	N_0/N
0.02	0.005	0.125	2.7×10^3	3×10^8	3.75	30000

计算中参数选取的范围是:冲击方向与梁法线方向之间的斜冲击角 $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, 冲击物体和梁的质量比 $G/mL=0.2, 1$, 无量纲输入动能为 $\frac{E_0}{M_0} = \frac{1}{2} \frac{G(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)}{M_0} = 1$ 。计算的结果如图3~图7所示,其中点划线是双铰模型的结果,实线是单铰模型^[4]计算的结果。

图3给出了作为无量纲时间 t/T_p 的函数的无量纲化了的移行铰位置 λ/L , 这里特征时间取为 $T_p = L \sqrt{mL/M_0}$ 。从图3我们可以看到,如果冲击角是斜的,在早期有轴向运动的时间里,铰从端部向根部移行的速度要比正冲击时移动得慢得多。轴向变形消失后,移行铰的移行速度迅速增加。在阶段 l_2 及 l_3 的后期,移行铰的速度比正冲击时的要快。

与单铰模型^[4]类似,双铰模型的计算结果表明:在铰移行至距离端部 A 不远处,轴向变形已经消失。轴向变形消失的最终位置记为 λ_s , 无量纲最终位置 λ_s/L 列在表2。对每一种情况,双铰模型计算出的最终位置 λ_s 与单铰模型计算出的很接近。

图4及图5分别是在移行铰从端部 A 移行到 λ 时弯曲变形所吸收的无量纲弯曲能 E_b/E_0 和轴向压缩所吸收的无量纲压缩能 E_s/E_0 。从图4可以看到,对于斜冲击,在初始阶段双铰模型计算出的弯曲变形能比单铰计算出的要小一些。例如,对于斜冲击角 $\alpha=60^\circ$ 和质量比 $G/mL=0.2, 1$, 双铰模型计算出的弯曲变形能在接近端部的一段几乎为零。其结果是,在作整个移行铰阶段,双铰模型计算出的弯曲变形能比单铰计算出的也要小一些。

