

文章编号: 1001-1455 (2000)03-0228-07

SH 波对内含裂纹衬砌结构的 散射及动应力集中

史守峡¹, 刘殿魁², 杨庆山³

(1. 航天总公司二院 25 所, 北京 100854;

2. 哈尔滨工程大学建筑工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001;

3. 北方交通大学土建学院, 北京 100044)

摘要: 当衬砌结构内含裂纹时, 采用 Green 函数的方法, 研究了 SH 波对裂纹的散射及其动应力集中, 构造了在含有半圆形衬砌的弹性半空间上, 在水平面上任一点承受时间谐和出平面线源载荷作用时的位移函数作为 Green 函数; 推导了 SH 波对衬砌内有裂纹的散射定解积分方程组, 进而求得裂纹尖端的动应力因子, 重点讨论了衬砌及周围介质对裂纹尖端动应力因子的影响, 给出了介质参数变化对裂纹尖端动应力因子的影响曲线, 为工程设计提供了依据。

关键词: SH 波; 裂纹; Green 函数; 动应力集中因子

中图分类号: O326 文献标识码: A

1 引言

为提高结构的使用寿命, 常在结构中添加一些衬砌结构, 结构过载、载荷交变等因素往往促使裂纹发生和传播, 并导致结构的破坏。在无限弹性介质中, 研究任意厚度的衬砌结构的散射, 为地下结构的抗震、抗爆设计方法提供依据, 本文的研究具有重要的实际意义; 另外, 研究裂纹尖端应力强度因子, 也是断裂力学的重要课题之一。以往的研究裂纹尖端应力强度因子, 常采用有限元、边界元等数值方法, 但发展数值解法的同时, 解析解法仍是需要深入研究的^[1~2]。

近来, 刘殿魁等^[3~4]对单个圆孔及孔边裂纹与 SH 波的散射进行了详细的讨论, 这是一种新的理论分析方法。在此基础上, 我们深入研究衬砌结构内含裂纹缺陷, 对裂纹尖端动应力强度因子的影响规律。假定在线性弹性断裂力学范畴内, 在含有半圆形衬砌结构的弹性半空间水平面上, 将任意一点承受时间谐和出平面线源载荷作用的位移函数构造为 Green 函数; 依 SH 波对含有衬砌的全空间介质的散射出发, 沿水平界面分开, 利用“契合”的方法, 在欲出现裂纹处, 施加反平面力系, 满足裂纹面上应力自由的条件来“构造裂纹”, 在其余剖面上施加待求未知力系; 最后使所建立的模型满足位移连续和应力平衡条件的定解积分方程组, 进而求得裂纹尖端动应力强度因子, 并讨论介质参数的变化及裂纹长度对裂纹尖端动应力因子的影响。

* 收稿日期: 1999-10-13; 修回日期: 2000-01-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(59578003)

作者简介: 史守峡(1965—), 男, 博士后, 副教授。

2 Green 函数

2.1 控制方程

本文的 Green 函数是取含有半圆形衬砌结构的弹性半空间水平面上、作用一时间谐和出平面线源载荷的基本解(如图 1 所示),位移函数 G 与时间的依赖关系 $e^{-i\omega t}$, 在各向同性的弹性介质中, 满足基本控制方程(以下分析均略去时间谐和因子 $e^{i\omega t}$)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} = -k^2 G \quad (1)$$

式中: $k = \omega c_s$, ω 为圆频率, c_s 为介质的剪切波速; $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, ρ , μ 分别为介质的密度和剪切模量。

应力与应变的关系

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial G}{\partial r}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} \quad (2)$$

边界条件

$$\begin{cases} \tau_{rz}^I = \tau_{rz}^{II}, G^I = G^{II} & r = r_1 \\ \tau_{\theta z}^{II} = 0 & r = r_2 \\ \tau_{\theta z} = \delta(r - r_0) & \theta = 0 \text{ 或 } \pi \end{cases} \quad (3)$$

