

文章编号: 1001-1455(2001)03-0193-05

可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定性的影响

秦承森, 张凤国, 李 勇

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘要: 对于状态方程为压力是密度的任意单值函数的理想流体, 导出了 Rayleigh-Taylor 不稳定性色散关系的一般形式。它表明: 较重流体易压缩是稳定因素, 较轻流体易压缩是不稳定因素。可压缩性在重力场作用下形成的密度分布是稳定性因素, 而膨胀压缩效应是不稳定因素。

关键词: 界面不稳定性; 可压缩性; 微扰方法

* 中图分类号: O354 文献标识码: A

1 引言

在可压缩流体界面不稳定性的研究中, 流体可压缩性在界面不稳定性中的作用, 引起了讨论, 分歧很大。W. G. Mathews 和 G. R. Blumenthal^[1] 认为可压缩性是稳定性因素; 而 A. J. Scannapieco^[2], W. A. Newcomb^[3] 则认为可压缩性是不稳定性因素; L. Baker^[4] 认为可压缩性既可增加又可减少界面扰动的增长率, 取决于较轻流体是否更容易被压缩。但是, 到目前为止, 所有的研究均着眼于等熵状态方程的具体形式, 在所列几种状态方程中, γ 的不同取值, 可压缩性影响不同, 甚至方向相反, 由此得出的结论有局限性。为了克服这种局限性, 得到不依赖于状态方程具体形式的结论, 本文处理了理想正压性流体, 即假设流体的压力是流体密度的单值函数, $p = f(\rho)$ 具有任意形式, 给出了色散关系的一般表达式。在不同状态方程形式下, 它可以化为以往文献中的已知结果。使用本文的结果, 我们讨论了可压缩性的作用。

研究表明流体可压缩性对界面不稳定性的影响体现在两个方面: 可压缩性在重力场作用下形成的密度分布是稳定因素; 可压缩流体的膨胀压缩效应是不稳定因素; 可压缩性对界面不稳定性的影响是助长还是抑制其扰动发展取决于两个流体的相对可压缩性; 上层流体更容易压缩时, 可压缩性表现为稳定因素, 而下层流体更容易压缩时, 流体可压缩性则助长界面扰动的发展。

2 控制方程和微扰方程

设无扰动状态为两种理想可压缩流体处于静止状态, 分别占据 $h_1 \geq y > 0$ (其物理量下标为“1”) 和 $h_2 \leq y < 0$ (其物理量下标为“2”), 流体均在保守力场 $G_i = -\nabla V_i$ 的作用下, 保守力方向指向 $-y$ 的方向, V_i 为保守力势, 不随时间变化。

对于正压性流体, 状态方程为函数形式 $p = f(\rho)$, 引入一个状态量 Π , 定义为

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho} \quad (1)$$

或

$$d\Pi = dp/\rho \quad (2)$$

* 收稿日期: 2000-03-14; 修回日期: 2001-01-25
基金项目: 中国工程物理研究院行业预研基金项目(990183)
作者简介: 秦承森(1941—), 男, 研究员, 博士生导师。

在保守力作用下, 初始静止的理想正压性流体的运动是无旋的, 即存在速度势 ϕ , 使速度 \mathbf{u} 可表示为

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \quad (3)$$

由动量守恒方程和质量方程可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u^2}{2} \right] - C^2 \nabla^2 \phi - \nabla\Pi \cdot \nabla\phi = 0 \quad (4)$$

导出微扰方程为

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial\phi'}{\partial x^2} - C_0^2 \frac{\partial\phi'}{\partial y^2} + G \frac{\partial\phi'}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

界面 $y = \eta(x, t)$ 的连续条件为

$$\partial\eta/\partial t = \partial\phi'_1/\partial y = \partial\phi'_2/\partial y \quad (6)$$

方程(6)给出了内界面边界条件。

2 色散关系的一般表达式

取微扰方程(5)解 $\phi'_j(t, x, y)$ 的形式为

$$\phi'_j(t, x, y) = \Phi_j(y) \exp(nt + ikx) \quad (j = 1, 2 \text{ 代表不同流体}) \quad (7)$$

式中: n 为复数, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长。其它扰动量 p'_j , ρ'_j , Π'_j 等亦可取为与(7)式类似的形式, 如界面扰动为

$$\eta(t, x) = \eta_0(y) \exp(nt + ikx) \quad (8)$$

将(7)式代入, 得到关于 $\Phi_j(y)$ 的方程为

$$\frac{d^2\Phi_j}{dy^2} - \frac{G_j}{C_{j0}^2} \frac{d\Phi_j}{dy} - \left[k^2 + \frac{n^2}{C_{j0}^2} \right] \Phi_j = 0 \quad (9)$$

