

# 弹性基础上简支方板在阻尼介质中的塑性动力响应<sup>①</sup>

于政文<sup>a</sup> 胡振彬<sup>a</sup> 张春雨<sup>b</sup>

(a. 东北大学理学院 沈阳 110006)

(b. 大庆石油学校 大庆 163254)

摘要 通过 Laplace 变换,用矩量法求解弹性基础上简支方板在阻尼介质中的塑性动力响应,得出解析表达式。

关键词 塑性动力响应 弹性基础 阻尼介质

中图法分类号 TU313.3

## 1 引言

薄板是组成工程结构的基本构件,研究其在强动载荷作用下的非弹性动力响应,已成为现代工程领域中十分关注的课题<sup>[1]</sup>。在板的塑性动力问题中考虑阻尼介质及弹性基础的影响是个较复杂的问题,难以求出解析解,近几年来人们尝试用半解析法解决这类问题。刘福林<sup>[2]</sup>用加权残值法分析了阻尼介质对简支方板塑性动力响应的影晌。文献[3]求解出简支方板在弹性基础上的塑性动力响应,文献[4]分析了薄壳的塑性动力响应。我们用矩量法求解在弹性基础上四周简支刚塑性方板在阻尼介质中,承受均布横向载荷作用下的塑性动力响应。

## 2 基本方程

板的运动方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q + \mu \ddot{w} + \alpha \dot{w} + Kw \quad (1)$$

式中:  $\mu$  为板的面积质量;  $\alpha$  为阻尼系数;  $K$  是基础模量;  $w$  为挠度。采用最大弯矩极限条件

$$\max(|M_1|, |M_2|) = M_0 \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}$$

在弹性基础上处于阻尼介质中的四周简支刚塑性方板(见图 1),受到均布冲击载荷  $q(t) = q$  的作用,时间为  $\tau$ 。由于对称性,只要讨论板的四分之一( $OAB$  部分)就够了。

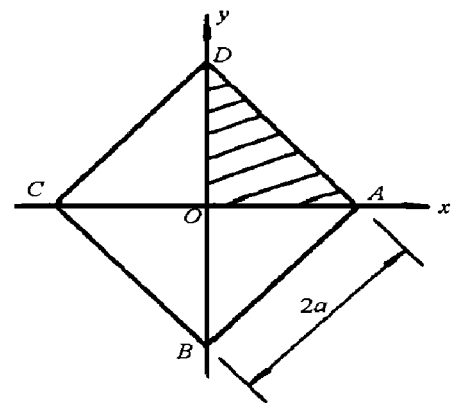


图 1 简支方板

Fig. 1 Simple square plate

① 于政文:男,1956年生,硕士,副教授。  
1998-06-11 收到原稿,1999-03-11 收到修改稿。

板的边界为  $x=0, y=0, (x+y)/(\sqrt{2}a)=1$ 。

$$\text{引入变量} \quad Z = (x+y)/(\sqrt{2}a) \quad (3)$$

则区域  $OAB$  为  $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq Z \leq 1$ 。

设方板的塑性铰线为两条对角线, 则边界条件为

$$\begin{cases} x=0 \text{ 时, } M_n = M_x = M_0 \\ y=0 \text{ 时, } M_n = M_y = M_0 \\ x=y=0 \text{ 时, } M_{xy} = 0 \\ Z=1 \text{ 时, } M_n = \frac{1}{2}(M_x + M_y) + M_{xy} = 0 \quad w = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{初始条件为} \quad w(x, y, 0) = 0 \quad \dot{w}(x, y, 0) = 0 \quad (5)$$

### 3 问题的求解

设冲击载荷  $q$  为中载,  $q_0 < q \leq 2q_0$ , 其中  $q_0 = 6M_0/a^2$  为静态极限载荷, 板中不出现移动塑性铰线。板的运动分为载荷作用期间 ( $0 \leq t \leq \tau$ ) 和卸载以后 ( $\tau < t \leq t_f$ ) 两个阶段, 这里  $t_f$  为终止运动时间。

#### 3.1 第一阶段 ( $0 \leq t \leq \tau, q(t) = q$ )

先对板的运动方程和边界条件进行 Laplace 变换, 并考虑到  $M_x, M_{xy}, M_y$  都是  $w$  的二阶偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\frac{q}{s} + Kw\tilde{w} + \alpha s\tilde{w} + \mu s^2 \tilde{w} \quad (6)$$

$$x=0 \text{ 时, } M_x = \frac{M_0}{s} \quad (7)$$

$$y=0 \text{ 时, } M_y = \frac{M_0}{s} \quad (8)$$

$$x=y=0 \text{ 时, } M_{xy} = 0 \quad (9)$$

$$Z=1 \text{ 时, } \frac{1}{2}(M_x + M_y) + M_{xy} = 0, \tilde{w} = 0 \quad (10)$$

