第 20 卷　第 1 期
2000 年 1 月

爆　炸　与　冲　击
EXPLOSION AND SHOCK WAVES

Vol.20, No.1
Jan., 2000

文章编号：1001-1455(2000)01-0068-06

热力联合冲击下球型空腔热动力响应的封闭解①

尹益辉，陈裕泽，邓礼辉
（中物院结构力学研究所，四川 绵阳　621900）

摘要：以温度和位移为未知变量，建立了当内壁面受到随时间任意分布的热和力联合冲击作用时，含球型空腔无限弹性介质的球对称热传导和热动力响应模型；利用拉普拉斯变换法，导出了温度和位移的封闭解表达式。简要分析了位移表达式的特点与意义；作为特例，可直接由位移表达式得到仅有表面均布压力冲击作用的解。

关键词：球型空腔；爆炸；热传导；热动力响应
中图分类号：O347.5　　　文献标识码：A

1　引　言

不同震源引起的地震，其规律及量级是有差别的。在地震核查中，要求对所监测到的地震信号进行分解识别，以确定震源的形式及量级。这是一个“反问题”，显然这一“反问题”的解决依赖于“正问题”的首先解决。

张庆元等[1]给出了当爆轰载荷 $p(t)=be^{-at}$ 时球型空腔弹性动力响应的位移和应力解，这对工程爆破中弹性介质的一次爆轰响应分析是行之有效的。但是，在自然地震中，其震源可能产生多次应力释放而引发地震波；而且无论在自然地震还是工程爆破中，其震源都同时引起局部高温冲击，虽然热传导是一个“慢过程”，但高温冲击下的热应力波是介质响应的一个值得探讨的因素。因此在理论上给出球型空腔在随时间任意分布爆轰载荷作用下的热动力响应解是必要的。

在文献[1]的基础上，我们给出了在随时间任意分布的爆轰热-力载荷作用下含球型空腔无限弹性介质的温度和位移公式。通过这一“正问题”的解，可以得到与某些形式和量级的震源相应的地震信号的特征，建立信号特征数据库，从而为“反问题”的研究提供前提。

2　控制方程

以空腔中心为坐标原点建立球坐标系，以空腔中爆源起爆时刻为初始时刻，研究含球型空腔无限弹性介质的热动力响应。设爆源施加在内表面上的温度和压力分别为 $f(t)$ 和 $p(t)$。

首先，令 $\theta(r,t)=T(r,t)-T_0-(R/r)f(t)$，这里 T_0、T 分别是初始、即时温度，R 是空腔半径，r 是径向坐标变量，t 是时间变量。这样，对于均质、各向同性热弹性体，可以从Fourier

① 收稿日期：1998-09-23；修订日期：1998-12-28
基金项目：国家自然科学基金项目(19672059)。
作者简介：尹益辉(1965－　)，男，博士研究生，副研究员。

热传导定律和平衡微分方程、几何方程以及本构关系出发，导出以 $\theta(r,t)$表示的球对称热传导控制方程和以径向位移 $u(r,t)$表示的球对称波动控制方程

$$\begin{cases}\kappa\left[\dfrac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right]=\rho c\dfrac{\partial\theta}{\partial t}+\rho cR\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\\ \theta(r,0)=-(R/r)f(0)\\ \theta(R,t)=\theta(\infty,t)=0\\ \dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{2u}{r^2}=\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}+\dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\left[\dfrac{\partial\theta}{\partial r}-\dfrac{R}{r^2}f(t)\right]\\ \dfrac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\dfrac{\partial u}{\partial r}+2\mu\dfrac{u}{r}-(1+\mu)\alpha\dfrac{R}{r}f(t)\right]_{r=R}=-p(t)\\ \left[(1-\mu)\partial u/\partial r+2\mu(u/r)-(1+\mu)\alpha(R/r)f(t)\right]_{r=\infty}=0\\ u(r,0)=\partial u(r,0)/\partial t=0\end{cases}\tag{1}$$