式中: r_2 、 r_1 表示衬砌的内、外半径; δ 为 Dirac-Delta 符号; r_0 表示线源载荷的作用点。

2.2 Green 函数

2.2.1 当线源载荷作用点 $r_0 > r_1$ 时

对于 I 区: 满足控制方程(1)式和边界条件(3)式的位移函数 G , 可以看成由水平面上作用的线源载荷引起的入射波的位移 $G^{(i)}$ 和衬砌介质边界激发的散射波位移 $G^{(s)}$ 的叠加, 在一个完整的弹性半空间上, 位于水平面上所产生的波场为

$$G^{(i)} = \frac{i}{2\mu_1} H_0^{(1)}(k_I |r - r_0|) \quad (4)$$

式中: $H_0^{(1)}(\cdot)$ 为第一类 Hankel 函数, 利用 Bessel 函数的 Graf 公式, (4)式变为

$$G^{(i)} = \frac{i}{2\mu_1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\theta \cdot \cos m\theta_0 \cdot \begin{cases} J_m(k_I r_0) \cdot H_m^{(1)}(k_I r) & r > r_0 \\ J_m(k_I r) \cdot H_m^{(1)}(k_I r_0) & r < r_0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $J_m(\cdot)$ 为 m 阶 Bessel 函数; ϵ_m 为常数, 当 $m=0$ 时, $\epsilon_m=1$, 当 $m \geq 1$ 时, $\epsilon_m=2$ 。

由半圆形衬砌介质 II 边界激发, 在介质 I 中满足水平面上边界条件的散射波场

$$G^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_I r) \cdot \cos(m\theta) \quad (6)$$

则 I 区的总位移场为

$$G^I = G^{(i)} + G^{(s)} \quad (7)$$

对于 II 区: 由半圆形衬砌介质 II 内、外边界激发在介质 II 中满足水平面边界条件上的驻波

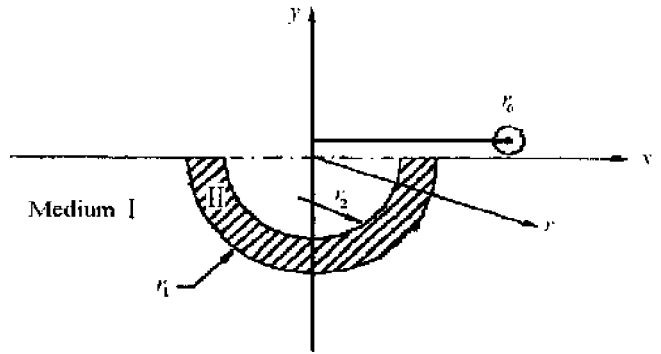


图 1 出平面线源载荷作用于含有衬砌结构的半空间模型

Fig.1 The half space model with lining acted by a line source force

$$G^{(I)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k_{II} r) \circ \cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(k_{II} r) \circ \cos(m\theta) \quad (8)$$

II区的总位移场为

$$G^{II} = G^{(I)} \quad (9)$$

G^I 、 G^{II} 构成了 $r_0 > r_1$ 时的总位移场 G 。

满足边界条件(3)式可得

$$A_m = D_1/D, \quad B_m = D_2/D, \quad C_m = D_3/D \quad (10)$$

式中

$$D = H_m^{(1)}(k_I r_1) [H_m^{(1)}(k_{II} r_1) H_m^{(2)}(k_{II} r_2) - H_m^{(1)}(k_{II} r_2) H_m^{(2)}(k_{II} r_1)] - (\mu_2 k_{II} / \mu_1 k_I) H_m^{(1)}(k_I r_1) [H_m^{(1)}(k_{II} r_1) H_m^{(2)}(k_{II} r_2) - H_m^{(1)}(k_{II} r_2) H_m^{(2)}(k_{II} r_1)] \quad (11)$$

$$D_1 = P_1 J_m'(k_I r_1) [H_m^{(1)}(k_{II} r_1) H_m^{(2)}(k_{II} r_2) - H_m^{(1)}(k_{II} r_2) H_m^{(2)}(k_{II} r_1)] - P_1 (\mu_2 k_I / \mu_1 k_I) J_m(k_I r_1) \circ [H_m^{(1)}(k_{II} r_1) H_m^{(2)}(k_{II} r_2) - H_m^{(1)}(k_{II} r_2) H_m^{(2)}(k_{II} r_1)] \quad (12)$$

$$D_2 = P_1 H_m^{(2)}(k_{II} r_2) [H_m^{(1)}(k_I r_1) J_m'(k_I r_1) - H_m^{(1)}(k_I r_1) J_m(k_I r_1)] \quad (13)$$

$$D_3 = P_1 H_m^{(1)}(k_{II} r_2) [H_m^{(1)}(k_I r_1) J_m'(k_I r_1) - H_m^{(1)}(k_I r_1) J_m(k_I r_1)] \quad (14)$$

$$P_1 = -\frac{i}{2\mu_1} \epsilon_m \circ \cos(m\theta_0) H_m^{(1)}(k_I r_0) \quad (15)$$