式中:  $M_x, M_{xy}, M_y, \tilde{w}$  分别为  $M_x, M_{xy}, M_y, w$  的 Laplace 变换,  $s$  为复参变量。综合各种因素, 取试函数为

$$M_x = C_0 + C_1 x^2 + C_2 x^2 Z = C_0 + C_1 x^2 + C_2 x^2 (x+y)/(\sqrt{2}a) \quad (11)$$

$$M_{xy} = C_1 xy + C_2 xy Z = C_1 xy + C_2 xy (x+y)/(\sqrt{2}a) \quad (12)$$

$$M_y = C_0 + C_1 y^2 + C_2 y^2 Z = C_0 + C_1 y^2 + C_2 (x+y)y^2/(\sqrt{2}a) \quad (13)$$

$$\tilde{w} = C_3(1-Z) = C_3[1 - (x+y)/(\sqrt{2}a)] \quad (14)$$

式中:  $C_i (i=1, 2, 3)$  为待定常数。式(12)、(14)分别满足式(9)和式(10)第二式, 再由边界条件(7)、(8)、(10)第一式得

$$\begin{cases} C_0 = M_0/s \\ C_1 + C_2 = -M_0/(sa^2) \end{cases} \quad (15)$$

将试函数(11)~(14)代入(6)式得到残值

$$R_1 = \frac{\partial^2 M_x}{\alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\alpha \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{q}{s} - K\tilde{w} - \alpha s \tilde{w} - \mu s^2 \tilde{w} = 6C_1 + 12C_2 Z - C_3(K + \alpha s + \mu s^2)(1 - Z) + \frac{q}{s} \quad (16)$$

用加权残值法中的矩量法消除残值<sup>[5]</sup>

$$\int_0^1 R_1 dZ = 0, \quad \int_0^1 R_1 Z dZ = 0 \quad (17)$$

$$\text{得} \quad \begin{cases} 12C_1 + 12C_2 - C_3(K + \alpha s + \mu s^2) = -2q/s \\ 18C_1 + 24C_2 - C_3(K + \alpha s + \mu s^2) = -3q/s \end{cases} \quad (18)$$

联立(15)、(18)式的四个式子,并考虑  $q_0 = 6M_0/a^2$ ,得

$$C_0 = \frac{M_0}{s}, \quad C_1 = -\frac{2q_0 - q}{6s}, \quad C_2 = -\frac{q - q_0}{6s}, \quad C_3 = \frac{2(q - q_0)}{s(K + \alpha s + \mu s^2)} \quad (19)$$

将(19)式代入试函数,并进行 Laplace 逆变换,得方板第一阶段运动的塑性动力响应

$$\begin{cases} M_x = M_0 - \frac{x^2}{6} [(2q_0 - q) + (q - q_0)Z] \\ M_{xy} = -\frac{xy}{6} [(2q_0 - q) + (q - q_0)Z] \\ M_y = M_0 - \frac{y^2}{6} [(2q_0 - q) + (q - q_0)Z] \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} w = 2(q - q_0) \left[ \frac{1}{K} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4K\mu}} \left( \frac{e^{-d_1 t}}{d_1} - \frac{e^{-d_2 t}}{d_2} \right) \right] (1 - Z) \\ \dot{w} = \frac{2(q - q_0)}{\sqrt{\alpha^2 - 4K\mu}} (e^{-d_2 t} - e^{-d_1 t}) (1 - Z) \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $\begin{cases} d_1 \\ d_2 \end{cases} = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4K\mu}) / (2\mu)$ , 且  $\alpha^2 - 4K\mu > 0$ .

### 3.2 第二阶段 ( $\tau < t \leq t_f, q(t) = 0$ )

当  $t = \tau$  时,突然卸去外载  $q(t) = 0$ ,  $t = t_f$  时运动停止。此阶段边界条件和屈服条件与第一阶段相同,而板的运动方程与初始条件不同。本阶段运动方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\alpha \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \mu \ddot{w} + \alpha \dot{w} + Kw \quad (22)$$

按 3.1 节类似的方法得本阶段塑性动力响应

$$\begin{cases} M_x = M_0 - \frac{1}{6} q_0 x^2 (2 - Z) \\ M_{xy} = -\frac{1}{6} q_0 xy (2 - Z) \\ M_y = M_0 - \frac{1}{6} q_0 y^2 (2 - Z) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases}
 w = \left[ -\frac{2q_0}{K} + \frac{2q\mu}{K\sqrt{\alpha^2 - 4K\mu}} (d_1 e^{-d_2(t-\tau)} - d_2 e^{-d_1(t-\tau)}) - \right. \\
 \left. \frac{2(q-q_0)\mu^2}{K(\alpha^2 - 4K\mu)} (d_1^2 e^{-d_2 t} + d_2^2 e^{-d_1 t}) + \frac{2(q-q_0)\mu}{\alpha^2 - 4K\mu} (e^{-d_2 t} + e^{-d_1 t}) \right] (1-Z) \quad (24) \\
 \dot{w} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 4K\mu}} \left[ q (e^{-d_1(t-\tau)} - e^{-d_2(t-\tau)}) + (q-q_0)(e^{-d_2 t} - e^{-d_1 t}) \right] (1-Z)
 \end{cases}$$