式中：κ 是材料热导率，ρ 是密度，c 是比热，E 是弹性模量，μ 是泊松比，α 是热膨胀系数，$c_0^2=E(1-\mu)/[\rho(1+\mu)(1-2\mu)]$。

3　定解问题的求解

对式(1)中的方程和边值条件进行 Laplace 变换，并利用初值条件，得到

$$\begin{cases}\kappa\dfrac{\partial^2\bar{g}}{\partial r^2}=\rho cs\bar{g}+\rho cRs\bar{f}\\ \dfrac{\bar{g}}{r}\Big|_{r=R}=\dfrac{\bar{g}}{r}\Big|_{r=\infty}=0\\ \dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial r}-\dfrac{2\bar{v}}{r^2}-\dfrac{s^2}{c_0^2}\bar{v}=\dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bar{g}}{\partial r}-\dfrac{\bar{g}}{r^2}\right]+\\ \qquad\dfrac{(1+\mu)R}{E\mu}\left[\alpha E\bar{f}-(1-2\mu)\bar{p}\right]\dfrac{1}{r^2}+\\ \qquad\dfrac{s^2}{c_0^2}\dfrac{(1+\mu)R}{2E\mu}\left[\alpha E\bar{f}-(1-2\mu)\bar{p}\right]-\dfrac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\dfrac{R}{r^2}\bar{f}\\ \left[(1-\mu)\partial\bar{v}/\partial r+2\mu\bar{v}/r\right]_{r=R}=\left[(1-\mu)\partial\bar{v}/\partial r+2\mu\bar{v}/r\right]_{r=\infty}=0\end{cases}\tag{2}$$

式中：$\bar{g}(r,s)=r\theta(r,s)$，$\bar{v}(r,s)=\bar{u}(r,s)-[(1+\mu)R/(2E\mu)][\alpha\mathrm{E}\bar{f}(s)-(1-2\mu)\bar{p}(s)]$。

采用常数变易法[2] 求解非齐次微分方程组边值问题(2)，得到变换变量的解

$$\bar{g}(r,s)=R\bar{f}(s)\left[\mathrm{e}^{\sqrt{\rho c/\kappa}(R-r)\sqrt{s}}-1\right]\tag{3}$$

$$\bar{u}(r,s)=\bar{v}(r,s)+[(1+\mu)R/(2E\mu)][\alpha E\bar{f}-(1-2\mu)\bar{p}]=$$

$$-\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha R\bar{f}\frac{c_0}{r}\left[1+\frac{c_0}{rs}\right]\frac{1}{s-c_0^2\rho c/\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{s}{c_0}(r-R)}+\frac{c_0}{r}\left[\frac{1}{s}+\frac{c_0}{rs^2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{s}{c_0}(r-R)}。$$

$$\left[\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\bar{p}R+\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu}\frac{c_0\alpha\bar{f}}{s+c_0\sqrt{\rho cs/\kappa}}\right]。$$

$$\left[2(1-2\mu)\frac{c_0^2}{R^2s^2}+2(1-2\mu)\frac{c_0}{Rs}+(1-\mu)\right]^{-1}+$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha R\bar{f}\ c_0^2\left[\sqrt{\rho cs/\kappa}+\frac{1}{r}\right]\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\rho cs/\kappa}(r-R)}}{rs(s-c_0^2\rho c/\kappa)} \tag{4}$$

式(3)和(4)中含 $\mathrm{e}^{-\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)\sqrt{s}}$ 项，拉普拉斯逆变换要求 $\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)>0$，因而在 $r=R$ 处的变量 $g(R,t)$ 和 $u(R,t)$ 须直接对变量 $\bar{g}(R,s)$ 和 $\bar{u}(R,s)$ 进行逆变换得到。根据式(3)和(4)，对变量 $\bar{g}(r,s)(r>R)$，$\bar{g}(R,s)$ 和 $\bar{u}(r,s)(r>R)$，$\bar{u}(R,s)$ 进行逆变换，得到

$$\theta(r,t)=g(r,t)/r=\frac{R\sqrt{\rho c/\kappa}}{2\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{R}{r}\right]\cdot \int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-\frac{(\rho c/\kappa)(r-R)^2}{4\tau}}\mathrm{d}\tau-\frac{R}{r}f(t) \qquad r>R \tag{5}$$