2.2.2 当线源载荷作用点 $r_2 < r_0 < r_1$ 时

类似于 2.2.1 的分析方法,可以得到 I 区、II区总位移场

$$G^{(I)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_I r) \circ \cos m\theta \quad (16)$$

$$G^{(II)} = \frac{i}{2\mu_2} H_0^{(1)}(k_{II} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k_{II} r) \circ \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(k_{II} r) \circ \cos(m\theta) \quad (17)$$

$G^{(I)}$ 、 $G^{(II)}$ 构成了 $r_2 < r < r_1$ 时的总位移场 G^* 。

利用边界条件(6)式,同样可求出待定系数 A_m 、 B_m 、 C_m 的表达式(具体形式略去)。

综上所述,由(7)、(9)、(16)、(17)式可得到含衬砌半平面上任意一点 r_0 的 Green 函数。

3 SH 波对仅含圆形衬砌介质的散射

一稳态谐和的 SH 波,入射到含有衬砌介质 II 的全空间介质 I 中,入射波 $W^{(i)}$ 为

$$W^{(i)} = W_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \cos m(\theta - \alpha_0) J_m(k_I r) \quad (18)$$

式中: W_0 为位移幅值; α_0 为入射角; k_I 为波数,且 $k_I = \omega_1 / c_{sI}$, c_{sI} 为介质 I 的剪切波速。

衬砌介质 II 的作用,分别产生散射波 $W^{(is)}$ 、驻波 $W^{(it)}$

$$W^{(is)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(is)} H_m^{(1)}(k_I r) \cos m(\theta - \alpha_0) \quad (19)$$

$$W^{(it)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(it)} H_m^{(1)}(k_{II} r) \cos m(\theta - \alpha_0) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(it)} H_m^{(2)}(k_{II} r) \cos m(\theta - \alpha_0) \quad (20)$$

待定系数 $A_m^{(is)}$ 、 $B_m^{(it)}$ 、 $C_m^{(it)}$ 为

$$A_m^{(is)} = F_1/D, \quad B_m^{(it)} = F_2/D, \quad C_m^{(it)} = F_3/D \quad (21)$$

$$F_1 = P_3 J'_m(k_I r_1) [H_m^{(1)}(k_{II} r_1) H_m^{(2)}(k_{II} r_2) - H_m^{(1)}(k_{II} r_2) H_m^{(2)}(k_{II} r_1)] - P_3 \mu^* k^* J_m(k_I r_1) [H_m^{(1)}(k_{II} r_1) H_m^{(2)}(k_{II} r_2) - H_m^{(1)}(k_{II} r_2) H_m^{(2)}(k_{II} r_1)] \quad (22)$$

$$F_2 = P_3 H_m^{(2)}(k_{II} r_2) [H_m^{(1)}(k_I r_1) J'_m(k_I r_1) - H_m^{(1)}(k_I r_1) J_m(k_I r_1)] \quad (23)$$

$$F_3 = P_3 H_m^{(1)}(k_{II} r_2) [H_m^{(1)}(k_I r_1) J'_m(k_I r_1) - H_m^{(1)}(k_I r_1) J_m(k_I r_1)] \quad (24)$$

$$P_3 = -W_0 \epsilon_m i^m \quad (25)$$

式中: D 同(11)式。由(2)式,求得应力 τ_{ξ}^I 、 τ_{ξ}^{II} 。

4 裂纹对 SH 波的散射及定解积分方程组

利用求得的 Green 函数及入射波、散射波、驻波,采用类似于文献[3]的“契合”方法,在欲出现裂纹处进行裂纹切割,得到内含裂纹的衬砌结构散射模型(如图 2 所示),从而求出定解积分方程组,具体方法如下。

