

文章编号: 1001-1455(2000)01-0007-06

# 刚塑性自由梁中部在横向冲击下的 初始变形模式<sup>①</sup>

穆建春, 张铁光

(太原理工大学工程力学系应用力学研究所, 山西 太原 030024)

摘要: 研究了均匀矩形截面刚塑性自由梁中部在小尺寸、平头、圆柱形刚性弹体撞击下的三种变形模式, 即梁的刚体平动、单铰变形模式和三铰变形模式。考虑了刚性子弹冲击后在梁上形成的剪切冲塞, 分析了子弹通过冲塞作用在梁中部的剪切力可能引起的梁的弯曲变形, 找出了梁的初始变形模式对子弹大小、梁的尺寸和材料性能的依赖关系。

关键词: 撞击; 自由梁; 刚塑性; 变形模式

中图分类号: O347.1 文献标识码: A

## 1 引 言

Lee 等<sup>[1]</sup>分析了刚塑性自由梁中部受集中力作用下的弯曲变形, 指出随集中力的增加自由梁的变形可分为三种模式: 刚体平动, 单铰变形模式和三铰变形模式。Woodward 等<sup>[2]</sup>关于自由梁的实验表明, Lee 等的刚塑性分析方法给出的结果与实验结果符合较好。

自由梁在各种载荷下变形模式的研究不但具有理论意义, 也具有一定的工程实践意义。例如, 卫星及空间站的许多部件、细长火箭等可以简化为梁。研究这类物体受到其它物体撞击后的变形模式具有一定的重要性。Jones 等<sup>[3]</sup>在分析中发现, 在均匀脉冲作用下, 均匀截面的自由梁不会发生弯曲变形; 均匀截面自由梁在三角形分布脉冲作用下, 初始输入能量 75% 转换为刚体平动, 仅有 25% 的能量转化为梁的塑性变形能。Yu 等<sup>[4]</sup>考虑了弹性对自由梁在脉冲载荷下的塑性变形的影响, Yang 等<sup>[5]</sup>考虑了集中阶跃载荷作用点的位置对刚塑性自由梁变形的影响。席丰等<sup>[6]</sup>考虑了自由梁受集中质量横向撞击的刚塑性动力响应, 在分析中均假定初始时刻的冲击力为无限大, 这一假定与实际冲击过程不符, 而且也没有考虑冲击物体与梁接触区的局部变形过程。

事实上, 当自由梁受到一个物体的冲击时, 梁整体的弯曲变形模式取决于局部变形区附近接触力的大小随时间的变化。有许多因素影响接触力的大小, 如冲击物的形状及大小、梁的尺寸及冲击物和梁的材料性能等。梁在平头弹体撞击作用下, 如果子弹的直径小于梁的宽度, 在接近和高于临界穿透速度下子弹在梁上会形成剪切型冲塞, 假定冲塞边界的剪切力与冲塞和

① 收稿日期: 1999-01-26; 修订日期: 1999-06-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(19842001, 19872048); 山西省留学回国人员科研基金项目; 教育部留学回国人员科研启动基金项目。

作者简介: 穆建春(1962—), 女, 硕士, 副教授。

梁的连接面积成正比,则剪切力在冲塞形成的初瞬时为最大。我们将研究刚塑性矩形截面自由梁中部在平头、圆柱形刚性弹体正冲击下的初始变形模式。

## 2 模型及假定

考虑一根长度为  $2l$ 、宽度为  $2b$ 、厚度为  $h$ 、线质量为  $\rho$  的矩形截面自由梁  $EF$  (见图 1(a)), 在梁的中部受到半径为  $R$  ( $R < b$ )、质量为  $m$  的圆柱形平头子弹的冲击。为简化分析,采用下列基本假定: (1) 梁的材料为理想刚塑性材料,屈服应力为  $\sigma_y$ ; (2) 材料的应变率效应忽略不计; (3) 子弹以接近或高于临界穿透速度冲击梁后,在梁上会形成一剪切冲塞 (见图 1(b)), 若子弹通过冲塞作用在梁上的剪切力与冲塞和梁的连接面积成正比,则剪切力在冲塞形成的初瞬时为最大,初瞬时的剪力  $Q_0 = 2\pi R h \tau_u$ 。这里  $\tau_u$  为材料塑性大变形下的流动剪应力,考虑到局部变形区大变形引起的强化效应和 Mises 屈服准则,取  $\tau_u = \sigma_u / \sqrt{3}$ ,  $\sigma_u$  为材料的强度极限。

