

文章编号: 1001-1455 (2001) 01-0062-05

不可压结构聚合运动耦合增长的瑞利-泰勒不稳定性研究

林其文

(中物院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理实验室, 四川 绵阳 621900)

摘要: 推导并计算了不可压圆筒结构的扰动增长方程及具有弹性的运动方程, 讨论了氧气-乙炔混合气体聚爆明胶圆筒的耦合扰动增长规律, 研究结果为会聚结构的瑞利-泰勒不稳定性实验提供了很好的理论依据。

关键词: 会聚结构; 瑞利-泰勒不稳定性; 耦合增长; 扰动

中图分类号: O357. 4⁺1 文献标识码: A

1 引言

会聚结构中的流体力学不稳定性研究对认识惯性约束聚变 (ICF)、超新星爆发等的重要特征非常关键。所有这些现象都是由较轻的流体加速较重的流体形成的, 这就是瑞利-泰勒 (RT) 界面不稳定性。聚合运动的重要特点是: 流体壳层厚度要变化, 外部扰动对壳层内表面扰动的耦合影响比平面结构的要大得多。这些内表面的扰动是有害的, 它们将影响会聚结构的聚焦性能。近年来, Weir^[1] 等用高压气体聚爆明胶圆筒进行了 RT 不稳定性耦合增长的实验和分析研究, 取得了较好成果。不过, 该文侧重于实验介绍, 理论部分仅给出一些计算结果, 数学方程和计算方法均未报导。王继海^[2]、Plesset^[3] 及 Mikaelian^[4] 等分别对平面和球面结构的不稳定性进行了一些解析分析。多层柱壳结构不稳定性理论分析工作至今未见报道。根据小扰动分析法和流体力学基础理论, 我们导出了多层柱壳的扰动增长方程, 并针对 weir 等的实验模型, 计算和讨论了其不稳定性规律。

2 扰动增长的耦合方程

采用相似于球形结构扰动增长的小幅度分析方法^[4] 来推导圆柱形结构的扰动方程。考虑 N 层流体的柱形结构系统, 从里向外的流体密度依次为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, 界面平均半径为 R_1, R_2, \dots, R_{N-1} (最外层的半径 $R_N = \infty$, R_i 是密度为 ρ_i 和 ρ_{i+1} 的两层流体间的平均半径)。假定实际界面 r_i 上有波模为 n 、幅度为 η_i 的扰动, 则

$$r_i = R_i + \eta_i \phi_n \quad (1)$$

式中: $\phi_n \sim e^{in\theta}$ 为方位角 θ 的调谐函数。对于线性分析, 本文中假定

$$|n\eta_i| \ll R_i \quad (2)$$

在区域 i 内, 引进速度势 $v_i(r) = -\partial\varphi_i/\partial r$ 。对不可压流体, $\nabla^2\varphi_i = 0$, 柱壳即圆环区域 i 的速度势包括零级量和扰动量两部分, 其解为

$$\varphi_i(r) = -R_i R_i \ln r + B_i r^n \phi_n + C_i r^{-n} \phi_n \quad (3)$$

* 收稿日期: 2000-01-20; 修回日期: 2000-05-29

作者简介: 林其文 (1939—), 男, 副研究员。

式中： B_i 、 C_i 是 n 、 R_{i-1} 、 R_i 等的函数，与 r 无关。在界面 r_i 处，由 $v_i = \dot{r}_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} |_{r_i}$ 及公式 (1) 和 (3)，得

$$R_i \dot{R}_i / r_i - n B_i \dot{r}_i^{-n-1} \dot{\phi}_n + n C_i \dot{r}_i^{-n-1} \dot{\phi}_n = \dot{R}_i + \dot{\eta}_i \dot{\phi}_n \quad (4)$$