首先把入射波 $W^{(i)}$ 作用的含有圆形衬砌介质 II 的全空间介质 I 沿 x 轴剖开,在剖面 $\theta = 0$ 或 π 上构成的总位移、总应力为

$$W^{I1} = W^{(i)} + W^{(is)} \quad |r| > r_1 \quad (26)$$

$$W^{I2} = W^{(it)} \quad r_2 < |r| < r_1 \quad (27)$$

$$\tau_{\xi}^{I1} = \tau_{\xi}^{(i)} + \tau_{\xi}^{(is)} \quad |r| > r_1 \quad (28)$$

$$\tau_{\xi}^{I2} = \tau_{\xi}^{(it)} \quad r_2 < |r| < r_1 \quad (29)$$

在上、下剖面上与出现裂纹处施加一对大小相等、方向相反的出平面载荷,大小为 $-\tau_{\xi}^{I2}$ 该处的总应力为零,即认为是裂纹。

然后,把上、下半空间“契合”在一起,为满足在剖面 $\theta = 0$ 或 π 裂纹以外部分的位移连续条件及应力平衡条件,在上、下剖面上施加待定的外力系 $f_2(r_0, \theta_0)$ 、 $f_1(r_0, \theta_0)$, 利用剖面上的应力平衡条件得

$$f_1(r_0, \theta_0) + \tau_{\xi}^{(i)} = f_2(r_0, \theta_0) + \tau_{\xi}^{(t)} \quad \theta_0 = 0 \text{ 或 } \pi \quad (30)$$

利用剖面上的位移连续条件,得到确定外力系 $f_1(r_0, \theta_0)$ 的定解积分方程组

$$\int_{r_2+A}^{r_1} f_1(r_0, 0) \circ G^*(r, \theta; r_0, 0) dr_0 + \int_{r_1}^{\infty} f_1(r_0, 0) \circ G(r, \theta; r_0, 0) dr_0 + \int_{r_2+A}^{r_1} f_1(r_0, \pi) \circ G^*(r, \theta; r_0, \pi) dr_0 + \int_{r_1}^{\infty} f_1(r_0, \pi) \circ G(r, \theta; r_0, \pi) dr_0 = \int_{r_2}^{r_2+A} \tau_{\xi}^{II} \circ G^*(r, \theta; r_0, 0) dr_0 - \int_{r_2}^{r_2+A} \tau_{\xi}^{II} \circ G^*(r, \theta; r_0, \pi) dr \quad (31)$$

式中: G^* 、 G 分别为线源载荷点 r_0 位于衬砌介质内、外的 Green 函数。

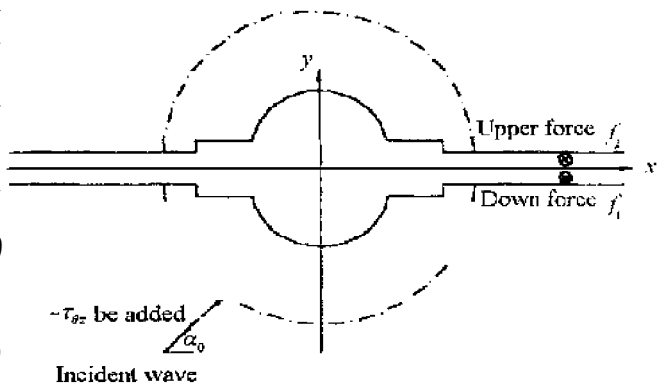


图 2 SH 波作用于衬砌中含有裂纹的“契合”模型

Fig.2 The harmony model with lining and crack originating at its edge acted by SH incident wave

5 裂纹尖端动应力因子(DSCF)的确定

据动应力强度因子的定义^[4],则

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow r_2 + L} \sqrt{(r - r_2 - A)} \cdot f_c \tag{32}$$

