

文章编号: 1001-1455(2000)01-0019-06

三维有限体积 TVD 方法与 冲击波的多级扩散研究^①

张海波^{1,2}, 白春华¹, 丁 敬¹, 郝保田²

(1. 北京理工大学, 北京 100081)

(2. 西北核技术研究所, 陕西 西安 710024)

摘要: 将 TVD 方法应用到三维, 给出三维有限体积 TVD 方法, 并对三维冲击波的多级坑道扩散问题进行了数值模拟, 取得了令人满意的结果。

关键词: 三维 TVD 方法; 有限体积法; 数值模拟; 冲击波

中图分类号: O347.4 文献标识码: A

1 引言

在计算流体动力学中, TVD 方法^[1]虽已得到广泛应用, 但研究集中在一维、二维情况。有关三维有限体积 TVD 方法的报道, 尚未见到。我们在三维直角坐标系中, 采用有限体积法^[2], 将可压缩流体动力学方程组进行离散化, 然后将 TVD 方法应用到三维坐标, 给出三维有限体积 TVD 方法。采用有限体积法, 差分方程是通过对微分方程在有限体积的微元(体元)上积分得到的, 这使得有限体积法得到的差分方程, 适用于不规则网格, 可用于计算具有不规则几何形状的流程。

根据以上方法, 我们运用面向对象编程技术和 C⁺⁺ 语言, 编制完成 TVD3D 面向对象程序。首先进行了平面激波测试, 模拟了平面激波的传播、正反射, 发现对激波的分辨率较高, 波阵面约 1~2 个网格, 波后平整, 激波的反射压强与理论结果的相对误差小于 1%。然后模拟了冲击波的多级坑道扩散这一复杂的三维物理问题, 研究了冲击波的绕射、传播、马赫反射、正规反射等现象。计算结果表明, 三维有限体积 TVD 方法的间断分辨率高, 光滑区的精度高, 且计算稳定。数值结果与实验结果比较, 相当一致。这说明三维有限体积 TVD 方法是一种很好的计算方法, 将 TVD 方法应用到三维, 是成功的。

2 数学物理模型

理想可压缩流体运动的三维直角坐 Euler 型守恒方程组为

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x + \partial \mathbf{G}(\mathbf{U}) / \partial y + \partial \mathbf{M}(\mathbf{U}) / \partial z = \mathbf{0} \quad (1)$$

① 收稿日期: 1999-02-08; 修订日期: 1999-05-18
作者简介: 张海波(1969—), 男, 博士。

式中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ p + \rho w^2 \\ w(\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$E = e + (u^2 + v^2 + w^2)/2 \quad (3)$$

x, y, z 为三维直角坐标, p, ρ, u, v, w 分别为流场中介质的压强、密度、 x 方向速度、 y 方向速度、 z 方向速度, E 为质量总能量, e 为质量内能, t 为时间。状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - (u^2 + v^2 + w^2)/2) \quad (4)$$

采用有限体积法, 将微分方程(1)在有限体积的微元(体元) V 上积分, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} \right) dV = \mathbf{0} \quad (5)$$

运用显式时间差分方法, 对任意六面体网格, 将(5)式离散化, 得到(1)式对应的有限体积法差分方程

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_{i,j,k}} \sum_{l=1}^6 (F_l^n A_l N_{lx} + G_l^n A_l N_{ly} + M_l^n A_l N_{lz}) \quad (6)$$

式中: 上标 n 为时间步, 下标 i, j, k 为网格标号, $\Delta V_{i,j,k}$ 为网格 (i, j, k) 的体积, 下标 l 为网格各面的标号, A_l 为面元 l 的面积, N_{lx}, N_{ly}, N_{lz} 为面元 l 的外法向单位矢量 N_l 的 x, y, z 方向分量。

作为一个特例, 取立方体网格, 则(6)式可写为

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n - (\lambda_x (\tilde{F}_{i+1/2,j,k}^n - \tilde{F}_{i-1/2,j,k}^n) + \lambda_y (\tilde{G}_{i,j+1/2,k}^n - \tilde{G}_{i,j-1/2,k}^n) + \lambda_z (\tilde{M}_{i,j,k+1/2}^n - \tilde{M}_{i,j,k-1/2}^n)) \quad (7)$$