无扰动时，(3) 式中的 B_i 、 C_i 均为零，因此它们至少与扰动量同量级，将 (1) 式代入 (4) 式，并考虑强线性条件 (2) 式，保留 η_i 的一次项，则 (4) 式简化为

$$n B_i = n C_i R_i^{-2n} - R_i^{-n} \dot{S}_i \quad (5a)$$

式中： $\dot{S}_i = \frac{d}{dt} (R_i \eta_i)$ 。上式为区域 i 内的 B_i 、 C_i 在界面 r_i 上应满足的关系；同理可得到它们在界面 r_{i-1} 上的类似关系

$$n B_i = n C_i R_{i-1}^{-2n} - R_{i-1}^{-n} \dot{S}_{i-1} \quad (5b)$$

联立解方程 (5a)、(5b)，得

$$B_i = \frac{-R_i^{-n} \dot{S}_i}{n(1 - R_{i-1}^{2n}/R_i^{2n})} - \frac{R_{i-1}^{-n} \dot{S}_{i-1}}{n(1 - R_i^{2n}/R_{i-1}^{2n})} \quad (6)$$

$$C_i = \frac{R_i^n \dot{S}_i}{n(1 - R_{i-1}^{-2n}/R_i^{-2n})} + \frac{R_{i-1}^n \dot{S}_{i-1}}{n(1 - R_i^{-2n}/R_{i-1}^{-2n})} \quad (7)$$

从方程 (6)、(7) 可以看出， B_i 、 C_i 满足对应关系 $C_i(n) = B_i(-n)$ 。

为了得到理想界面半径 R_i 和扰动量 η_i 的运动方程，应用区域 i 和 $i+1$ 的两层流体压力在实际界面半径 $r_i = R_i + \eta_i \dot{\phi}_n$ 处连续的条件，即

$$P_i(t) + \rho_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_i)^2 \right)_{r_i} = P_{i+1}(t) + \rho_{i+1} \left(\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_{i+1})^2 \right)_{r_i} \quad (8)$$

式中： $P_i(t)$ 及 $P_{i+1}(t)$ 是伯努利积分常数。将 (3) 式代入上式，并在对 η_i 的展开式中仅保留 η_i 的最低次幂，考虑到流体层的不可压关系 $R_{i+1} \dot{R}_{i+1} = R_i \dot{R}_i$ ，最后可分别得到零级量 R_i 及扰动量 η_i 的运动方程

$$P_i - P_{i+1} = (\rho_i - \rho_{i+1}) (\ln R_i \frac{d}{dt} (R_i \dot{R}) + \dot{R}_i^2 / 2) \quad (9)$$

$$(\rho_{i+1} - \rho_i) \frac{d}{dt} (\dot{R}_i S_i) = R_i^{n+1} (\rho_{i+1} \dot{B}_{i+1} - \rho_i \dot{B}_i) + R_i^{-n+1} (\rho_{i+1} \dot{C}_{i+1} - \rho_i \dot{C}_i) \quad (10)$$

界面零级量 R_i 的运动方程 (9) 未考虑材料弹性，且积分常数 $P_i(t)$ 在数值分析中不好处理，所以下节将另外讨论这个问题。从方程 (10) 可见，界面 i ($i=1, 2, \dots, N-1$) 的扰动幅度 η_i 与 η_{i-1} 、 η_{i+1} 相关，所以系统的 $N-1$ 个界面的扰动幅度方程需联立求解。注意到 $r \rightarrow 0$ 或 $r \rightarrow \infty$ 时，速度势 φ 取有限值，所以，要求 $C_1 = B_N = 0$ 。

我们感兴趣的高压气体驱动明胶圆筒的模型中， $N=3$ ，又因圆筒内外均为气体，所以 $\rho_1 \approx \rho_3 \approx 0$ ，方程 (10) 简化为

$$\frac{d}{dt} (\dot{R}_i S_i) = R_i^{n+1} \dot{B}_2 + R_i^{-n+1} \dot{C}_2 \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

将 (6) 式和 (7) 式代入上式，整理后，可得 $S_i = R_i \eta_i$ 的共轭二阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = G_{12} S_1 + G_{13} \dot{S}_2 + G_{14} S_2 \\ \dot{S}_2 = G_{22} S_2 + G_{23} \dot{S}_1 + G_{24} S_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中：

$$\begin{cases} G_{12} = \frac{n(1 + \psi^{2n}) \dot{R}_1}{1 - \psi^{2n} R_1}, & G_{13} = \frac{2n\psi^n A_0 D}{1 - \psi^{2n} R_1^2 R_2^2}, & G_{14} = -\frac{2n\psi^n \dot{R}_2}{1 - \psi^{2n} R_2} \\ G_{22} = -\frac{\dot{R}_2 R_1}{R_2 \dot{R}_1} G_{12}, & G_{23} = G_{13}, & G_{24} = -\frac{\dot{R}_1 R_2}{R_1 \dot{R}_2} G_{14} \end{cases} \quad (13)$$