式中: f_c 为裂纹尖端的外力; r_2 、 A 为衬砌内半径及裂纹长度。通常定义一个无量纲动应力强度因子 K_3 为

$$K_3 = K_{III} / (\tau_0 Q) \tag{33}$$

式中: Q 为特征尺寸^[5], 对于孔边径向裂纹, Q 可取 G.C.Sih 在研究此类裂纹受出平面静力剪切载荷时给出的解析公式

$$Q = \sqrt{(A + r_2)^4 - r_2^4} / \sqrt{(A + r_2)^3} \tag{34}$$

式中: τ_0 为在介质 I 中, 有一谐和的 SH 波沿 α_0 方向入射所产生的应力最大幅值, 即

$$\tau_0 = |\tau_{rz}^{(i)}| = \mu_1 k_I W_0 \tag{35}$$

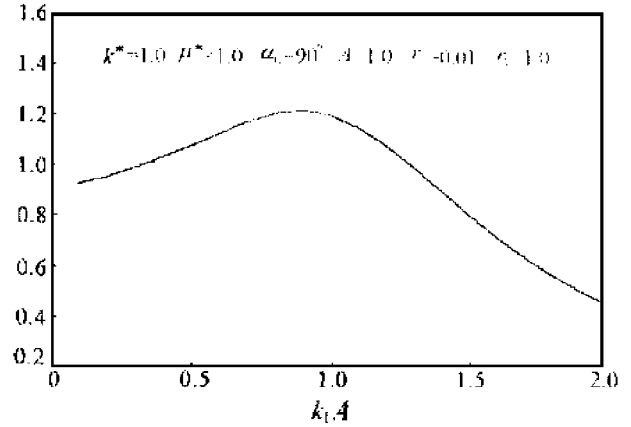


图3 SH波垂直入射, 裂纹尖端无量纲因子 K_3 随入射波数 $k_I A$ 的变化

Fig.3 Variation of the crack non-dimension K_3 vs. incident wave number $k_I A$ by SH-wave

6 计算与讨论

方程(31)式为无限域上含对数奇异性核的第一类 Fredholm 积分方程组, 采用数值离散的方法进行求解。通过变换可直接求得裂纹尖端的动应力强度因子, 并得到无量纲动应力因子 K_3 , 其中 μ_1 、 k_I 及 μ_2 、 k_{II} 为周围介质 I、衬砌介质 II 的材料常数, 令 $\mu^* = \mu_2 / \mu_1$ 、 $k^* = k_{II} / k_I$, A 为裂纹的长度, 计算结果如下。

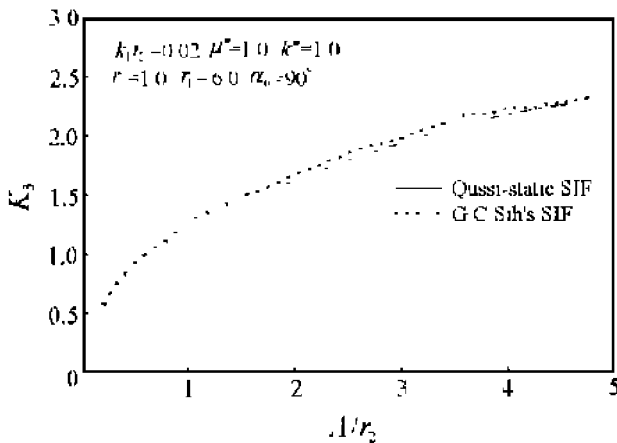


图4 当 SH 波垂直入射于孔边裂纹时, 不同 A/r_2 对应的准静力解与 G.C.Sih 的解析静力解的比较
Fig.4 Variation of Quasi-static K_3 vs the ratio of crack length A and the inner radius r_2 ; comparison between the results and G.C.Sih's analytic solution

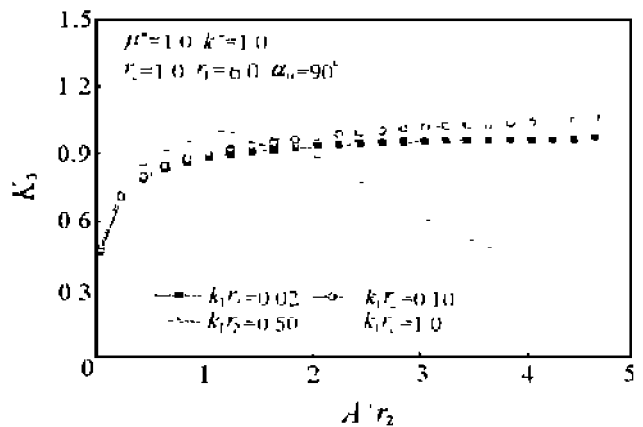


图5 当 SH 波垂直入射于孔边裂纹时, 入射波数不同, 随 A/r_2 变化对应的非静力解
Fig.5 Variation of non-static K_3 vs the ratio of crack length A and the inner radius r_2 ; with different incident wave numbers $k_I r_2$

