

TVD 格式中压缩波判别的人工压缩法^①

张海波^{a, b} 白春华^a 丁 懋^a 郝保田^b

(a. 北京理工大学 北京 100081)

(b. 西北核技术研究所 西安 710024)

摘要 提出了 TVD 格式中的一种新型人工压缩技术和 MaxEta 方法, 并以此对平面冲击波传播-反射问题以及三维冲击波的坑道扩散问题进行了数值模拟, 取得了很好的结果。

关键词 TVD 人工压缩 MaxEta 数值模拟 冲击波

中图法分类号 O347.4

1 引言

自 Ami Harten 提出 TVD (Total Variation Diminishing) 差分格式以来, 由于其分辨率高、间断面处无非物理振荡、光滑区域精度高等优点, 已被广泛应用于流体力学的数值模拟中。为了进一步提高 TVD 格式的分辨率, Harten, Yee 等发展了多种人工压缩技术。

计算表明, 人工压缩的确提高了 TVD 格式的分辨率, 即对间断的捕捉能力。但在研究冲击波的传播、扩散(稀疏)、反射等现象时发现, 已有的人工压缩方法常常引起波形的畸变, 或者计算的不稳定, 对于强冲击波问题, 可导致计算溢出。为了消除已有人工压缩方法的上述缺点, 我们提出了一种新的人工压缩思想, 命名为“压缩波判别的人工压缩法”。同时, 针对 Ψ 函数中限量因子的选取, 提出了 MaxEta 法。因为, 在冲击波的反射和扩散(稀疏)等问题中, 该限量因子如果选取不当, 会使计算产生强烈的不稳定, 甚至溢出(上溢或下溢)。计算结果表明, 这些方法是成功的, 对冲击波问题, 既提高了分辨率, 又保持了计算的稳定。

2 数学物理模型

2.1 压缩波判别的人工压缩法

我们以三维直角坐标理想流体方程组为例, 简要地说明 TVD 差分格式。此处只写出矩阵形式, 分量式不再列出。以下 $\mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{M}}, \eta, \alpha, \beta, \mathbf{g}, \Phi$ 为向量, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1}$ 为矩阵。

$$\text{守恒方程组} \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{差分方程} \quad U_{i,j,k}^{n+1} &= U_{i,j,k}^n - [\lambda_i (\tilde{F}_{i+1/2,j,k}^n - \tilde{F}_{i-1/2,j,k}^n) + \\ &\lambda_j (\tilde{G}_{i,j+1/2,k}^n - \tilde{G}_{i,j-1/2,k}^n) + \lambda_k (\tilde{M}_{i,j,k+1/2}^n - \tilde{M}_{i,j,k-1/2}^n)] \end{aligned} \quad (2)$$

以 x 方向为例, u, ρ, p, c 分别为速度, 密度, 压强, 特征声速

$$\lambda_i = \Delta t / \Delta x_i \quad (3)$$

① 张海波: 男, 1969 年 1 月生, 博士。
1998-11-16 收到原稿, 1999-05-18 收到修改稿。

记 η 为 F 的 Jacobi 矩阵的特征值向量, R, R^{-1} 为相应的右特征向量矩阵和左特征向量矩阵, $l = 1, 2, 3, 4, 5$ 为矩阵元素标号

$$\alpha_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1} (U_{i+1,j,k}^n - U_{i,j,k}^n) \quad (4)$$

$$Q(b) = \begin{cases} |b| & |b| \geq \epsilon \\ \frac{b^2 + \epsilon^2}{2\epsilon} & |b| < \epsilon \end{cases} \quad (5)$$

$$\sigma(\eta_{i+1/2}^l) = \frac{1}{2} [Q(\eta_{i+1/2}^l) - \lambda_i(\eta_{i+1/2}^l)^2] \quad (6)$$

$$\sigma(\eta_{i-1/2}^l) = \frac{1}{2} [Q(\eta_{i-1/2}^l) - \lambda_i(\eta_{i-1/2}^l)^2] \quad (7)$$

$$g_i^l = \min \text{mod} [\sigma(\eta_{i+1/2}^l) \alpha_{i+1/2}^l, \sigma(\eta_{i-1/2}^l) \alpha_{i-1/2}^l] \quad (8)$$

$$\beta_{i+1/2}^l = \begin{cases} (g_{i+1}^l - g_i^l) / \alpha_{i+1/2}^l & \alpha_{i+1/2}^l \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+1/2}^l = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\Phi_{i+1/2}^l = -Q(\eta_{i+1/2}^l + \beta_{i+1/2}^l) \alpha_{i+1/2}^l + (g_i^l + g_{i+1}^l) \quad (10)$$

