

文章编号: 1001-1455 (2000)04-0379-06

强脉冲载荷作用下弹-塑性薄圆板的大挠度动力响应^{*}

席 丰¹, 杨嘉陵²

(1. 山东建筑工程学院, 山东 济南 250014;

2. 北京航空航天大学, 北京 100083)

摘要: 利用有限变形弹塑性连续体的最小加速度原理, 建立了分析圆板动力响应问题的数值方法, 并通过对均匀分布的脉冲载荷作用下铰支圆板位移响应的细致分析, 探讨了响应过程中的饱和冲量现象, 指出对于高载范围内的脉冲载荷, 相应于最大变形的饱和冲量确实是存在的。结果还表明, 虽然圆板的弹塑性动力分析非常复杂, 但基于最小加速度原理的数值计算方法却具有简单、直接的优点。

关键词: 弹塑性圆板; 冲击载荷; 大挠度; 动力响应; 饱和冲量; 最小加速度原理

中图分类号: O342 文献标识码: A

1 引 言

在强动载荷作用下, 关于圆板的动力行为的分析和处理代表了板、壳结构研究方法的一般特征, 因此, 对于圆板的研究有着极大的理论价值和实用意义。40 多年来, 在忽略弹性效应的假定下, 人们利用简单刚塑性理论, 作了大量的工作^[1], 为理论分析和工程设计提供了简单的近似解法。也有从数值计算方面着手, 考虑弹性效应后而进行分析的报道^[2~3]。

近年来, 赵亚溥^[4]等发现了圆板响应过程中的“饱和冲量”现象, 但由于他们的分析是以刚塑性理论为基础的, 因此, 所得到的结果还需作进一步更为精确的检验; 最近, ZHU 等^[5]研究了方板的弹塑性动力响应, 提出了分别相应于“最大变形”和“永久变形”的“饱和冲量”。对于圆板, 这两种饱和冲量的存在与否, 需要进行弹塑性分析来考察。

计及有限变形效应后, 结构的弹塑性响应还有可能呈现与小变形分析明显不同的特征, 在文献[6]中, 我们利用最小加速度原理^[7], 分析了梁在响应过程中的异常行为。因此, 基于最小加速度原理的分析方法能够真实地模拟结构的实际响应过程。这一点是非常重要的, 特别是在数值计算技术已得到快速发展的今天, 上述方法必将成为力学分析的一个方便、有效的研究手段。

在本文中, 将应用最小加速度原理探讨圆板在冲击载荷作用下的动力行为, 特别是考察圆板响应过程中的“饱和冲量”现象。

* 收稿日期: 1999-09-22; 修回日期: 2000-02-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(19672006); 山东省自然科学基金项目(Q99A12)

作者简介: 席 丰(1963—), 男, 博士, 副教授。

2 薄圆板离散形式的运动控制方程及其求解方法

2.1 薄圆板的 Lee 泛函及离散形式的运动方程

周边铰支的薄圆板,其半径、厚度分别为 R 、 h ,有横向集中载荷 $P(t)$ 作用。因圆板的轴对称性质,采用圆柱坐标 (r, θ, z) ,并设圆板中面的径向位移、横向位移分别为 $U(r, t)$ 、 $W(r, t)$ 。由直法线假设,板内各点的位移可表示为

$$\begin{cases} U_r(r, \theta, t) = U(r, t) - zW_{,r}(r, t) \\ U_\theta(r, \theta, t) = 0 \\ U_z(r, \theta, t) = W(r, t) \end{cases} \quad (1)$$

只考虑大挠度效应时,相应的应变为

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = U_{,r} + \frac{1}{2}(W_{,r})^2 - zW_{,rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}U - z\frac{1}{r}W_{,r} \\ \epsilon_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad \text{or} \quad i = j = z \end{cases} \quad (2)$$

将上述的位移和应变的表达式代入 Lee 泛函^[6],并不计体力,则可得到圆板的泛函

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^R \{ rN_r(\ddot{U}_{,r} + \ddot{W}_{,r}W_{,r}) + N_\theta \ddot{U} - rM_r \ddot{W}_{,rr} - M_\theta \ddot{W}_{,r} + \frac{\rho}{2}[rh(\ddot{U}^2 + \ddot{W}^2) + Ir \ddot{W}_{,r}^2] \} dr d\theta - P \ddot{W}(0, t) \quad (3)$$

式中:膜力 N_r 、 N_θ 和弯矩 M_r 、 M_θ 分别为

$$\begin{cases} (N_r, N_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (S_{rr}, S_{\theta\theta}) dz \\ (M_r, M_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} (S_{rr}, S_{\theta\theta}) z dz \end{cases} \quad (4)$$