式中: $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{M}$ 为流通量 F, G, M 的高阶 TVD 修正

$$\lambda_x = \Delta t / \Delta x_i, \quad \lambda_y = \Delta t / \Delta y_j, \quad \lambda_z = \Delta t / \Delta z_k \quad (8)$$

Δt 为时间步长, $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ 分别为网格 (i, j, k) 的 x, y, z 方向宽度。

将 TVD 方法应用到三维, 采用三维 TVD 方法, 求解差分方程(7)。记 η_x, η_y, η_z 分别为 F, G, M 的 Jacobi 矩阵 A, B, D 的特征值向量, R_x 和 R_x^{-1}, R_y 和 R_y^{-1}, R_z 和 R_z^{-1} 为相应的右特征向量矩阵和左特征向量矩阵, $l=1, 2, 3, 4, 5$, 为矩阵元素标号。记 $U_{i+1/2,j,k}$ 为 $U_{i,j,k}$ 和 $U_{i+1,j,k}$ 的某种平均值(如算术平均或 Roe 平均), $\eta_{i+1/2}^l, R_{i+1/2}, R_{i+1/2}^{-1}$ 分别为 η_x^l, R_x, R_x^{-1} 的相应于 $A(U_{i+1/2,j,k})$ 的值; 类似地, $U_{i,j+1/2,k}$ 为 $U_{i,j,k}$ 和 $U_{i,j+1,k}$ 的某种平均值, $\eta_{j+1/2}^l, R_{j+1/2}, R_{j+1/2}^{-1}$ 分别为 η_y^l, R_y, R_y^{-1} 的相应于 $B(U_{i,j+1/2,k})$ 的值; $U_{i,j,k+1/2}$ 为 $U_{i,j,k}$ 和 $U_{i,j,k+1}$ 的某种平均值, $\eta_{k+1/2}^l, R_{k+1/2}, R_{k+1/2}^{-1}$ 分别为 η_z^l, R_z, R_z^{-1} 的相应于 $D(U_{i,j,k+1/2})$ 的值。 c 为特征声速。

推导得

$$\eta_x = [u - c, u, u, u, u + c]$$

$$\eta_y = [v - c, v, v, v, v + c]$$

$$\eta_z = [w - c, w, w, w, w + c]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u-c & u & 0 & 0 & u+c \\ v & v & 1 & 0 & v \\ w & w & 0 & 1 & w \\ H-uc & (u^2+v^2+w^2)/2 & v & w & H+uc \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u & u & 1 & 0 & u \\ v-c & v & 0 & 0 & v+c \\ w & w & 0 & 1 & w \\ H-vc & (u^2+v^2+w^2)/2 & u & w & H+vc \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_z &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u & u & 1 & 0 & u \\ v & v & 0 & 1 & v \\ w-c & w & 0 & 0 & w+c \\ H-wc & (u^2+v^2+w^2)/2 & u & v & H+wc \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_x^{-1} &= \begin{bmatrix} (b_1+u/c)/2 & (-b_2u-1/c)/2 & -b_2v/2 & -b_2w/2 & b_2/2 \\ 1-b_1 & b_2u & b_2v & b_2w & -b_2 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (b_1-u/c)/2 & (-b_2u+1/c)/2 & -b_2v/2 & -b_2w/2 & b_2/2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_y^{-1} &= \begin{bmatrix} (b_1+v/c)/2 & -b_2u/2 & (-b_2v-1/c)/2 & -b_2w/2 & b_2/2 \\ 1-b_1 & b_2u & b_2v & b_2w & -b_2 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (b_1-v/c)/2 & -b_2u/2 & (-b_2v+1/c)/2 & -b_2w/2 & b_2/2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_z^{-1} &= \begin{bmatrix} (b_1+w/c)/2 & -b_2u/2 & -b_2v/2 & (-b_2w-1/c)/2 & b_2/2 \\ 1-b_1 & b_2u & b_2v & b_2w & -b_2 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (b_1-w/c)/2 & -b_2u/2 & -b_2v/2 & (-b_2w+1/c)/2 & b_2/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

式中: $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$, $H = c^2 / (\gamma - 1) + (u^2 + v^2 + w^2) / 2$, $b_2 = (\gamma - 1) / c^2$, $b_1 = b_2 (u^2 + v^2 + w^2) / 2$.