由假定(1)可知,梁任一横截面处的塑性极限弯矩  $M_p = h^2 \sigma_y b / 2$ ; 由冲塞以外横截面处的正应力所提供的梁中点的塑性极限弯矩  $M_0 = h^2 \sigma_y (b - R) / 2$ , 见图 1(c)。

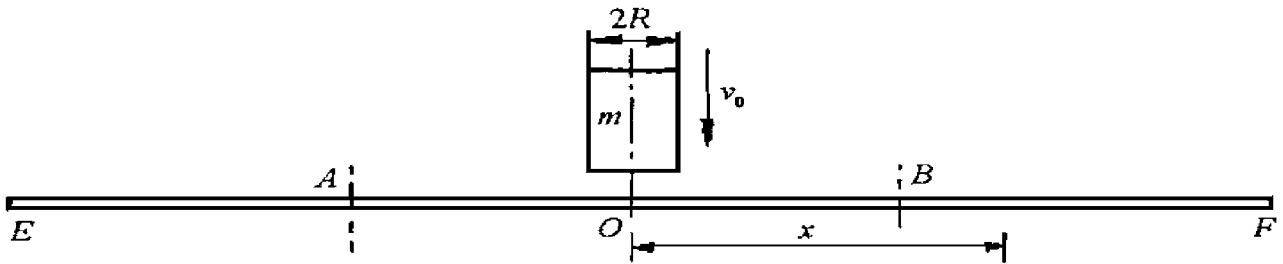


图 1(a) 理想刚塑性自由梁中部受到平头子弹的冲击

Fig. 1(a) Rigid-plastic free-free beam subjected to normal impact by a flat-nosed missile at the middle of its span

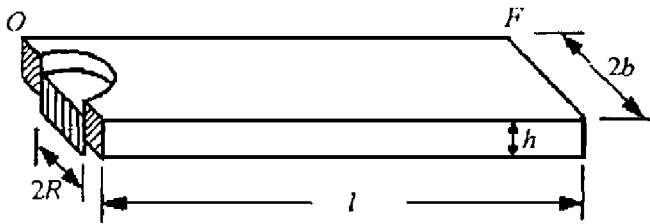


图 1(b) 子弹作用于梁上在通过冲击点处形成了冲塞

Fig. 1(b) A plug formed by the impact of the missile at impact centre

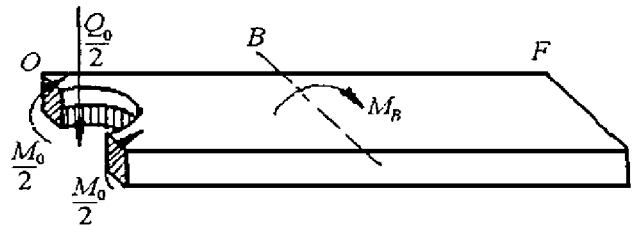


图 1(c) 作用于通过冲击点横截面上的力

Fig. 1(c) Forces acting on the cross section of the beam through the impact centre

## 3 分析

### 3.1 刚体平动

当剪切力的大小不足以引起梁的弯曲变形时,梁将作刚体平动,由梁作刚体平动的受力 (图 2(a)) 可得梁的运动方程

$$Q_0 = 2a_0 l \rho \quad (1)$$

式中:  $a_0$  是梁刚体平动的加速度。梁上最大弯矩  $M_{\max}$  发生在梁的中部, 有

$$M_{\max} = a_0 \rho l^2 / 2 \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得最大弯矩  $M_{\max} = lQ_0/4$ 。