$$\theta(R,t)=0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}u(r,t)=&-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{c_0\alpha R}{r}\int_0^{t-\frac{r-R}{c_0}}f\left[t-\frac{r-R}{c_0}-\omega\right]H(\omega)\left[\frac{c_0}{r}F_1(\omega)+\frac{\mathrm{d}F_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right]\mathrm{d}\omega+\\&\frac{R^2(1+\mu)\sqrt{1-2\mu}}{E}\frac{1}{r}\cdot\\&\int_0^{t-\frac{r-R}{c_0}}p\left[t-\frac{r-R}{c_0}-\omega\right]H(\omega)\left[\frac{c_0}{r}F_2(\omega)+\frac{\mathrm{d}F_2(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right]\mathrm{d}\omega+\\&\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)\alpha c_0^2}{(1-\mu)^2}\frac{1}{r}\cdot\\&\int_0^{t-\frac{r-R}{c_0}}f\left[t-\frac{r-R}{c_0}-\omega\right]H(\omega)\left[\frac{c_0}{r}F_3(\omega)+\frac{\mathrm{d}F_3(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right]\mathrm{d}\omega+\\&\frac{(1+\mu)\alpha c_0R}{2(1-\mu)}\frac{1}{r}\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{e}^{(c_0^2\rho c/\kappa)\tau}\left[F_4(r,\tau)-F_5(r,\tau)\right]\mathrm{d}\tau+\\&\frac{(1+\mu)\kappa\alpha R}{2(1-\mu)\rho c}\frac{1}{r^2}\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{e}^{(c_0^2\rho c/\kappa)\tau}\left[F_4(r,\tau)+F_5(r,\tau)\right]\mathrm{d}\tau-\\&\frac{(1+\mu)\kappa\alpha R}{(1-\mu)\rho c}\frac{1}{r^2}\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{erfc}\left[\frac{\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)}{2\sqrt{\tau}}\right]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}u(R,t)=&-\frac{(1+\mu)c_0\alpha}{1-\mu}\int_0^t f(t-\tau)H(\tau)\left[\frac{c_0}{R}F_1(\tau)+\frac{\mathrm{d}F_1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right]\mathrm{d}\tau+\\&\frac{R(1+\mu)\sqrt{1-2\mu}}{E}\int_0^t p(t-\tau)H(\tau)\left[\frac{c_0}{R}F_2(\tau)+\frac{\mathrm{d}F_2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right]\mathrm{d}\tau+\\&\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)\alpha c_0^2}{(1-\mu)^2R}\int_0^t f(t-\tau)H(\tau)\left[\frac{c_0}{R}F_3(\tau)+\frac{\mathrm{d}F_3(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right]\mathrm{d}\tau+\\&\frac{(1+\mu)\alpha c_0}{1-\mu}\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{e}^{(c_0^2\rho c/\kappa)\tau}\mathrm{erf}(c_0\sqrt{\rho c/\kappa}\sqrt{\tau})\mathrm{d}\tau+\\&\frac{(1+\mu)\kappa\alpha}{(1-\mu)\rho cR}\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{e}^{(c_0^2\rho c/\kappa)\tau}\mathrm{d}\tau-\frac{(1+\mu)\kappa\alpha}{(1-\mu)\rho cR}f(t)\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$F_1(\omega)=\left[\mathrm{e}^{(c_0^2\rho c/\kappa)\omega}-1\right]/(c_0^2\rho c/\kappa)$$

$$F_2(\omega)=e^{-\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\omega}\sin\left[\frac{\sqrt{1-2\mu}}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\omega\right]$$