以 x 方向流量为例, 说明 TVD 方法的求解过程

$$\alpha_{i+1/2} = \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} (U_{i+1,j,k}^n - U_{i,j,k}^n)$$

$$Q(b) = \begin{cases} |b| & |b| \geq \epsilon \\ \frac{b^2 + \epsilon^2}{2\epsilon} & |b| < \epsilon \end{cases}$$

$$\sigma(\eta'_{i+1/2}) = (Q(\eta'_{i+1/2}) - \lambda_i (\eta'_{i+1/2})^2) / 2$$

$$\sigma(\eta'_{i-1/2}) = (Q(\eta'_{i-1/2}) - \lambda_i (\eta'_{i-1/2})^2) / 2$$

$$g_i^l = \min \text{mod}(\sigma(\eta_{i+1/2}^l) \alpha_{i+1/2}^l, \sigma(\eta_{i-1/2}^l) \alpha_{i-1/2}^l)$$

$$\beta_{i+1/2}^l = \begin{cases} (g_{i+1}^l - g_i^l) / \alpha_{i+1/2}^l & \alpha_{i+1/2}^l \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+1/2}^l = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_{i+1/2}^l = -Q(\eta_{i+1/2}^l + \beta_{i+1/2}^l) \alpha_{i+1/2}^l + (g_i^l + g_{i+1}^l)$$

可得带有二阶修正的流通量

$$F_{i+1/2,j,k} = F_{i+1/2,j,k} + R_{i+1/2} \Phi_{i+1/2}^l / 2$$

y 方向和 z 方向流通量的求解依此类推。至此, 差分方程(7)得解。再由状态方程(4)求得压强 $p_{i,j,k}^{n+1}$, 完成一次时间循环。这便是三维 TVD 方法的简要过程。

计算中, 对 g 因子的修正, 采用作者提出的压缩波判别人工压缩法; Q 函数中控制因子 ϵ 的选取, 采用作者提出的 MaxEta 方法。其中, $\min \text{mod}(x, y) = \min(|x|, |y|) \cdot (\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)) / 2$ 。

3 数值计算及分析

我们根据以上方法, 采用面向对象编程技术(OOP, Object-Oriented Programming)和 C++ 语言, 自行编制完成三维 TVD 程序, 对不同的冲击波问题, 进行了大量的数值计算。下面给出三维冲击波单级坑道扩散和多级坑道扩散的数值结果。

3.1 三维冲击波的单级坑道扩散

计算模型如图 1, 为三维扩散结构的左半部分。当爆炸波经入口坑道传入扩散室, 是三维不定常流体动力学问题。冲击波遇到横截面突然扩大的扩散室, 发生绕射, 并在向前运动时与侧壁发生碰撞, 形成马赫反射。随着马赫杆的增长, 反射波向对称中心会聚, 然后再扩散、再反射, 经历多次振荡后, 形成近似稳定的平面冲击波。传播至扩散室后端, 在出口坑道中形成新的冲击波, 继续传播。

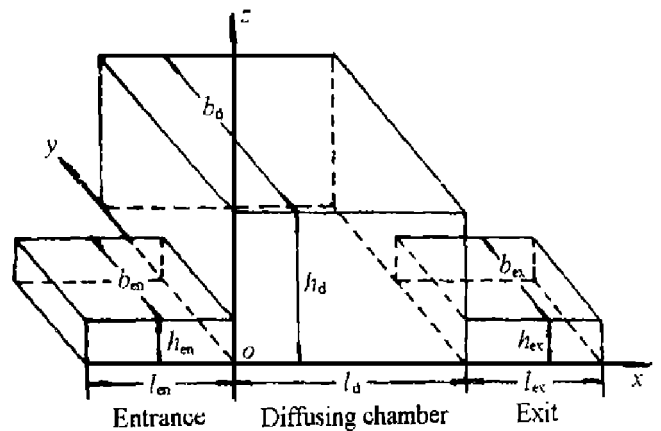


图 1 计算模型示意图

Fig.1 Computation model

取 $b_{en} = h_{en} = 1\text{m}$, $b_d = h_d = 2\text{m}$, $l_d = 12.5\text{m}$ 。爆炸当量 $Q = 1000\text{kt}$, 入口坑道的入射冲击波压强 2MPa 。计算的部分结果如图 2~4 所示。