### 3.2 单铰变形模式

当最大弯矩  $M_{\max}$  与梁中点的塑性极限弯矩  $M_0$  相等时, 梁中部会产生一个塑性铰。由此可知产生一个塑性铰的条件为

$$lQ_0/4 = M_0 \quad (3)$$

将  $Q_0, M_0$  代入(3)式并整理得无量纲方程

$$y = k - 1 \quad (4)$$

式中:  $y = c_0 l/h$ ,  $c_0 = \pi \tau_u / \sigma_y$ ,  $k = b/R$ 。

由(4)式可知, 当  $y < k - 1$  时梁将作刚体平动, 当  $y > k - 1$  时, 除了局部剪切变形外, 梁将发生弯曲变形。现考虑在自由梁中点处形成一个塑性铰的情况, 由对称性可仅考虑半根自由梁的受力状况。梁  $OF$  段的受力图如图 2(b)所示,  $OF$  段的运动方程为

$$Q_0/2 = \rho l a_0 - l^2 \rho \ddot{\theta}_1/2 \quad (5)$$

$$M_0 = \int_0^l (\rho a_0 - \rho x \ddot{\theta}_1) x dx = \rho a_0 l^2/2 - \rho \ddot{\theta}_1 l^3/3 \quad (6)$$

式中:  $a_0$  和  $\ddot{\theta}_1$  分别为梁中点的加速度和  $OF$  段的角加速度。 $OF$  段上任一截面的剪力

$$Q(x) = Q_0/2 - \rho x a_0 + x^2 \ddot{\theta}_1/2 \quad (7)$$

从(5)~(7)式中消去  $a_0$  和  $\ddot{\theta}_1$ , 并令  $\lambda = x/l$ ,  $\nu = Q_0 l/M_0$ , 可得

$$Q(x)L/M_0 = \nu/2 - 2\lambda(\nu - 3) + 3\lambda^2(\nu - 4)/2 \quad (8)$$

梁上的弯矩极值点应满足  $\partial M(x)/\partial x = 0$ , 即在该点的剪力为零, 代入(8)式可以求得弯矩绝对值最大的点的位置

$$\lambda = \frac{\nu}{3(\nu - 4)} \quad (9)$$

记该点为  $B$  点。 $B$  点的弯矩可借助于(5)、(6)、(9)式求得

$$M_B = M_0 \left[ \frac{1}{27} \left( \frac{\nu}{\nu - 4} \right)^2 (2\nu - 9) - 1 \right] \quad (10)$$

### 3.3 三铰变形模式

当  $B$  点的弯矩达到塑性极限弯矩  $M_p$  时, 将在  $B$  点形成一个塑性铰。由对称性, 可知在梁上与  $B$  点对称的  $A$  点也会形成一个塑性铰, 这时梁的变形称为三铰变形模式, 见图 2(c)。将  $M_B = M_p = h^2 \sigma_y b/2$ ,  $\nu = Q_0 l/M_0 = 4y/(k - 1)$  及  $M_0 = h^2 \sigma_y (b - R)/2$ ,  $Q_0 = 2\pi R h \tau_u$  代入(10)式, 可得无量纲代数方程

$$8y^3 + (-63k + 36)y^2 + (108k^2 - 162k + 54)y + (-54k^3 + 135k^2 - 108k + 27) = 0 \quad (11)$$

(11)式是梁由单铰变形模式向三铰变形模式转换的临界条件。对于不同的梁半宽与子弹半径比值  $k$ , 可以从(11)式求出相应的无量纲数  $y^*$ , 当给定的  $y = c_0 l/h$  大于等于  $y^*$  时, 梁的变形是三铰变形模式, 这时塑性铰  $B$  的位置取决于梁半宽与子弹半径比  $k$  及梁的无量纲参数  $y^*$ 。当  $y > y^*$  时, 塑性铰  $B$  到 midpoint  $O$  的距离  $\xi l$  ( $0 < \xi < 1$ ) 可由下式求得

$$-2y\xi^3 + [4y + 3(k - 1)]\xi^2 - (2y + 12k - 6)\xi + 3(2k - 1) = 0 \quad (12)$$