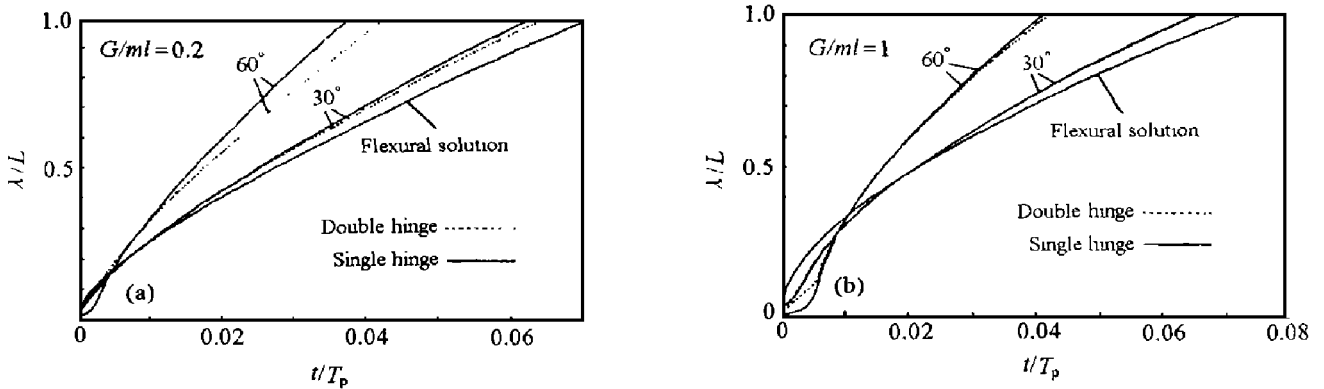


图3 塑性铰的位置与时间的关系

Fig.3 Comparison of non-dimensional plastic hinge position versus time t/T_p

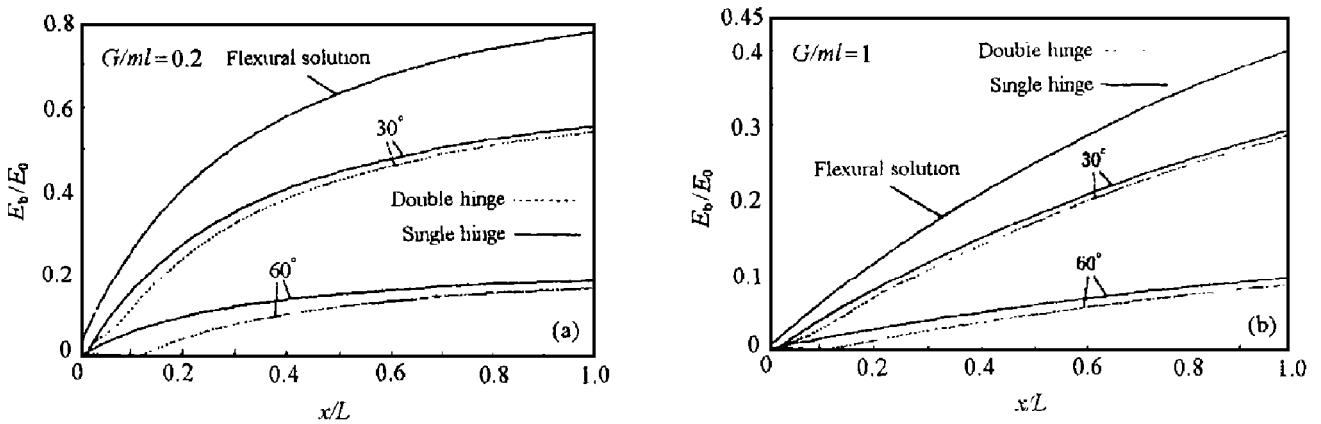


图4 梁在(0, x)段内弯曲变形吸收的能量

Fig.4 Distribution of non-dimensional energy dissipated by bending within beam segment $(0, x)$

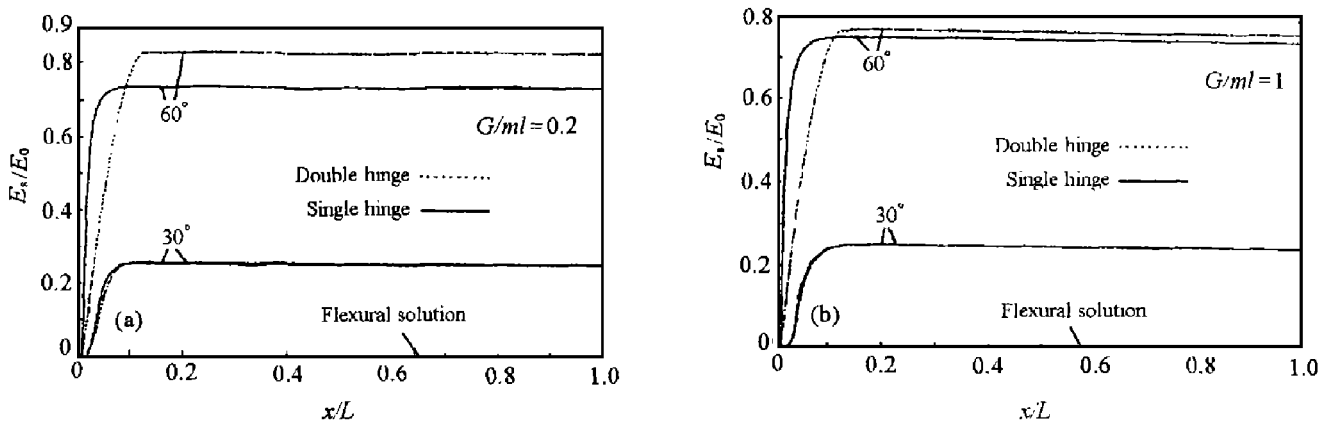


图5 梁在(0, x)段内轴向变形吸收的能量

Fig.5 Distribution of non-dimensional energy dissipated by stretching within beam segment $(0, x)$

图5是在广义移行铰阶段轴向变形所吸收的能量。在轴向变形存在的阶段,特别是对小质量比和大斜冲击角(例如: $G/mL=0.2$ 和 $\alpha=60^\circ$),双铰模型计算出的轴向变形能比单铰计算出的要大。