式中： $D = R_1 \dot{R}_1 = R_2 \dot{R}_2$ ， $\psi = R_1 / R_2$ ， $A_0 = R_2^2 - R_1^2$ 为常数。

3 弹性圆筒的一维运动

考虑内半径 R_1 、外半径 R_2 的弹性圆筒承受内压 p_1 和外压 p_2 的作用而发生径向运动的问题。由不可压连续方程 $\partial(rv)/\partial r=0$, 可得 $D(t)=v$, 并代入运动方程 $\dot{\theta}=\partial\sigma_r/\partial r+(\sigma_r-\sigma_\theta)/r$, 即得 D 与应力 σ_r 、 σ_θ 的关系

$$\frac{\dot{D}}{r}=\frac{D^2}{r^3}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} \quad (14)$$

由应力、偏应力及应变间的本构关系, 可导出不可压圆筒的应力满足条件 $\dot{\sigma}_r-\dot{\sigma}_\theta=-4Gv/r$, G 为剪切模量, 积分后得 $\sigma_r-\sigma_\theta=-2G(R_2^2-R_{20}^2)/r^2$, R_{20} 为 R_2 的初值。将此应力关系代入 (14) 式, 对 r 从 R_1 到 R_2 积分, 并应用应力的边值条件 $\sigma_r(R_1)=-p_1$ 和 $\sigma_r(R_2)=-p_2$, 便得到 D 的一阶常微分方程

$$\dot{D}=\left\{\frac{p_1-p_2}{\rho}+\frac{A_0}{R_1^2R_2^2}\left[\frac{D^2}{2}+\frac{GR_{20}^2}{\rho}\left(1-\frac{R_2^2}{R_{20}^2}\right)\right]\right\}/\ln(R_2/R_1) \quad (15)$$

上式与界面速度 $\dot{R}_i=D/R_i$ ($i=1, 2$) 联立积分, 即得到圆筒界面的运动历史。

(15) 式既考虑了弹性, 又以界面压力为边界条件, 对解决实际问题非常实用。

4 算例与讨论

本算例参考 Weir^[1] 等提出的实验模型: 0 (空气) R_1 (明胶) R_2 (爆炸气体) R_3 (固定金属套)。上下底用透明的有机玻璃板密封。明胶圆筒初始半径 $R_{10}=4\text{cm}$, $R_{20}=5.5\text{cm}$, 密度 $\rho=1.0\text{g/cm}^3$, 剪切模量 $G=7\text{kPa}$ 。内空腔的空气初始压力 $p_{10}=0.1\text{MPa}$, 固定金属套内半径 $R_3=11\text{cm}$, 外空腔充入摩尔质量相同的氧气和乙炔的混合气体 (压力为 0.1MPa), 爆炸后外空腔内的平增压力为 $p_{20}=1.65\text{MPa}$ 。假定内外空腔中的气体满足多方气体的状态方程, 并取空气和混合气体的多方指数分别为 1.4 和 1.279。明胶圆筒外表面引入初始扰动波模: $r_2=R_2+\eta_2\sin(n\theta)$, 初始幅度 $\eta_{20}=0.1\text{cm}$, 模数 $n=6$ 。

圆筒的运动方程 (15) 和扰动增长的耦合方程组 (12) 均采用龙格-库塔数值积分。我们进行了一系列数值模拟, 下面介绍主要的结果。图 1~图 4 分别为明胶圆筒内外表面的半径、速度、加速度及扰动幅度的时间变化曲线。图 5 为不同时刻的圆筒界面图形。从图 3 可见, 在 $550\mu\text{s}$ 前, 外表面和内表面都向内加速, 因此外表面是 RT 不稳定的, 内表面是稳定的。从 $550\mu\text{s}$ 到 $740\mu\text{s}$, 外表面向外加速, 内表面仍向内加速, 两个界面都是稳定的。在 $740\mu\text{s}$ 后, 内表面开始向外加速, 变为不稳定了。圆筒的聚焦时间约 $765\mu\text{s}$, 聚焦半径约 3.7mm 。