(1) 当 $\mu^* = 1, k^* = 1, r_2 \rightarrow 0$, 表明衬砌介质 II 与周围介质 I 相同, 内含裂纹的衬砌模型简化为仅含长度为 $2A$ 的直裂纹模型。当 SH 波垂直入射时, 图 3 给出了裂纹尖端 K_3 随入射波数 $k_1 A$ 的变化。当波数接近于 1 时, 无量纲因子 K_3 值最大, 约为 1.25, 与文献[2] 采用对偶积分方法的结果十分接近, 表明本文分析方法在入射波数 $k_1 A$ 的较宽范围内是正确的; 另外, 当 $r_2 = 1, \mu^* = k^* = 1, k_1 A = 0.02$ 时, 内含裂纹的衬砌模型简化为孔边裂纹模型, 此时准静态解与 G.C.Sih^[6] 的解析静力解一致(图 4)。对于非静态解, 无量纲 K_3 变化规律复杂, 其趋势见图 5, 随着入射波数 $k_1 A$ 的增加其值减小。

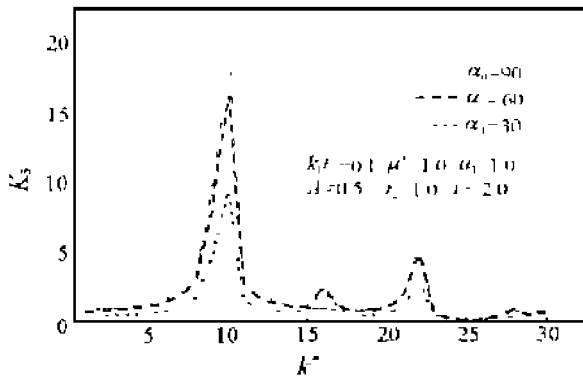


图 6 不同入射角 α_0 , 低频入射时无量纲因子 K_3 随波数比 k^* 的变化

Fig.6 Variation of non-dimension K_3 vs the ratio of wave number k^* with lower wave number and different incident angles α_0

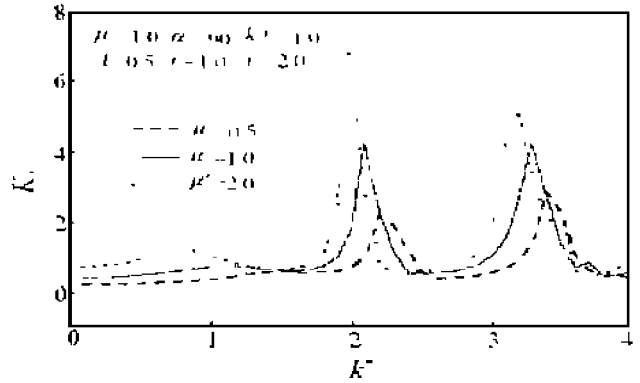


图 7 当 SH 波垂直入射时, 不同 μ^* 时无量纲因子 K_3 随 k^* 的变化

Fig.7 Variation of non-dimension K_3 vs the ratio of medium k^* with vertical SH-wave and different mediums μ^*

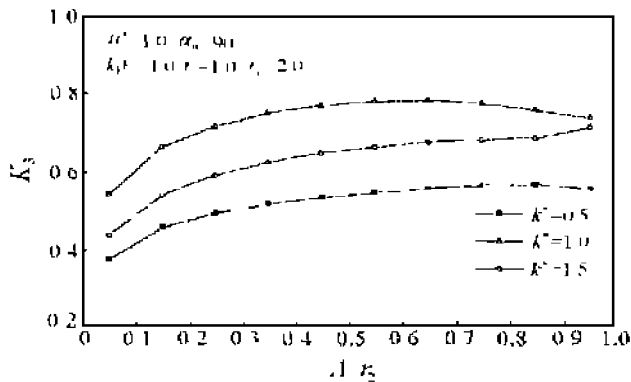


图 8 当 SH 波垂直入射时, 不同介质波数比 k^* 时, 无量纲因子 K_3 随 A/r_2 的变化

Fig.8 Variation of non-dimension K_3 vs the ratio of crack length A and the inner radius r_2 with vertical wave and different mediums k^*