对双铰模型在 l_1 及 l_2 阶段,刚性段 HB 开始时绕根部向着与横向冲击方向相反方向转动;之后绕根部向着与横向冲击方向相同方向转动。 HB 段在 l_1 及 l_2 阶段里绕根部 B 的最后转角 $\theta_1(t_2)$ 及转动吸收的能量 $E_B(t_2)/E_0$ 、梁端部在 l_1 及 l_2 阶段里的最终转角 $\theta(t_2)$ 及整个梁在 l_1 及 l_2 阶段变形所吸收的总能量 $E(t_2)/E_0$ 列在表3, 这里

$$E_B(t_2) = \int_0^{t_2} M_B \dot{\theta}_1(t) dt \quad (31)$$

从表 3 可以看到, 在 l_1 及 l_2 阶段里, HB 段绕根部 B 的最后转角及 HB 段绕根部转动吸收的能量非常小。

表 2 轴向变形消失时移行铰的最终位置

Table 2 Terminal hinge position when axial movement ceases

G/mL	α	λ_s/L (双铰模型)	λ_s/L (单铰模型)
0.2	30°	0.150	0.147
0.2	60°	0.157	0.138
1.0	30°	0.207	0.203
1.0	60°	0.196	0.190

表 3 在阶段 l_1 和 l_2 里的 HB 段及梁端部的最终转角及能量消耗

Table 3 Final rotation angles of segment HB and the tip of the beam and energy dissipation during phases l_1 and l_2

G/mL	α	$\theta_1(t_2)/\text{rad}$	$\theta(t_2)/\text{rad}$	$E_B(t_2)/E_0$	$E(t_2)/E_0$
0.2	30°	7.32×10^{-4}	0.611	6.54×10^{-4}	0.733
0.2	60°	2.36×10^{-3}	0.504	1.89×10^{-3}	0.857
1.0	30°	4.09×10^{-4}	0.387	3.12×10^{-4}	0.469
1.0	60°	1.04×10^{-3}	0.210	5.56×10^{-4}	0.318