可得带有二阶修正的流通量

$$\tilde{F}_{i+1/2,j,k} = F_{i+1/2,j,k} + \frac{1}{2} R_{i+1/2} \times \Phi_{i+1/2}^l \quad (11)$$

这便是 TVD 加人工压缩方法的简要过程。

人工压缩技术, 是对上述 TVD 格式中的 g 因子进行修正, 以进一步提高数值解对接触间断等的分辨率(如 Harten, Yee 等的人工压缩)。我们认为, 对冲击波问题, 有必要进一步提高 TVD 格式对冲击波间断的分辨率。

已有人工压缩方法, 都是在整个计算区域上进行压缩。我们认为, 对于冲击波问题, 只有当压缩波(或冲击波)存在时, 才适于人工压缩。为了正确地反映压缩波(或冲击波), 设计了无量纲因子 q/p , 能简捷有效地刻画出压缩波(或冲击波)的有无和强弱。只有压缩波存在时, q 才不为零, q 的大小反映了压缩波的强弱。将 q/p 作为一个修正因子, 得出 TVD 格式中人工压缩的一种新形式, 命名为“压缩波判别人工压缩法”。下面给出完整的“压缩波判别人工压缩法”。

$$C_1 = A_1 \rho_i |u_{i+1/2} - u_{i-1/2}| \cdot |(p_{i+1/2} - p_{i-1/2})(1/\rho_{i+1/2} - 1/\rho_{i-1/2})|^{1/2} \quad (12)$$

$$C_2 = A_2 \rho_i c_i |u_{i+1/2} - u_{i-1/2}| \quad (13)$$

$$q = \begin{cases} C_1 + C_2 & u_{i-1/2} > u_{i+1/2} \\ 0 & u_{i-1/2} \leq u_{i+1/2} \end{cases} \quad (14)$$

$$B = q/p \quad (15)$$

$$\theta_i^l = \begin{cases} |\alpha_{i+1/2}^l - \alpha_{i-1/2}^l| / (|\alpha_{i+1/2}^l| + |\alpha_{i-1/2}^l|) & |\alpha_{i+1/2}^l| + |\alpha_{i-1/2}^l| \neq 0 \\ 0 & |\alpha_{i+1/2}^l| + |\alpha_{i-1/2}^l| = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$g_i^l = (1 + \omega \theta_i^l) g_i^l \quad (17)$$

式中: ω, A_1, A_2 为正的可变系数。

2.2 MaxEta 方法

在已有算法中, Q 函数(5)的控制因子 ϵ 取为正的常数。我们通过研究 TVD 的求解过程

发现, Q 函数的自变量是用来代表特征值 η 的, 所以, ϵ 应与 η 可比。我们选择整个计算区域中最大的特征值 η 作为本时间步的 ϵ , 使 Q 函数发挥应有的应用。我们称该方法为 MaxEta 方法。

3 数值计算及分析

我们根据以上方法, 采用自行编制的三维 TVD 程序, 对不同的冲击波问题, 进行了数值计算。

在计算中, 我们选取 A_1 约为 0.5, A_2 约为 0.5。总乘子 ω 的选取, 与冲击波强度有关。冲击波强, ω 宜取小; 冲击波弱, ω 可取大。例如对压强 0.1GPa 的冲击波, ω 可取为约 1.2; 对压强 10MPa 的冲击波, ω 可取为约 2.3, 等等。