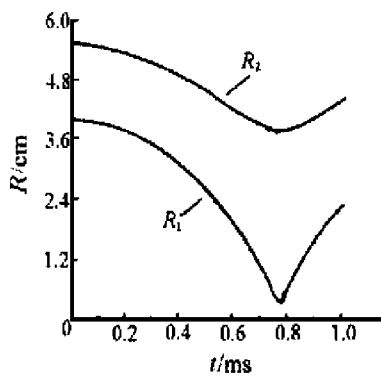


图 1 圆筒半径随时间的变化
Fig. 1 Cylinder radius vs. time

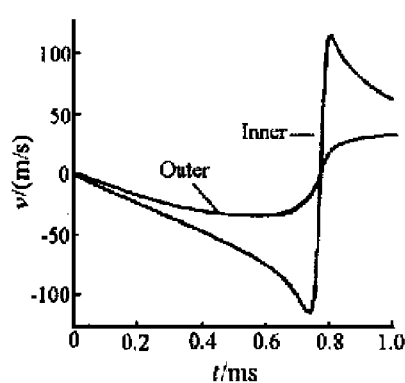


图 2 圆筒界面速度随时间的变化
Fig. 2 Radial velocity at surfaces vs. time

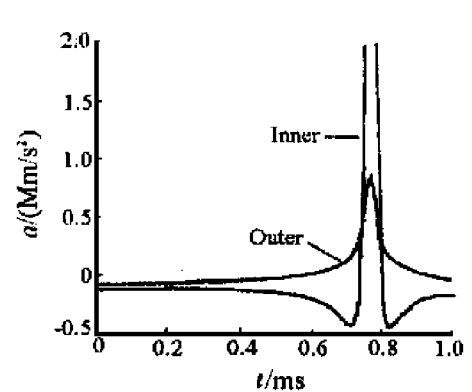


图 3 圆筒界面加速度随时间的变化
Fig. 3 Radial acceleration at surfaces vs. time

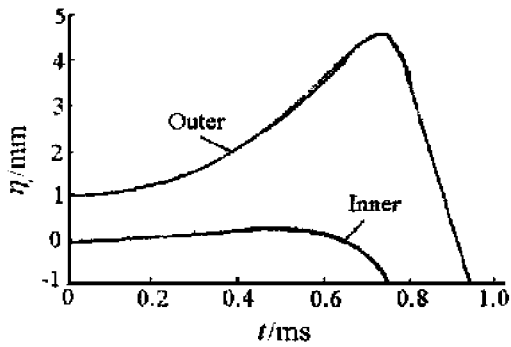


图 4 扰动幅度随时间的变化

Fig. 4 Perturbation amplitude at surfaces vs. time

我们认为，对微分方程组 (12) 中的系数 G_{ij} 在不同时间的量值的分析，有助于深入理解扰动幅度耦合增长的演变，这种演变可粗略分为三个阶段：

(1) 强耦合段 ($0 \sim 450\mu\text{s}$)。在这个阶段，一方面外扰动由 G_{22} 决定的速率按指数增长，另一方面，因 G_{14} 和 G_{24} 相当大，内外扰动之间有显著的耦合作用，外扰动的 RT 发展强有力地激励内部耦合扰动的增长。此阶段， η_1 / η_2 与 $\exp(-k\Delta R)$ 有近似的比例关系（与平面耦合理论相似）(图 4、图 5 (a))，其中 $k = n/R_2$, $\Delta R = R_2 - R_1$ ，表明 η_1 随模数 n 和壳层厚度 ΔR 的增加而减小。

(2) 退耦段 ($450 \sim 740\mu\text{s}$)。在这个阶段，随着圆筒的会聚， $\varphi = R_1/R_2$ 变得很小，内外扰动的交叉耦合系数 G_{14} 和 G_{24} 大大减小，而系数 G_{12} 和 G_{22} 至少比其它系数大一个量级，因此，方程组近似地描述两个几乎独立的简谐振子。外表面加速度为正，其扰动变成稳定的，对内部扰动，在强耦合段，使其幅度为正，而现在的简谐振动迫使其幅度减小 ($G_{12} < 0$)，于是出现了耦合扰动幅度为负，即相位翻转的现象 (图 4、图 5 (b)、(c))。