为了直接离散泛函,取等分点

$$r_i = (i-1)\Delta r, \quad z_j = j\Delta z \quad i = 1, 2, \dots, n-1; j = -m, -m+1, \dots, m-1, m \quad (5)$$

式中: Δr 、 Δz 分别为取定的径向和横向的空间步长,圆心为 r_1 。

可利用中心差分公式将(3)中的空间导数项化成差分形式,然后应用求积分的梯形公式和周边铰支的边界条件,从而得到离散形式的泛函 J 的表达式。根据最小加速度原理

$$\frac{\partial J}{\partial U_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial W_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n \quad (6)$$

由上式可得到离散形式的铰支圆板的运动控制方程,该方程组包含了膜力效应和转动惯性效应,因而是大挠度意义上以圆板中面各点的位移 U_i 、 W_i 表示的常微分方程组。对于载荷作用前为静止的铰支圆板,其初始条件为

$$t = 0, \quad \begin{cases} U_i = 0, & \dot{U}_i = 0 \\ W_i = 0, & \dot{W}_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7)$$

2.2 材料的屈服条件和本构方程

若取理想弹塑性材料模型, 则其材料行为遵循 Von Mises 屈服准则及其相关的流动法则; 在不考虑应变率效应的情况下, 塑性增量理论即 Prandtl-Reuss 理论能够有效地描述材料的本构关系。本文的计算也用该理论。

假定中面法向的应力增量为零, 实际上也就假定了圆板内各点保持平面应力状态, 即有 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z = 0$, 平均应力 $\sigma_m = (\sigma_r + \sigma_\theta)/3$, 应力偏量

$$S_r = (2\sigma_r - \sigma_\theta)/3, \quad S_\theta = (2\sigma_\theta - \sigma_r)/3, \quad S_z = -(\sigma_r + \sigma_\theta)/3 \quad (8)$$

应力偏量的第二不变量

$$J_2 = S_{ij}S_{ij}/2 = (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta)/3$$

当取 J_2 为加载函数时, 屈服函数 $f = J_2 - K$, 其中 K 与加载历史有关。对于理想弹塑性材料, K 取单向拉伸材料屈服后的 J_2 值, 即 $K = \sigma_s^2/3$ 。因而, Von Mises 屈服准则为

$$f = \frac{1}{3}(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta) - \frac{1}{3}\sigma_s^2 \leq 0 \quad (9)$$

当 $f < 0$ 时, 表示屈服面内部为弹性行为; 当 $f = 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ 和 $f = 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ 时, 则分别表示加载和卸载。

由 Prandtl-Reuss 塑性增量理论

$$\Delta e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \Delta S_{ij} + \Delta \lambda \cdot S_{ij} \quad (10)$$

式中: E, ν 分别为材料的弹性模量和泊松比, e_{ij} 为应变偏量, $\Delta \lambda$ 为比例常数。

采用体积不可压缩假定, 则平均塑性应变增量 $\Delta \epsilon_m^p = 0$, 因而总的平均应变增量 $\Delta \epsilon_m = \Delta \epsilon_m^e = \frac{1-2\nu}{E} \Delta \sigma_m$, 应变偏量增量 $\Delta e_{ij} = \Delta \epsilon_{ij} - \Delta \epsilon_m$ 。将 σ_m 及上述各项表达式代入 (10) 式, 可得到圆板的本构方程

$$\begin{cases} \Delta \epsilon_r = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_r - \nu \Delta \sigma_\theta) + \frac{\Delta \lambda}{3} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \\ \Delta \epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_\theta - \nu \Delta \sigma_r) + \frac{\Delta \lambda}{3} (2\sigma_\theta - \sigma_r) \end{cases} \quad (11)$$

2.3 运动方程的求解方法及步骤

运动方程、几何方程和本构方程以及屈服条件耦合在一起, 构成了离散形式的圆板动力学控制方程组。假定在 t_q 瞬时, 除了 $\ddot{U}_i^q, \ddot{W}_i^q$ 外其余的量已经全部确定, 则控制方程组实际上已化为以 $\ddot{U}_i^q, \ddot{W}_i^q$ 为未知量的代数方程组, 其解容易得到。利用该瞬时得到的 $\ddot{U}_i^q, \ddot{W}_i^q$, 由对时间的差分技术, 即可得到下一瞬时 $t_{q+1} = t_q + \Delta t$ 时中面各点的位移 U_i^{q+1}, W_i^{q+1} 和速度 $\dot{U}_i^{q+1}, \dot{W}_i^{q+1}$, 分别为

$$\begin{cases} U_i^{q+1} = \ddot{U}_i^q (\Delta t)^2 + 2\dot{U}_i^q \Delta t + U_i^{q-1} \\ W_i^{q+1} = \ddot{W}_i^q (\Delta t)^2 + 2\dot{W}_i^q \Delta t + W_i^{q-1} \\ \dot{U}_i^{q+1} = 2\ddot{U}_i^q \Delta t + \dot{U}_i^{q-1} \\ \dot{W}_i^{q+1} = 2\ddot{W}_i^q \Delta t + \dot{W}_i^{q-1} \end{cases} \quad (12)$$