$$\begin{aligned}F_3(\omega)=\Bigg\{&e^{(c_0^2\rho c/\kappa)\omega}\mathrm{erfc}(c_0\sqrt{\rho c/\kappa}\sqrt{\omega})-\\&\left[\frac{1-\mu}{\sqrt{1-2\mu}}\frac{c_0\rho cR}{k}+\sqrt{1-2\mu}\right]e^{-\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\omega}\sin\left[\frac{\sqrt{1-2\mu}}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\omega\right]-\\&e^{-\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\omega}\cos\left[\frac{\sqrt{1-2\mu}}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\omega\right]+\\&c_0\sqrt{\frac{\rho c}{\kappa}}\left[\frac{1-\mu}{\sqrt{1-2\mu}}\frac{c_0\rho cR}{\kappa}+\sqrt{1-2\mu}\right]\cdot\\&\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}e^{-\lambda_1\omega}\mathrm{erf}(\sqrt{-\lambda_1}\sqrt{\omega})-\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}e^{-\lambda_2\omega}\mathrm{erf}(\sqrt{-\lambda_2}\sqrt{\omega})\right]+\\&\frac{c_0\sqrt{\rho c/\kappa}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}e^{-\lambda_1\omega}\mathrm{erf}(\sqrt{-\lambda_1}\sqrt{\omega})+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}e^{-\lambda_2\omega}\mathrm{erf}(\sqrt{-\lambda_2}\sqrt{\omega})\right]\Bigg]\Bigg\}\cdot\\&\left[\left[\frac{c_0^2\rho c}{\kappa}\right]^2+\frac{2(1-2\mu)}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\frac{c_0^2\rho c}{\kappa}+\frac{2(1-2\mu)}{1-\mu}\frac{c_0^2}{R^2}\right]^{-1}\end{aligned}$$

$$F_4(r,\tau)=e^{-(c_0\rho c/\kappa)(r-R)}\mathrm{erfc}\left[-c_0\sqrt{\rho c/\kappa}\sqrt{\tau}+\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)/(2\sqrt{\tau})\right]$$

$$F_5(r,\tau)=e^{(c_0\rho c/\kappa)(r-R)}\mathrm{erfc}\left[c_0\sqrt{\rho c/\kappa}\sqrt{\tau}+\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)/(2\sqrt{\tau})\right]$$

λ_1、λ_2 是复数，分别为

$$\lambda_1=\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{c_0}{R}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{1-2\mu}}{1-\mu}\frac{c_0}{R}$$
$$\lambda_2=\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{c_0}{R}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{1-2\mu}}{1-\mu}\frac{c_0}{R}\qquad(9)$$

经证明，$\lim\limits_{r\to R}\theta(r,t)=\theta(R,t)$，$\lim\limits_{r\to R}u(r,t)=u(R,t)$，因此，$\theta(R,t)$、$\theta(r,t)(r>R)$和 $u(R,t)$、$u(r,t)(r>R)$分别在 $r=R$ 处是协调的。

式(7)和(8)中存在复数项，只需将误差函数展开成级数形式，经简单运算后复数即自动消失。

另外，在得到式(7)右端第 4 项的变换过程中有限制条件 $0<\tau<\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)$，即要求积分上限 $t<\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)$。事实上，冲击波波前达到 r 处的时间为$(r-R)/c_0$，因为

$$\frac{\sqrt{\rho c/\kappa}(r-R)}{(r-R)/c_0}=\sqrt{\frac{Ec(1-\mu)}{\kappa(1+\mu)(1-2\mu)}}\gg 1$$

对于通常的工程问题，我们感兴趣的时间范围都在这一限制条件之内。

由式(5)，得温度公式

$$T(r,t)=T_0+\frac{R\sqrt{\rho c/\kappa}}{2\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{R}{r}\right)\int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-\frac{(\rho c/\kappa)(r-R)^2}{4\tau}}\mathrm{d}\tau\quad r>R\qquad(10)$$