方程(12)源于  $OB$  段及  $BF$  段的动力学方程和铰处的运动学连续性条件。

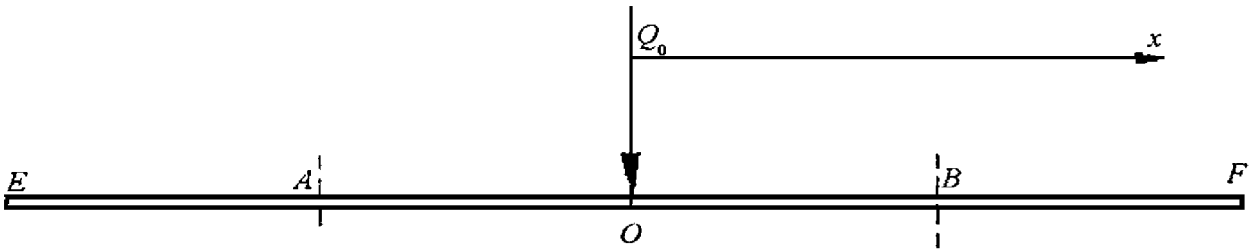


图 2(a) 自由梁作刚性平动的受力图

Fig.2(a) Free body diagram when the beam moving as a rigid body

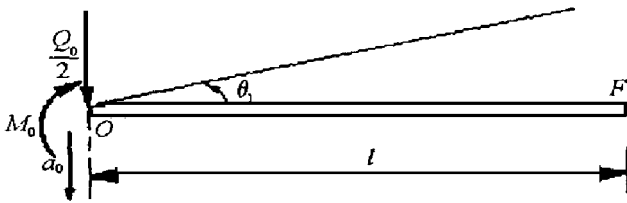


图 2(b) 在自由梁中部形成单铰时的受力图

Fig.2(b) Free body diagram when a single hinge formed at the impact centre

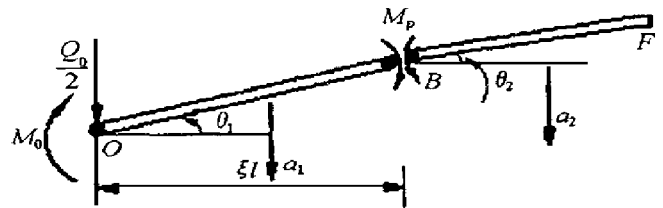


图 2(c) 在自由梁形成三铰时梁的受力图

Fig.2(c) Free body diagram when three hinges formed in the beam

### 4 讨 论

由(4)式和(11)式得到的计算结果如图3所示,其中P线为(4)式的计算结果,D线为(11)式的计算结果。从图上可以看出D线非常接近直线。图3可被这两条线划分为三个区域:P线以下的区域为刚体移动区,P线与D线之间的区域为单铰变形模式区,D线以上的区域为三铰变形模式区。

为了定量地说明自由梁中部受平头弹体冲击后,梁的长厚比  $2l/h$  及梁半宽与子弹半径之比  $b/R$  对梁初变形模式的影响,一些计算结果列于表1。这里,梁材料的强度极限与屈服应力之比取  $\sigma_u/\sigma_y=1.5$ ,材料强化参数  $\pi \tau_u/\sigma_y = \pi \sigma_u/(\sqrt{3}\sigma_y)=2.7$ 。

从表1可以看到:仅当子弹的直径比梁的宽度小很多时,梁的运动为刚体平动;在这种情况下,梁不会发生整体的弯曲变形。

从表1还可以看到:随着自由梁长度或子弹直径的增加,梁的整体弯曲变形的重要性也增加。对较长的梁(如梁的长厚比  $2l/h=40$ ),即使子弹的直径比梁的宽度小很多(例如子弹的直径接近于梁的宽度的  $1/10$ )梁也会发生三铰弯曲变形。在自由梁发生单铰或三铰弯曲变形的情况下,如果子弹的冲击速度小于临界穿透速度,除了一部分子弹冲击动能为冲塞周围的局部剪切变形所消耗以外,子弹动能的其余部分将转化为梁的弯曲变形能以及结构的平动和转