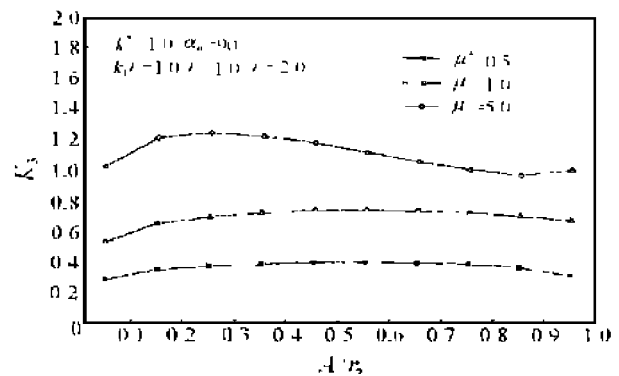


图 9 当 SH 波垂直入射时, 不同介质波数比 μ^* 时, 无量纲因子 K_3 随 A/r_2 的变化

Fig.9 Variation of non-dimension K_3 vs the ratio of crack length A and the inner radius r_2 with vertical wave and different mediums μ^*

(2) 图 6 给出了当不同入射角 α_0 、低频入射 ($k_1 r_2 = 0.1$) 时, 无量纲 K_3 随波数比 k^* 的变化规律。低频入射存在“低频共振”现象, 并存在多波峰现象; 随着 k^* 的增加, 其峰值衰减迅速, 另外, 随入射角 α_0 增加, 其峰值减小; 当水平入射时, 峰值为零, 当高频入射时, 不存在“共振”现象, 在工程中应避免“低频共振”的发生。

(3)图7给出了当SH波垂直入射、入射波数 $k_1 r_2 = 1.0$ 、不同剪切模量比为 μ^* 时,无量纲 K_3 随入射波数 k^* 的变化,结果表明仍然存在多波峰现象,但峰值比低频入射时小得多,随剪切模量比 μ^* 增大,峰值略有增加。

(4)图8至图9给出了当SH波垂直入射时,无量纲 K_3 随裂纹长度 A 与衬砌内径 r_2 之比的变化,结果表明 K_3 变化比较平缓;随介质参数比 μ^* 增大, K_3 也增大;随介质参数比 k^* 增大,裂纹尖端的 K_3 比较复杂,当 k^* 值在1附近时, K_3 较大。

参考文献:

- [1] Sih G C, et al. *Mechanics of Fracture, Vol. 1* [M]. Leyden: Nordoff, 1973.
- [2] Sih G C, et al. *Mechanics of Fracture, Vol. 4* [M]. Leyden: Nordoff, 1977.
- [3] 刘殿魁, 刘宏伟. SH波散射与界面圆孔的动应力集中[J]. 力学学报, 1998, 30(5): 597—604.
- [4] 刘殿魁, 刘宏伟. 孔边裂纹与SH波散射及动应力集中[J]. 力学学报, 1999, 31(3): 292—299.
- [5] Pao Y H, Mow C C. *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentraions* [M]. US: Crane, Russak Company Inc, 1973.
- [6] Lober J F, Sih G C. *Diffraction of Antiplane Shear Waves by a Finite Crack* [J]. *J of the Acoustical Society of America*, 1968, 44(1): 90—98.
- [7] 黎在良, 刘殿魁. *固体中的波* [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

Dynamic Stress Concentration and Scattering of SH-wave by Lining with Crack and Its Interaction

SHI Shou-xia¹, LIU Dian-kui², YANG Qing-shan³

(1. *Beijing Institute of Remote Sensing Equipment, China Changfeng Science Technology Industry Co. Beijing 100083, China;*

2. Dep. of Building Engineering, Harbin University of Engineering, Harbin, Heilongjiang 150006, China;

3. Institute of Architercture Engineering, North Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: In this paper, the dynamic stress concentration and the scattering of SH-wave on circular canyon with lining and crack are studied by using Green function. In order to solve the problem, the first important work is to construct a suitable Green function, which is the solution of displacement field for elastic half space with lining and crack acted by out-plane harmonic line source force at horizontal surface. The integral equation to determine the unknown forces can be changed into algebraic and solved numerically. So the dynamic stress contracted factor (DSCF) of crack may be determined. The influence on the the lining crack DSCF is discussed emphatically. Numerical results and discussion of crack DSCF are given, which provides a kind of reference for engineering design.

Key words: SH-wave; crack; Green function; DSCF