令  $\dot{w}(x, y, t_f) = 0$ , 得板终止运动时间

$$t_f = \frac{\mu}{\alpha} \ln \left| \frac{(q-q_0) - q e^{d_1 \tau}}{(q-q_0) - q e^{d_2 \tau}} \right| \quad (25)$$

### 4 结 束 语

(1)前面所得方板的挠度和速度公式(21)、(24), 及终止运动时间(25)式中, 令  $K \rightarrow 0$ , 所得结果与阻尼介质中简支方板运动情况相同<sup>[2]</sup>。若再令  $\alpha \rightarrow 0$ , 则与简支方板结果相同<sup>[6]</sup>。

(2)本文的方法可方便地得到板的弯曲内力公式(20)、(23), 两式与文献[3]的结果相同, 这说明板的弯曲内力只与外载、静态极限载荷及位置有关, 而与阻尼介质及弹性基础无关。阻尼介质和弹性基础只影响板的挠度、运动速度及终止运动时间。

(3)根据本文所得公式(25)、(24), 令  $\tau = 1, \mu / (\alpha\tau) = 1$ , 并进行无量纲化处理, 板终止运动时间  $t_f$ 、方板中点残余挠度  $w_0$  与弹性基础模量  $K$  的关系, 见图 2、图 3。可以看出, 当弹性基础模量  $K$  增加时, 板的终止运动时间及板的残余挠度都会逐渐减小。

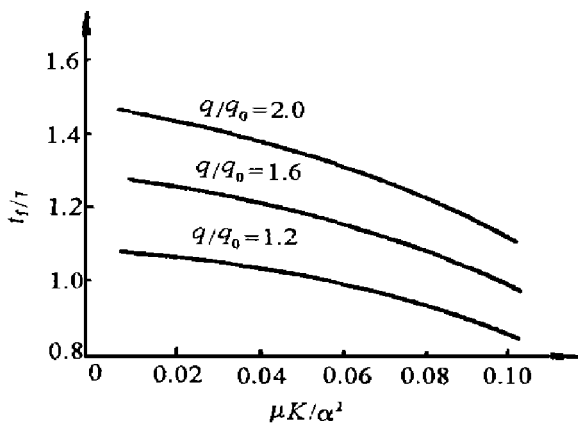


图 2  $t_f$  与  $K$  的关系  
Fig.2  $t_f$  vs  $K$  relationship

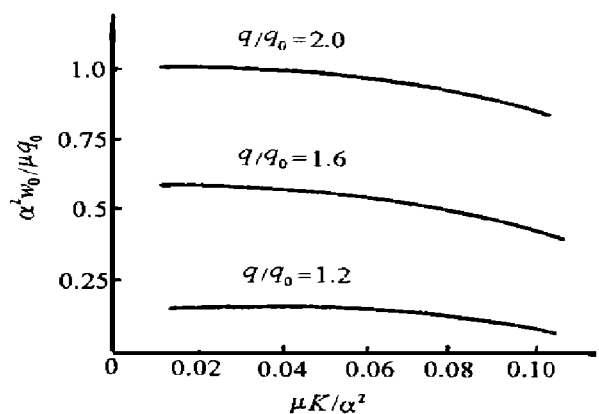


图 3  $w_0$  与  $K$  的关系  
Fig.3  $w_0$  vs  $K$  relationship

### 参 考 文 献

- 1 杨嘉陵, 余同希, 王 仁. 结构塑性动力响应当前的研究进展和重点. 力学进展, 1993, 23(1): 23 ~ 33
- 2 刘福林. 用加权残值法分析阻尼介质对薄板塑性动力响应的影响. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(1): 67 ~ 76
- 3 于政文. 简支方板在弹性基础上的塑性动力响应. 爆炸与冲击, 1997, 17(4): 347 ~ 352
- 4 刘福林. 分析薄壳塑性动力响应问题的一种新方法. 爆炸与冲击, 1991, 11(2): 160 ~ 169
- 5 徐次达. 固体力学加权残值法. 上海: 同济大学出版社, 1987. 1 ~ 5
- 6 杨桂通, 熊祝华. 塑性动力学. 北京: 清华大学出版社, 1984. 201 ~ 206

**THE DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF A SQUARE-PLATE  
SIMPLY SUPPORTED ON THE ELASTIC FOUNDATION  
IN THE DAMPING MEDIUM**

Yu Zhengwen<sup>a</sup>, Hu Zhenbin<sup>a</sup>, Zhang Chunyu<sup>b</sup>

(a. *Northeastern University, Shenyang, 110006*)

(b. *Daqing Petroleum School, Daqing, 163254*)

**ABSTRACT** This article studies the problem of the dynamic plastic response of a square plate simply supported on the elastic foundation in the damping medium, by us of Laplace transformation and the moments, analytic expressions of the dynamic plastic response of this plates are developed.

**KEY WORDS** dynamic plastic response, elastic foundation, damping medium