利用求得的位移 U_i^{q+1} 、 W_i^{q+1} ，进一步可计算 t_{q+1} 瞬时的应变 ϵ_{ij}^{q+1} 及应变增量 $\Delta\epsilon_{ij}^{q+1}$ ，应力的计算则需要根据屈服条件判断所处的状态是弹性状态或塑性状态，根据相应的本构方程计算应力增量 $\Delta\sigma_{ij}^{q+1}$ ，从而得到 σ_{ij}^{q+1} ，求得膜力、弯矩后，再由运动方程得到 \ddot{U}_i^{q+1} 、 \ddot{W}_i^{q+1} 。如此往复，逐步进行下去，即可确定圆板的弹塑性动力响应历史。

3 算 例

下面分析薄圆板受到冲击载荷作用下的动力响应，并考察脉冲载荷时的“饱和冲量”现象。

假设周边径向不可移的铰支圆板在其中心受到横向集中载荷的作用，当 t_0 为有限值时为矩形脉冲载荷；当 $t_0 = \infty$ 时则为阶跃载荷。圆板几何和材料模型取自文献[2]，但不考虑材料的强化效应。圆板半径 $R = 0.2\text{m}$ ，厚度 $h = 0.02\text{m}$ ，密度 $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ ，杨氏弹性模量 $E = 196\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，屈服应力 $\sigma_s = 235.2\text{MPa}$ 。

计算中取径向单元数为 30，横向单元数为 10，则空间步长分别为： $\Delta r = 6.67\text{mm}$ ， $\Delta z = 2\text{mm}$ 。

图 1 给出了阶跃载荷幅值不同时，圆板中心的挠度随时间变化的曲线。与文献[2]的结果比较表明，二者基本吻合，但本文计算的最大挠度稍微偏低。它表明由于有限变形效应的影响，膜力的作用使得结构的变形减小。

图 1 还给出了相应载荷的完全弹性响应的位移-时间历史，与弹塑性响应结果比较表明，随着载荷的增大，弹性位移达到最大值时的响应时间是不变的，而弹塑性位移达到其最大值时的响应时间要超过弹性响应的时间，且随着载荷的增大，相应的响应时间也加长。

上述计算结果符合一般弹塑性计算中的公认结论，表明本文的计算方法是正确的。

图 2 和图 3 给出了在 $P = 88.2\text{kN}$ 时，在响应早期各个瞬时圆板的挠度。图 2 显示，在响应的最初阶段，位移响应呈现明显的弹性弯曲波传播特征，但这一过程极其短暂，时间只有 $60\mu\text{s}$ 左右。其后的位移响应与基于塑性铰环概念的刚塑性计算的结果类似，但到达最大位移之后，由于弹性恢复力的作用，圆板要在永久变形位置附近作强迫振动。与最大位移比较，其弹性振动的振幅占有较大的比例，如图 1 中所示，而随着载荷的增大，弹性效应的作用越来越小。

为了考察结构弹塑性响应中的“饱和冲量”(Saturated Impulse)现象，在 $P = 88.2\text{kN}$ 时，取不同作用时间，得出了位移和应变的时间历程，并与阶跃载荷作用下的结果进行比较，见图 4、图 5。

圆板中心的横向位移响应时程表明， $t_0 < 0.8\text{ms}$ 时，最大位移 W_m 随着 t_0 的增加而增大，但当 t_0 达到 0.8ms 后，最大位移 W_m 却并不随着 t_0 的增加而增大。因此，相应于该时间的载荷冲量 $I = Pt_0 = 70.56\text{kN}\cdot\text{s}$ ，即为与最大位移 W_m 对应的饱和冲量 I_{sat} ，该时间则称为饱和时间 t_{sat} 。因而，对应铰支的弹塑性圆板，与最大变形相应的饱和冲量现象确实存在。