(3) 减速段 ($740 \sim 790\mu\text{s}$)。在这个阶段，内表面的加速度为正，开始减速会聚，变成 RT 不稳定的，从而使内表面扰动幅度呈快速指数增长 (图 4、图 5 (d))，以致最后可能导致湍流混合。

上述结果与 Weir 等的研究结果基本相符。计算中，还初步比较了模数 n 对界面失稳的影响。当 n 较大时，其扰动耦合作用变弱，独立谐振增强，所以强耦合段和退耦段不明显，也无相位翻转现象。不过，圆筒内界面失稳时间的改变很小（都与内表面聚焦或反弹的时间相当）。公式 (2) 在内界面失稳前，通常是成立的。最后，我们分析了材料弹性的影响。对低弹性的明胶，是否考虑弹性，二者差别不大。不过，对于高弹性材料，将对会聚和减小 RT 不稳定性有较大影响。

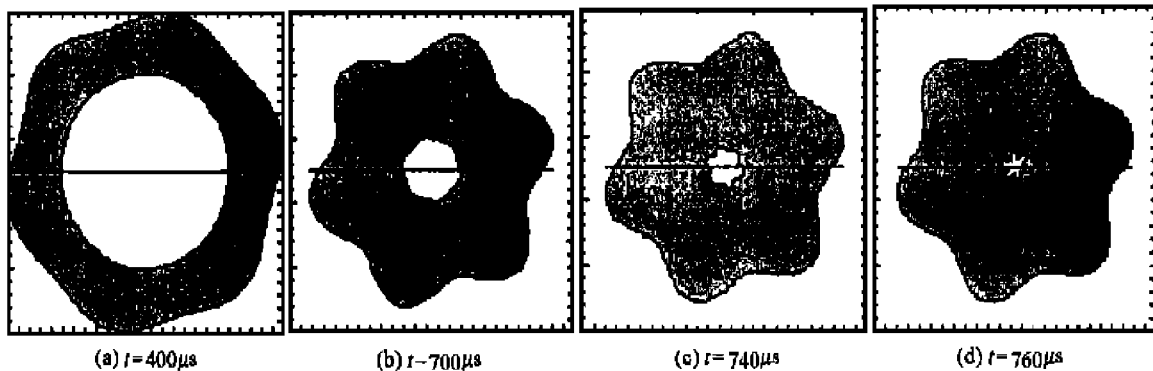


图 5 6 型圆筒的变形过程

Fig. 5 Cylinder deformation with time

5 结束语

文中给出的不可压会聚结构的耦合扰动方程及弹性圆筒的运动方程，能较好地描述圆筒的会聚及内外界面的扰动耦合增长规律。本研究结果为会聚结构的 RT 不稳定性实验提供了很好的理论依据。

参考文献:

- [1] Weir S T, Chandler E A, Goodwin B T. Rayleigh-Taylor Instability Experiments Examining Feedthrough Growth in an Incompressible, Convergent Geometry [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80 (17): 3763—3766.
- [2] 王继海. 二维非定常流和激波 [M]. 北京: 科学出版社, 1994. 358—364.
- [3] Plesset M S. On the stability of Fluid Flows with Spherical Symmetry [J]. *J Appl Phys*, 1954, 25 (1): 96—98.
- [4] Mikaelian K O. Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov Instabilities and Mixing in Stratified Spherical Shells [J]. *Phys Rev A*, 1990, 42 (6): 3400—3420.

Rayleigh-Taylor Instability of Feedthrough Growth In an Incompressible Convergent Geometry

LIN Qi-wen

*(Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research,
Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang 621900, Sichuan, China)*

Abstract: Feedthrough perturbation growth equations in an incompressible cylinder geometry and motion equations in elastic cylinder were derived. Feedthrough perturbation growth in cylindrical gelatine driven by explosions in oxygen-acetylene gas mixture are discussed and analysed. Calculational results are in good agreement with S. T. Weir et al's reports. The results are useful for studying Rayleigh-Taylor instability experimentally.

Key words: convergent geometry; Rayleigh-Taylor instability; feedthrough growth; perturbation