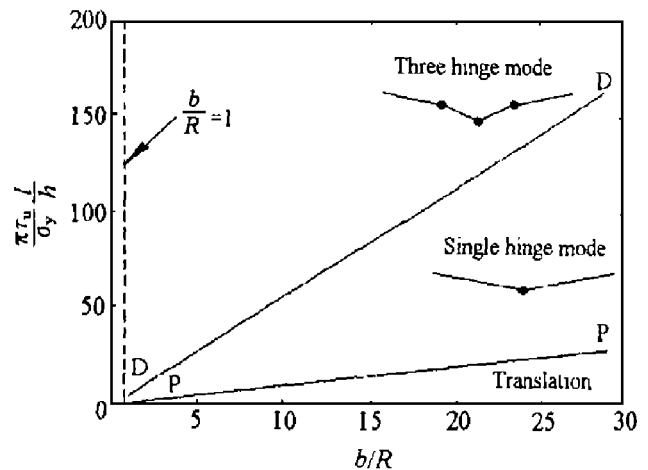


图 3 自由梁中部受弹体冲击后的变形模式图

Fig.3 Deformation modes of the free-free beam subjected to impact by the missile at the middle of its span

表 1 自由梁的尺寸、子弹直径与梁的变形模式的关系

Table 1 The dependence of the deformation modes of the beam on the relative size of the beam and missile

$2l/h$	$b/R$	变形模式
10	$> 14.5$	刚体平动
	$2.76 \sim 14.5$	单铰模式
	$1 \sim 2.76$	三铰模式
20	$> 28.0$	刚体平动
	$5.11 \sim 28.0$	单铰模式
	$1 \sim 5.11$	三铰模式
40	$> 55.0$	刚体平动
	$9.83 \sim 55.0$	单铰模式
	$1 \sim 9.83$	三铰模式

动动能；如果子弹的冲击速度大于临界穿透速度，子弹穿透靶体后还保持了一部分残余动能。各部分能量在子弹冲击动能中所占比例不但取决于自由梁的长厚比  $2l/h$ 、梁半宽与子弹半径比  $b/R$  及材料强化参数  $\pi \tau_u / \sigma_y$ ，还取决于子弹的冲击速度。能量分配的量化估算，需要对结构整个变形过程进行动力学分析，这些分析将另文讨论。

梁的长厚比  $2l/h = 10, 20, 40$  时，梁发生三铰变形的梁半宽与子弹半径之比的最大值（或使梁刚刚形成三铰变形时的临界值） $b/R = 2.76, 5.11, 9.83$ ，这时塑性铰  $B$  的无量纲初始位置  $\xi_0$  可由 (9) 式及  $\nu = 4y / (k - 1)$  计算得到， $\xi_0 = 0.383, 0.393, 0.399$ 。Lee 等<sup>[1]</sup> 的分析中未考虑自由梁冲击区的局部变形，梁的长厚比为任何值，当作用在中点的集中力刚刚使梁形成三铰变形时，塑性铰  $B$  的无量纲位置  $\xi_0 = 0.404$ 。由于考虑了局部变形对梁中点塑性弯矩的影响，本文计算的使梁刚刚产生三铰变形临界状态下塑性铰  $B$  的无量纲初始位置  $\xi_0$  比 Lee 等的计算结果要小一些。

当梁半宽与子弹半径之比  $b/R$  小于使得梁发生三铰变形的最大值（或临界值）时，塑性移行铰  $B$  的无量纲初始位置  $\xi$  可由 (12) 式计算得到；图 4 中的三条曲线分别给出了梁的长厚比  $2l/h = 10, 20, 40$  时，铰  $B$  无量纲初始位置  $\xi$  随梁半宽与弹体半径之比  $b/R$  的变化。由图可以看到，对于梁的不同长厚比，塑性铰  $B$  的无量纲初始位置随梁半宽与弹体半径之比  $b/R$  的减少（即子弹半径的增加）而减少，即子弹半径越大，塑性铰  $B$  的无量纲初始位置越接近冲击点（中点）；这是由于子弹半径越大，冲塞周围形成的初始剪应力越大，而中点的塑性弯矩越小。Lee 等<sup>[1]</sup> 在未考虑自由梁局部变形的分析中发现，塑性铰  $B$  的初始位置随作用在梁中点的集中载荷的增加而靠近中点，本文分析的结果与他们的结果是一致的。