压强等值线的间隔 0.08MPa , 冲击波进入扩散室的时刻 $t=0$ 。图 2 显示出, 在扩散室的拐角处形成了涡流, 这是因为冲击波在壁面发生了反射, 反射波后是高压区, 拐角处是相对的低压区, 因而导致涡流的生成。图 3 显示已形成清晰的马赫反射。由流场图可看出, 计算对冲击波间断的分辨率很高, 并正确地刻画了流场的细节, 表明计算在光滑区获得了高精度。

扩散室中的冲击波经过多次反射后, 最终形成稳定的平面冲击波。图 4 为不同面积比的扩散室中心轴线上形成的稳定冲击波峰值超压与面积比的关系, Δp_2 为扩散室中形成的稳定冲击波峰值超压, Δp_1 为扩散室入射冲击波峰值超压, S_2, S_1 为扩散室、入口坑道横截面积。实验结果与 Chisnell 理论一致, 数值模拟结果与实验结果比较, 符合得很好。

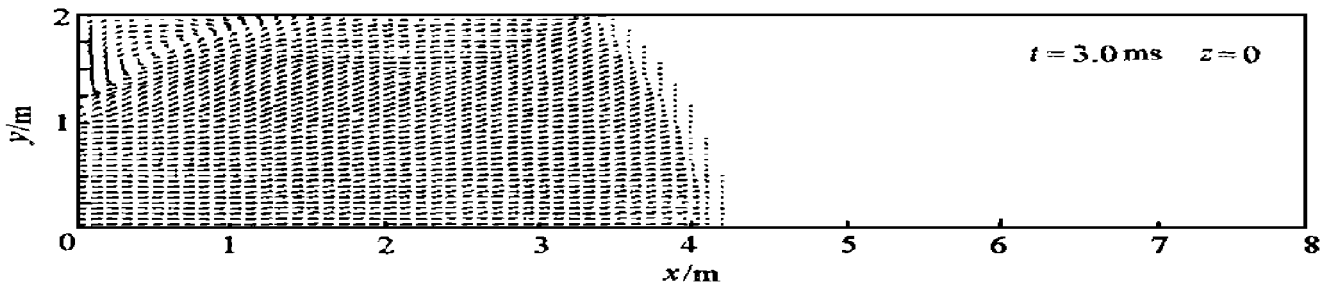


图 2 速度矢量图

Fig.2 Vector chart

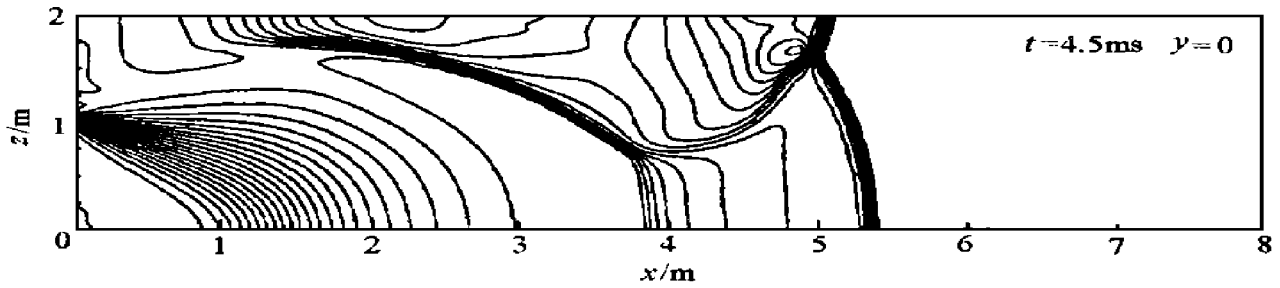


图 3 压强等值线图

Fig.3 Pressure contour chart

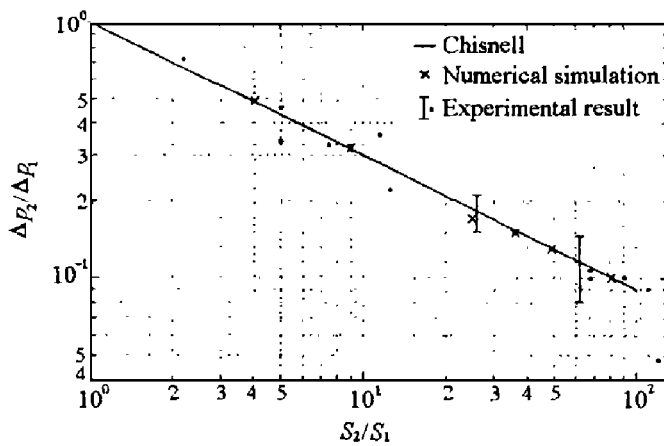


图 4 扩散室中的稳定冲击波峰值超压与面积比的关系

Fig.4 Peak overpressure of steady shock wave in diffusing chamber vs ratio of area