3.1 平面冲击波传播-正反射问题

我们取入射冲击波压强 10MPa, $\omega=2.3$, $A_1=0.5$, $A_2=0.5$ 。冲击波初始位置与固壁的距离为 10m, $\Delta x=0.1m$, CFL=0.1。计算结果如图 1~图 4 所示。

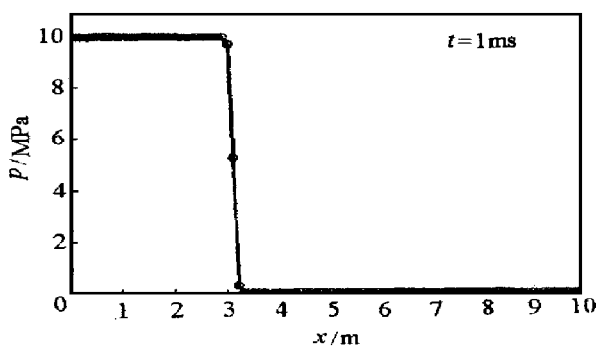


图 1 $p-x$ 曲线

Fig.1 The curve of $p-x$

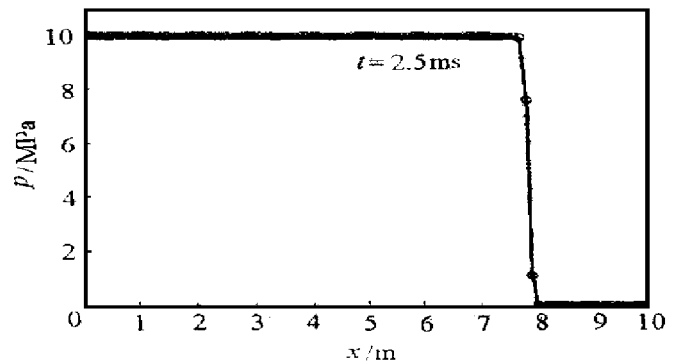


图 2 $p-x$ 曲线

Fig.2 The curve of $p-x$

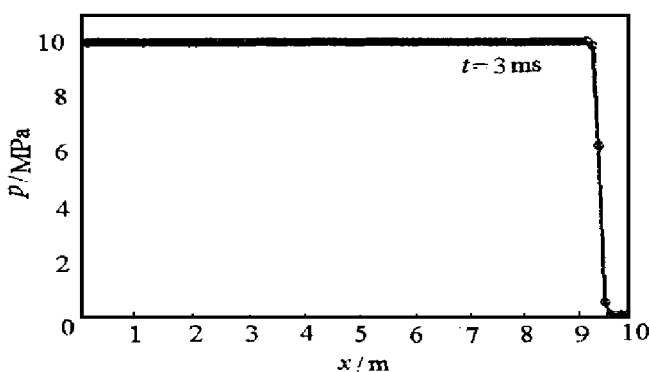


图 3 $p-x$ 曲线

Fig.3 The curve of $p-x$

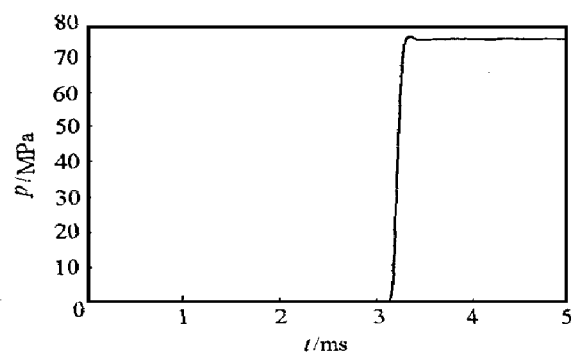


图 4 固壁压强随时间的变化

Fig.4 Time history of pressure on rigid wall

图 1~图 3 是不同时刻的压强网格分布, 冲击波的波阵面很窄, 约 1~2 个网格, 说明该方法的分辨率很高; 定常波的波后非常平, 说明光滑区的精度很好; 冲击波速度的理论值为 3152.75m/s, 由此算出冲击波在各时刻的理论位置, 与图中的计算结果一致。