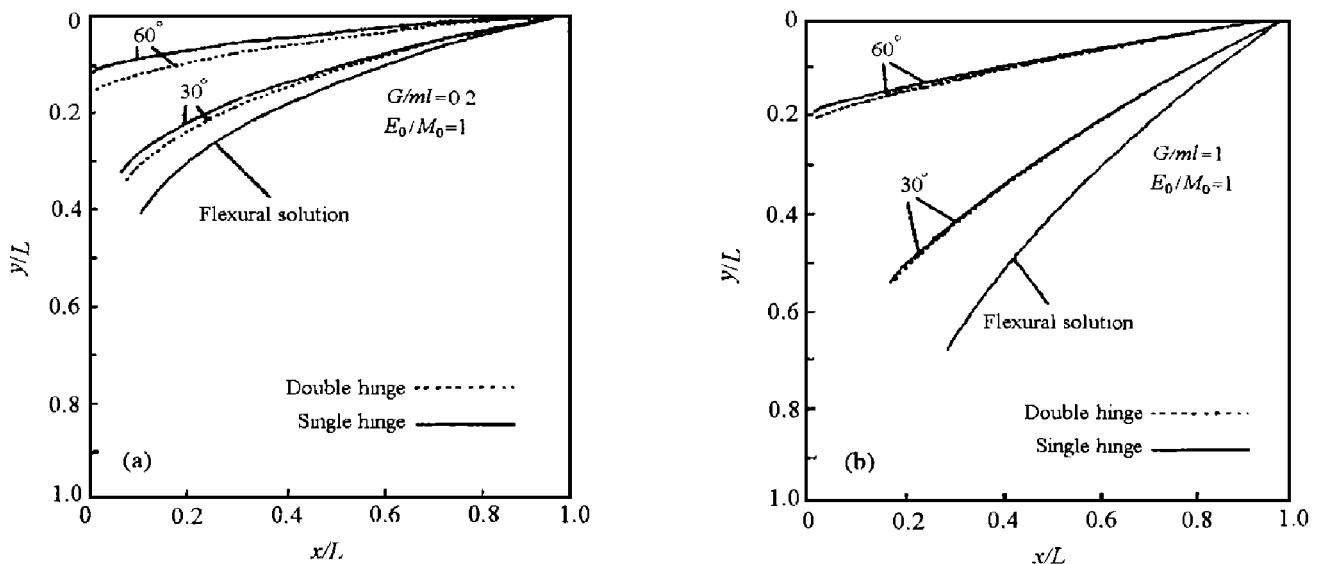


图 6 变形后梁的最终形状(单铰模型与双铰模型比较)

Fig.6 Comparison of the final deformed shape calculated with the double hinge model and single hinge model

图 6 比较了梁变形后的最终形状, 图 6(a)为 $G/mL = 0.2, \alpha = 30^\circ, 60^\circ$; 图 6(b)为 $G/mL = 1, \alpha = 30^\circ, 60^\circ$ 。对每一给定的质量比和斜冲击角, 双铰模型计算出的梁的最终变形挠度比单铰模型计算出的要小一些。这是由于单铰模型计算出的在最后阶段梁绕根部的转角比双铰模型计算出的要大一些。

图 7 把由模型计算出的梁变形后的最终形状与实验^[5]的结果进行了比较。实验中使用了

铝合金试件。每一试件是由一个横截面为 $6\text{mm} \times 3.25\text{mm}$ 、有效长度为 150mm 的悬臂梁及固定在梁端部的几何尺寸为 $5\text{mm} \times 10\text{mm} \times 15\text{mm}$ 的质量块组成,悬臂梁材料的屈服应力为 $103\text{MN}/\text{m}^2$ 。一个爆炸载荷作用在梁端部的质量块上,试件固定在摆上用以测量输入的冲量。假定爆炸载荷是一个脉冲,爆炸之后端部质量立即获得一个初速度 v_0 ;输入动能则可由 $E_0 = Gv_0^2/2$ 算出。根据文献[5]中的数据,我们有:质量比 $G/mL = 0.257$ 、梁的塑性弯矩为 $M_0 = 1.632\text{MN}$ 及梁的塑性轴力为 $N_0 = 2008\text{N}$ 。图 7 给出了当斜冲击角为 $\alpha = 45^\circ$ 、无量纲初始输入动能分别为 $Gv_0^2/2M_0 = 0.78$ 和 1.76 时悬臂梁的最终变形形状。从图 7 可以看到,在梁端部附近,单铰及双铰模型算出的梁的曲率变化比试验结果要大。这是由于试验时,爆炸载荷的加载有一个过程,它不是数学上理想的冲击载荷,塑性变形区形成的初始位置比模型假定的要远。