至此，已求得球型空腔在热力联合冲击下的温度 $T(r,t)$和位移 $u(r,t)$。然后由变形几何方程和材料本构方程即可直接求得各应变和应力分量。

4　解的简要分析与讨论

式(1)描述的定解问题是通常的线性热传导及波动初边值问题，其适定性在相关的著作中

已有证明。

将式(5)～(8)代入式(1),所有方程和初边值条件均成立,即式(5)～(8)是定解问题(1)的解。式(7)是本文的主要结果,将该式代入方程验算时,其前 3 项中的函数 $F_1(\omega)$、$F_2(\omega)$和 $F_3(\omega)$不需要代入具体形式。式(7)右端共包括 6 项,根据求解过程、验算过程及验算结果,其中前 3 项均分别满足关于变量 $u(r,t)$的齐次方程,即这 3 项由边值条件中的非齐次项引起,它们在 $t<(r-R)/c_0$ 时分别恒为零,这表明冲击波波前到达 r 处的时间为$(r-R)/c_0$。事实上,在式(1)和(7)中若令 $f(t)\equiv 0$,则得到仅有压力 $p(t)$冲击作用的解,它与文献[3] 的结果一样。若进一步取 $p(t)=be^{-at}$,则可直接简化到文献[1] 的结果。并且,若令 $p(t)\equiv 0$,则得到仅有热冲击作用的解。

比较两种边界冲击载荷引起的位移波解析式(7)右端的第 2 项与第 1、3～6 项,可见,热位移波不仅包含有与边界压力作用引起的相类似的冲击波成分(第 1、3 项),而且还含有自己特有的成分(第 4、5 和 6 项),这一成分由方程中的非齐次项与边值条件中的相应部分引起,其特点是没有明确的波前。

另外,通常的空腔爆轰,由于震源的局部强热及强动载荷作用,震源近区介质都将发生非弹性响应,甚至是粉碎性破坏。这时,震源通过空腔临近非弹性区施加在其外部弹性区上的热-力载荷随时间变化一般具有任意性。本文中,由于已知条件是均匀作用在球腔内壁面上随时间可任意分布的温度和压力,因而这些公式也适用于当无限介质在球型空腔临近区域发生非弹性变形或破坏时,其外围弹性部分的求解。事实上,当球型空腔在震源临近区域发生非弹性变形或破坏时,非弹性范围相对而言是很小的,对该部分通过数值模拟等手段进行求解分析是可行的,而其外围弹性部分,可直接由本文公式求解。这样,利用非弹性区-弹性区界面处的温度、位移和应力协调条件,将非弹性区和弹性区联立,即可求解分析整个非弹性-弹性球型空腔问题。

以上分析了解的物理意义,其工程意义也是很明显的。与数值模拟等方法联合使用,公式(5)～(8)可直接作为均匀介质单点爆炸地震信号分析的理论工具。

5 小 结

建立了当弹性区域内边界受到温度和压力冲击作用时,球型空腔的球对称瞬态热传导和热弹性动力响应模型。利用拉普拉斯变换法,求出了弹性区域的温度和位移解,这些解由随时间任意变化的温度和压力载荷函数表示。基于温度和位移解,可由几何方程和本构方程直接求得应变及应力。然后将所得解直接代入原定解问题,确认了解的正确性。并简要分析讨论了解的物理意义。

王雄祥研究员对本文工作作了有益的建议。

参考文献:

[1] 张庆元,战人瑞.爆轰载荷下球型空腔的动力响应[J].爆炸与冲击,1994,14(2):119～128.

[2] 四川大学数学系.高等数学(第四册)[M].北京:人民教育出版社,1981.298～323.

[3] Karl F Graff.Wave Motion in Elastic Solids[M].Oxford:Clarendon Press,1975.297～299.

Closed Form Solutions of a Spherical Cavity Shocked by Combined Heat and Pressure

YIN Yi-hui, CHEN Yu-ze, DENG Li-hui

(*Institute of Structural Mechanics*, *CAEP*, *Mianyang* 621900, *China*)

Abstract: This paper establishes a model of heat conduction and thermo-dynamic responses of a spherical cavity under shocks of both heat and pressure whose distributions versus time are arbitrary. By using Laplace transform method, it deduces the closed form formulas of temperature and radial displacement of the cavity. It also briefly analyzes the meanings of the displacement expression. As special examples, the present solutions can be simplified to the solution of the responses of a spherical chamber on the uniform pressure pulses.

Key words: spherical cavity; explosion; heat conduction; thermo-dynamic response