图 4 是固壁压强随时间的变化曲线。由图中曲线可看出, 反射波的前沿较陡, 波后平整, 正反射的峰值压强计算值为 75.96MPa, 与理论值 75.38MPa 的相对误差为 0.8%, 波后稳定压

强计算值为 75.38MPa, 与理论值精确吻合。

3.2 三维冲击波的坑道扩散问题

我们用本文的方法计算了三维冲击波的坑道扩散问题, 其物理模型见文献[1], 在此不再列出。 y, z 方向的扩散比例均为 1:2, 扩散面积比 1:4, 入射冲击波的峰值压强为 2MPa。我们取 $\omega=5.0, A_1=0.5, A_2=0.5$ 。图 5、图 6 为不同时刻 xy, xz 平面的压强分布。

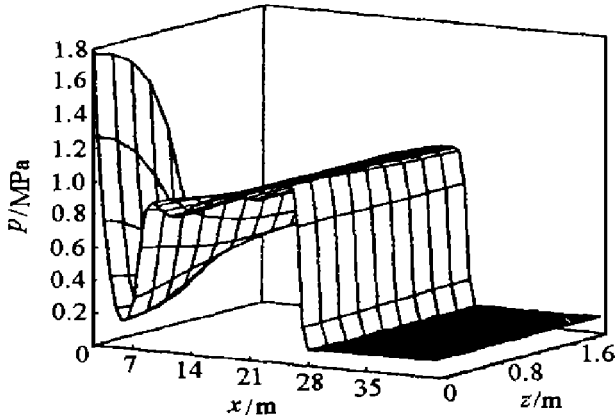


图 5 xy 平面压强分布

Fig.5 Pressure surface chart of xy plane

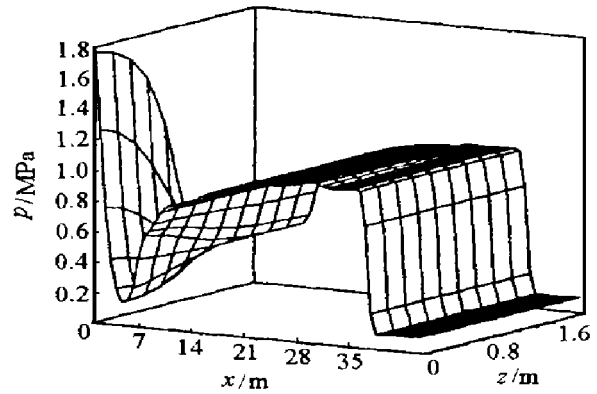


图 6 xz 平面压强分布

Fig.6 Pressure surface chart of xz plane

由图可以看出, 在三维冲击波计算中, 本文的方法仍保持了高分辨率, 激波波阵面约 2 个网格, 对复杂流场, 计算稳定。

通过以上分析, 我们认为, 本文的压缩波判别人工压缩法和 MaxEta 方法, 对冲击波问题, 既提高了分辨率, 又保持了计算的稳定和光滑区的高精度, 是 TVD 格式中的好方法。

参 考 文 献

- 1 郝保田, 张海波. 三维多级扩散室对冲击波传播规律的影响. 计算物理, 1997, 14(4, 5): 572
- 2 Harten Ami. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. Journal of Computational Physics, 1983, 49: 357 ~ 393
- 3 Wang J C T, Widhopf G F. A High-resolution TVD Finite Volume Scheme for the Euler Equations in Conservation Form. Journal of Computational Physics, 1989, 84: 145 ~ 173

A NEW ARTIFICIAL COMPRESSION METHOD FOR DISTINGUISHING COMPRESSSION WAVE IN TVD SCHEME

Zhang Haibo^{a, b}, Bai Chunhua^a, Ding Jing^a, Hao Baotian^b

(a. Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081)

(b. Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an, 710024)

ABSTRACT For TVD scheme, a new artificial compression method and a kind of MaxEta method are given. Using these methods, we study the problems of plane shock wave propagation-reflection and the three-dimensional shock wave in diffusing tunnel. Very good results are obtained.

KEY WORDS TVD, artificial compression, MaxEta method, numerical simulation, shock wave