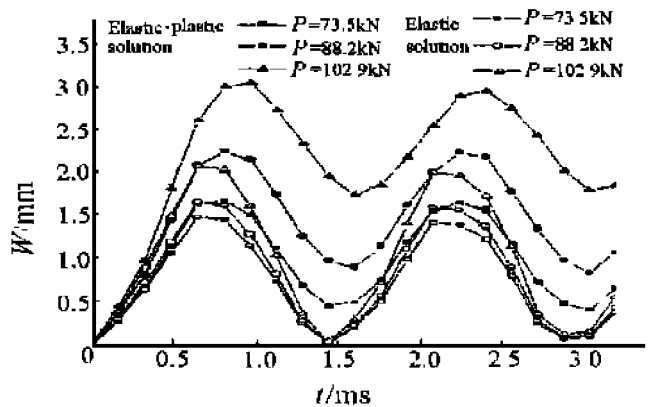


图 1 圆心挠度的时间历程

Fig.1 Time history of deflection at the centre

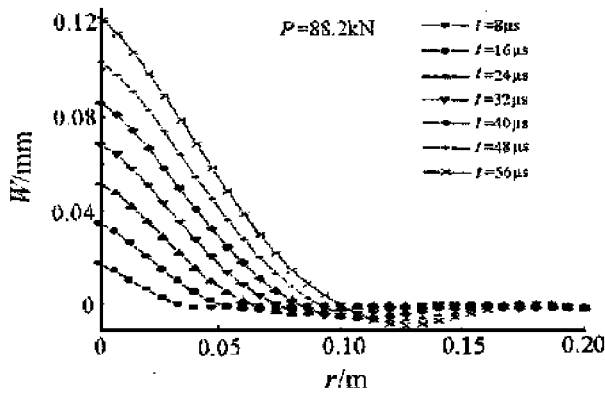


图 2 各个瞬时的挠度分布

Fig.2 Deflections at various instants

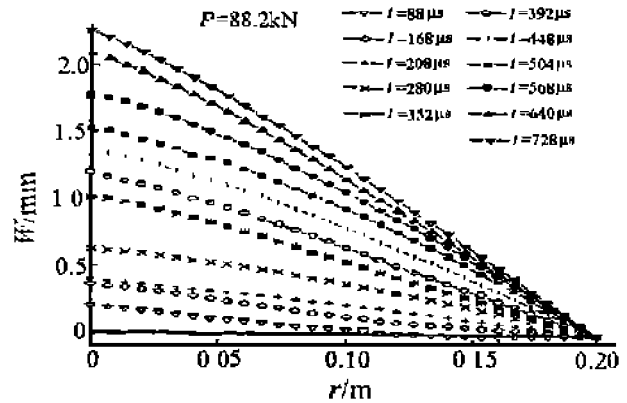


图 3 各个瞬时的挠度分布

Fig.3 Deflections at various instants

从图 4 还可以看出, 对应于不同的载荷作用时间 $t_0 \geq t_{sat}$, 虽然最大位移 W_m 相同, 但 $t > t_0$ 后的弹性自由振动的位移响应是不同的, 当 t_0 分别为 0.8 和 2.5ms 时, 即当载荷作用时间分别与阶跃载荷作用下位移响应达到其“谷峰”对应的时间相同时, 圆板弹性自由振动的振幅较大; 而当 t_0 分别为 1.5 和 3.0ms 时, 此时载荷作用时间分别与阶跃载荷作用下位移响应达到其“谷底”时的时间相对应, 非常明显, 圆板作弹性自由振动的振幅较小, 它接近于无弹性振动的永久变形。这一计算结果对于工程上选择适当的脉冲载荷作用时间而抑制结构的振动是有意义的。

图 5 给出的圆板中心 $(0, h)$ 点的径向应变 ϵ_r 在上述脉冲载荷作用下的响应历程呈现出与位移响应相应的特征。从上述结果的考察, 似乎得不到与圆板最终变形相应的饱和冲量。这一结果还有待进一步研究。