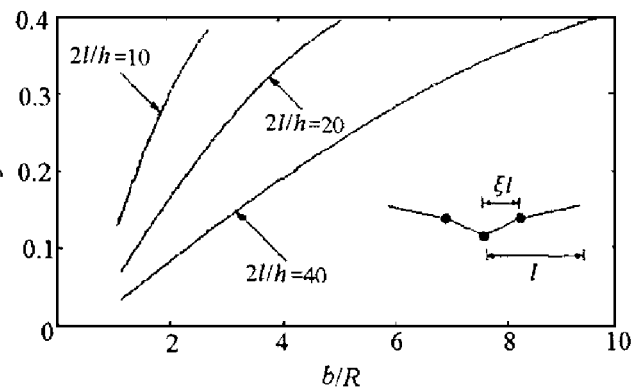


图 4 塑性铰  $B$  的无量纲初始位置随梁半宽与弹体半径之比的变化

Fig.4 Variation of the non-dimensional initial location of the traveling hinge  $B$  with respect to the ratio of half width of beam to missile radius

## 5 结 论

刚塑性自由梁中部在弹体撞击下存在三种变形模式,即梁的刚体平动、单铰变形模式和三铰变形模式。如果冲击物为平头圆柱形弹体,并且弹体的直径比梁的宽度小,在接近或大于临界穿透速度冲击下子弹在梁上会形成剪切型冲塞,子弹通过冲塞作用在梁中部的剪切力在冲塞形成的初瞬时为最大。我们通过在剪切力作用下自由梁的刚塑性变形分析,找出了自由梁的初始变形模式对梁的尺寸、子弹直径和材料性能的依赖关系。分析中发现,只有当梁很短或子弹直径非常小时,自由梁才只作刚体平动。对于较长的梁(长厚比  $2l/h > 40$ ),即使子弹直径比梁宽小很多时,自由梁也会发生三铰变形。梁的整体弯曲变形的重要性随梁长厚比的增加及梁半宽与子弹半径比的减少而增加。

### 参考文献:

- [1] Lee E H, Symonds P S. Large Plastic Deformation of Beam under Transverse Impact [J]. J Appl Mech, 1952, 19: 308 ~ 314.
- [2] Woodward R L, Baxter B J. Experiments on the Impact Bending of Continuous Notched Steel Beams [J]. Int J Impact Engng, 1986, 4: 57 ~ 68.
- [3] Jones N, Wierzbick T. Dynamic Plastic Failure of a Free-free Beam [J]. Int J Impact Engng, 1987, 6(3): 225 ~ 240.
- [4] Yu Tongxi, Yang Jialing, Reid S R. Dynamic Behaviour of Elastic-plastic Free-free Beams Subjected to Impulsive Loading [J]. Int J Solid Structures, 1996, 33(8): 2659 ~ 2680.
- [5] Yang Jialing, Yu Tongxi, Reid S R. Dynamic Behaviour of a Rigid Perfectly Plastic Free-free Beam Subjected to Step-loading at any Cross-section along its Span [J]. Int J Impact Engng, 1998, 12(3): 165 ~ 175.
- [6] 席 丰, 杨嘉陵, 郑晓宁, 等. 梁受集中质量横向撞击的刚-塑性动力响应 [J]. 爆炸与冲击, 1998, 18(1): 54 ~ 61

## Initial Deformation Modes of Rigid-plastic Free-free Beams under Transversal Impact

MU Jian-chun, ZHANG Tie-guang

(Department of Engineering Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract:** An analysis is presented in this paper for predicting the initial deformation modes of a rigid-plastic free-free beam with uniform rectangular cross-section impacted normally by a small size of flat-nosed solid cylindrical missile at the middle of its span. These deformation modes of the beam include translation as a rigid body, single hinge and three hinge modes. At a speed close to or above the ballistic limit, the missile generates a plug at the middle of the beam, at the periphery around the plug the transversal shearing strain is predominant. In this analysis, bending deformation of the beam caused by the shearing force of the missile acting on the beam through the plug is considered. The dependence of the initial deformation modes of the beam on the diameter of the missile, the size and the material property of the beam is obtained.

**Key words:** impact; free-free beam; rigid-plastic; deformation mode