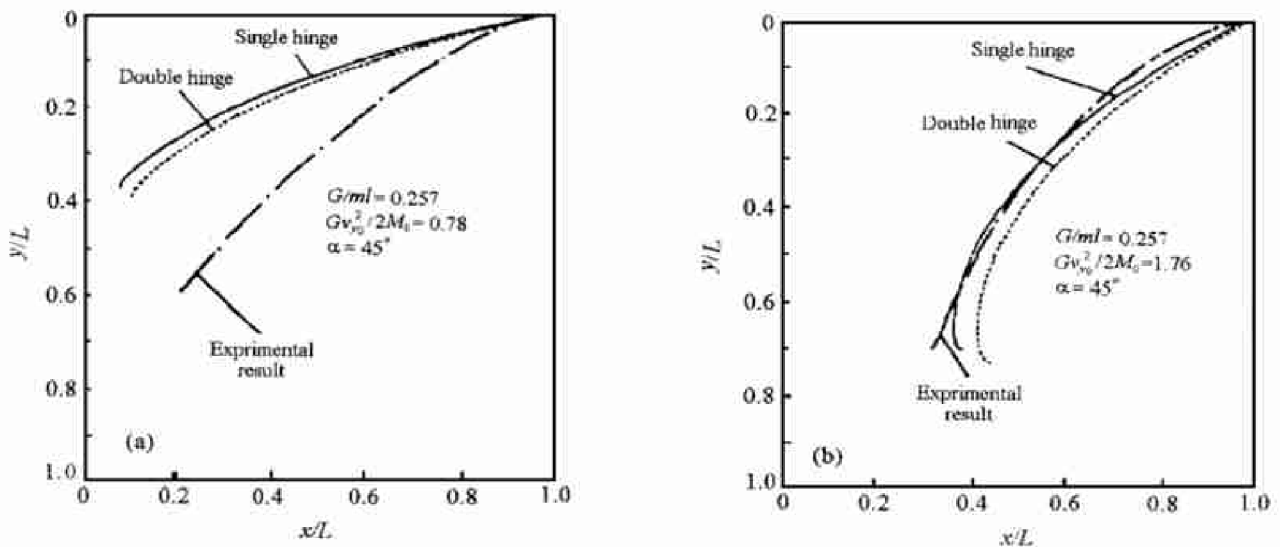


图 7 变形后梁的最终形状(单铰模型、双铰模型与实验结果的比较)

Fig.7 Comparison of final deformed shape calculated from either the double hinge and single hinge model with experimental result

5 结 论

对于弯矩和轴力复合作用的广义移行铰,如果采用不包含剪力的交互作用屈服条件,在铰处的剪力不能由屈服条件和流动法则来确定。屈服函数在铰处取极值的条件仅可以给出移行铰处剪力的许可范围,剪力在这个许可范围内,将使得广义应力在铰的一个邻域内不违背屈服条件。铰处的剪力的不确定性使得问题的解答具有不唯一性。

作为一个例子,我们考查了刚塑性悬臂梁端部受斜冲击的单铰及双铰模型,双铰模型和单铰模型都考虑了斜冲击下弯曲和轴向变形的交互作用,两个模型的不同点是,双铰模型考虑了冲击后瞬态变形初期根部的反向变形。双铰模型的计算表明,仅仅很小一部分能量被在瞬态变形初期根部形成的铰所吸收。对悬臂梁受冲击后的变形,双铰模型计算的结果和单铰模型计算的结果很接近,因此,单铰模型作为一种近似解具有合理性。

参 考 文 献

- 1 Lee E H, Symonds P S. Large Plastic Deformation of Beams under Transverse Impact. *J Appl Mech*, 1952, 19: 308 ~ 314
- 2 Parkes E W. The Permanent Deformation of a Cantilever Struck Transversely at Its Tip. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1955, 228: 462 ~ 476
- 3 Shu D, Stronge W J, Yu T X. Oblique Impact at the Tip of a Cantilever. *Int J Impact Engng*, 1992, 12(1): 37 ~ 47
- 4 Zhang T G, Stronge W J, Yu T X. Dynamic Deformation of Rigid-plastic Beams for General Impulsive Loading: a Phenomenological Model. *Int J Impact Engng*, 1995, 16(4): 535 ~ 562
- 5 Shu D. Structural Arrangement and Geometric Effects on Plastic Deformation in Collisions. PhD Thesis. Department of Engineering, Cambridge University, 1990.

DOUBLE HINGE MODEL FOR OBLIQUE IMPACT AT THE TIP OF A RIGID-PLASTIC CANTILEVER

Mu Jianchun, Zhang Tieguang

(*Taiyuan University of Technology, Institute of Applied Mechanics, Taiyuan, 030024*)

ABSTRACT An oblique impulsive loading applied on a point at the tip of a rigid-plastic cantilever can introduce axial stress and bending moment acting in any cross sections of the beam. The axial force and bending moment at the deformed section must satisfy the yield condition. The yield function satisfies a local extreme at the back side of the traveling hinge where yield occurs. With the coupling of the axial force and bending moment, the shear force at a traveling hinge is not necessary to be zero. This non-vanishing shear stress gives multiple travelling hinges if the beam is sufficient long. Calculations of a double hinge model are compared with that of the single hinge model. It demonstrates that single hinge model is reasonable as an approximation of this model.

KEY WORDS oblique impact, rigid-plastic, cantilever, bending moment and axial force, interaction yield condition