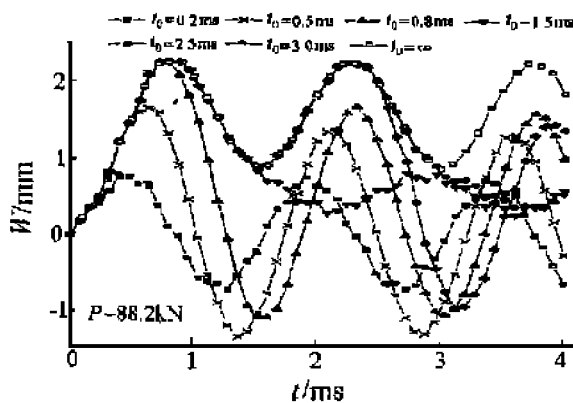


图 4 不同脉冲载荷作用时的位移响应

Fig.4 Deflection response of the plate under different pulse loads

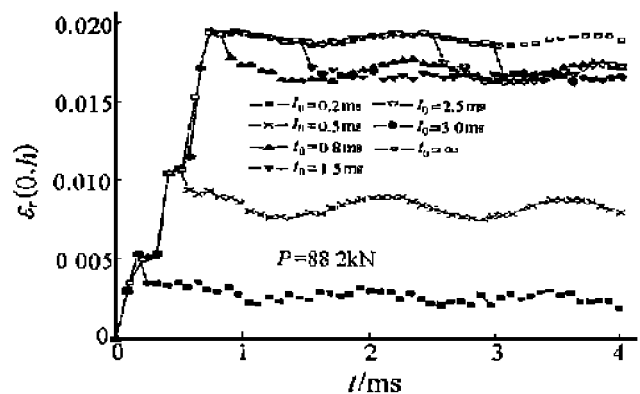


图 5 不同脉冲载荷作用时的应变-时间历史

Fig.5 Strain response of the plate under different pulse loads

4 结 论

利用最小加速度原理, 通过直接离散泛函, 得到了在突加分布载荷和集中载荷作用下铰支圆板的离散形式的动力控制方程组, 对于理想弹塑性材料, 应用 Prandtl-Reuss 塑性增量理论和 Mises 屈服条件, 建立了方程的求解程序。算例表明, 该方法是可靠的, 而且还显示了直接、简

便的特点,利用该方法求解冲击载荷作用下复杂结构的大变形动力问题将是方便的和有效的。另外,通过对圆板弹塑性响应的数值计算和分析,增进了对圆板动力行为的认识和理解,所得到的两点结论为:

(1) 对于集中阶跃载荷作用下的铰支圆板,在响应的最初阶段,位移应呈现明显的弹性弯曲波传播特征,响应后期为弹性振动阶段,而二者中间则经历了弹塑性变形阶段;弹性效应随着载荷的增加而相对减小,塑性变形使得达到最大变形时的时间延迟。

(2) 对于集中脉冲载荷作用下的铰支圆板,与最大变形相应的饱和冲量现象确实存在,但与永久变形相应的饱和冲量却并没有得到,而对于幅值相同的载荷选择不同的脉冲载荷作用时间时,则将出现振幅差别很大的残余振动。

参考文献:

- [1] Nurick G N, Martin J B. Deformation of Thin Plates Subjected to Impulsive Loading—A Review [J]. *Int J Impact Engng*, 1989, 8(2): 159—170.
- [2] 沈锡英,洪善桃,翁智远. 圆板弹塑性动力响应的弹性解法 [J]. *固体力学学报*, 1983, (2): 157—166.
- [3] 胡振东,洪善桃,洪景丰. 冲击载荷作用下大挠度圆板的弹塑性动力分析 [J]. *振动与冲击*, 1995, (1): 18—22.
- [4] 赵亚溥. 冲击载荷下结构塑性动力响应与失效的若干问题研究 [D]. 北京: 北京大学, 1994.
- [5] ZHU Ling, YU Tong-xi. Saturated Impulse for Pulse-loaded Elastic-plastic Square Plates [J]. *Int J Solids Structures*, 1997, 34: 1709—1718.
- [6] XI Feng, YANG Jia-ling, LI Zai-liang. Anomalous Behavior Revisited: Dynamic Response of Elastic-plastic Structures [J]. *ACTA Mechanica Solida Sinica*, 1998, 11(4): 1—10.
- [7] Lee L H N, Ni C M. A Minimum Principle in Dynamics of Elastic-plastic Continua at Finite Deformation [J]. *Archives of Mechanics*, 1973, 25: 456—461.

Dynamic Response Analysis of Elastic-plastic Thin Circular Plates under Impulse Loading with Consideration of Large Deflection

XI Feng¹, YANG Jia-ling²

- (1. *Shandong Institute of Architecture and Engineering, Jinan Shandong 250014, China;*
- 2. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Abstract: In this paper, based on the minimum principle in dynamics of elastic-plastic continua at finite deformation, a numerical method for analyzing dynamic response of thin circular plates, is presented. By careful study to the deflection response of a hinged-fixed circular plate under concentrated impulse loading, the saturated impulse phenomenon in the process of response is discussed. It is yet shown that the method proposed in the paper is simple and straightforward.

Key words: elastic-plastic circular plate; impulse loading; large deflection; dynamic response; saturated impulse; minimum principle in dynamics