3.2 三维冲击波的多级坑道扩散

在图 1 中, 取 $l_{en}=3m, b_{en}=h_{en}=1m, b_d=2m, h_d=4.5m, l_d=20m, l_{ex}=20m, b_{ex}=h_{ex}=1m$, 三个扩散室尺寸相同, 沿 x 方向首尾相接组成多级扩散室。爆炸当量 $Q=200kt$, 第一扩散室入口坑道的入射冲击波压强 $5MPa$ 。图 5 为三级扩散室入口的压强-时间曲线, 显示了冲击波经各级扩散室的衰减。由图 6 可见, 入射压强 $5MPa$ 的冲击波, 经三级扩散后, 变为平缓的充气过程, 最高充气压强为 $0.64MPa$ 。

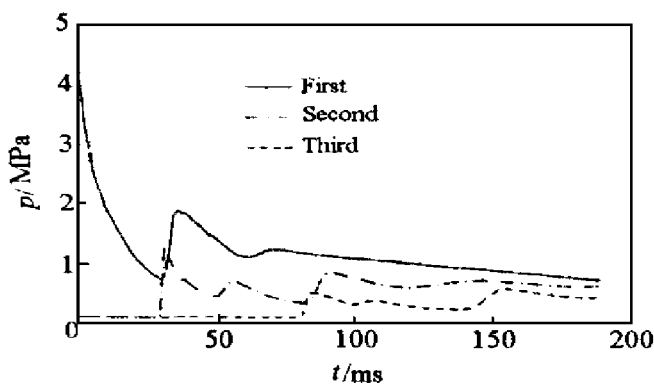


图 5 三级扩散室入口压强

Fig.5 Pressure of entrances of the tubes

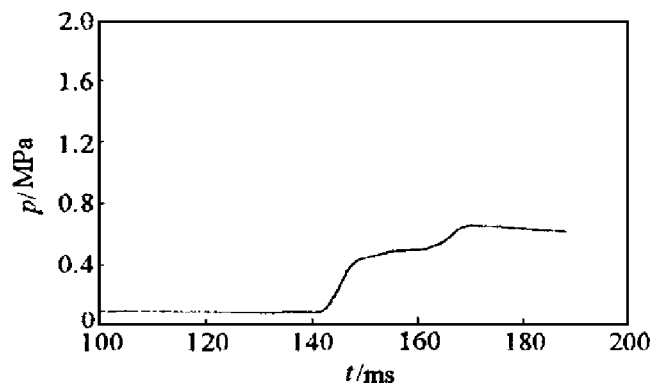


图 6 第三扩散室末端坑道出口压强

Fig.6 Pressure of the third tube's exit

4 结 束 语

本文采用的三维有限体积 TVD 方法以及压缩波判别人工压缩法和 MaxEta 方法,对三维冲击波的多级坑道扩散这一复杂的物理问题,取得了很好的结果,既提高了分辨率,又保持了计算的稳定和光滑区的高精度,且与实验结果符合良好,是值得推广的好方法。此方法可用于其他可压缩流体动力学问题的数值模拟。

参考文献:

- [1] Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, 49: 357 ~ 393.
- [2] Wang J C T, Widhopf G F. A High-resolution TVD Finite Volume Scheme for the Euler Equations in Conservation Form [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 84: 145 ~ 173.

Three-dimensional TVD Finite Volume Scheme and Study of Multi-stage Diffusing of the Shock Wave

ZHANG Hai-bo^{1,2}, BAI Chun-hua¹, DING Jing¹, HAO Bao-tian²

(1. *Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

(2. *Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China*)

Abstract: In this paper, a three-dimensional TVD finite volume scheme in compressible fluid dynamics is developed, together with a new artificial compression method and MaxEta method in this algorithm. Using these methods, we study the case of the three-dimensional shock wave propagation in multi-stage diffusing tunnel. Very good results are obtained.

Key words: three-dimensional TVD method; finite volume method; numerical simulation; shock wave