方程(9)中, C_{j0}^2 一般是 y 的函数, 取决于状态方程的形式。假设方程(9)在外边界条件下的解已经求得, 为 $\Phi_j(y) = A_j W_j(y)$, 其中 A_j 为由内边界条件决定的常数。

由内边界条件可以得到:

$$n = \sqrt{\frac{(\rho_{10}G_1 - \rho_{20}G_2) - k^2 T}{\rho_{10}q_1 + \rho_{20}q_2}} \quad (10)$$

式中:

$$\begin{cases} q_1 = - \left[\Phi_1 / \left[\frac{d\Phi_1}{dy} \right] \right]_{y=0} \\ q_2 = \left[\Phi_2 / \left[\frac{d\Phi_2}{dy} \right] \right]_{y=0} \end{cases} \quad (11)$$

这是一个色散关系的一般表达式, 显然 q_1 和 q_2 是 n 的函数, 故色散关系的一般表达式(10)式和(11)式是一个关于 n 的代数关系式, 需要数值求解。

4 声速缓变条件下的色散关系

在声速缓变条件下, 按文献[5]可得方程(9)的解

$$\Phi_j = A_{0j} W_{1j} + B_{0j} W_{2j} \quad (12)$$

式中:

$$\begin{cases} W_{1j} = \exp \left[\int_0^y \left[\lambda_{1j} - \left[2\lambda_{1j} - \frac{G_j}{C_j^2} \right]^{-1} \frac{d\lambda_{1j}}{dy} \right] dy \right] \\ W_{2j} = \exp \left[\int_0^y \left[\lambda_{2j} - \left[2\lambda_{2j} - \frac{G_j}{C_j^2} \right]^{-1} \frac{d\lambda_{2j}}{dy} \right] dy \right] \end{cases} \quad (13)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{G_j}{2C_j^2} + (-1)^l \sqrt{\left[\frac{G_j}{2C_j^2}\right]^2 + k^2 + \frac{n^2}{C_j^2}} \quad (l = 1, 2) \quad (14)$$

为了避免讨论上下边界对扰动发展的影响,我们假设上下边界在 $\pm\infty$ 处。这在物理上表示所研究的波长及扰动幅度较流体厚度小得多,且研究扰动发展的时间范围也较声波到达上下界面的时间小。

在此条件下,给出的 q_1 和 q_2 表达式为

$$\begin{cases} q_1 = - \left[\frac{1}{\lambda_{11} - \left[2\lambda_{11} - \frac{G_1}{C_{10}^2} \right]^{-1} \frac{d\lambda_{11}}{dy}} \right]_{y=0} \\ q_2 = \left[\frac{1}{\lambda_{22} - \left[2\lambda_{22} - \frac{G_2}{C_{20}^2} \right]^{-1} \frac{d\lambda_{22}}{dy}} \right]_{y=0} \end{cases} \quad (15)$$

式中:

$$\begin{cases} \lambda_{11} = \frac{G_1}{2C_{10}^2} - \sqrt{\left[\frac{G_1}{2C_{10}^2}\right]^2 + k^2 + \frac{n^2}{C_{10}^2}} \\ \lambda_{22} = \frac{G_2}{2C_{20}^2} + \sqrt{\left[\frac{G_2}{2C_{20}^2}\right]^2 + k^2 + \frac{n^2}{C_{20}^2}} \end{cases} \quad (16)$$

5 数值结果

我们仅研究无表面张力重力场情况,引入无量纲量: $\alpha_0 = (\rho_{10} - \rho_{20}) / (\rho_{10} + \rho_{20})$ 、 $N^2 = n^2 / kg$ 、 $H_2 = g / (2kC_{20}^2)$ 、 $H_1 = g / (2kC_{10}^2)$, 图(1) ~ 图(4) 显示 $N^2 - H_1 - H_2$ 的变化, N^2 是 H_1 的减函数、 H_2 的增函数。上层流体具有较好的可压缩性(即 H_1 较大,或 C_1 较小),可以减小界面扰动增长速率,而下层流体具有较好的可压缩性时,将助长界面的不稳定性发展。在 α_0 接近 1 时,可压缩性的影响减弱。在 $H_1 = H_2$ 时,(即 $C_{10} = C_{20}$ 时),可压缩性的影响并不消失。令 $H_{\xi} = dH/d(ky)$, 图(5)、图(6) 显示了 $N^2 - H_{\xi_1} - H_{\xi_2}$ 的变化曲线,由图中可以看出, N^2 是 H_{ξ_1} 和 H_{ξ_2} 的减函数。

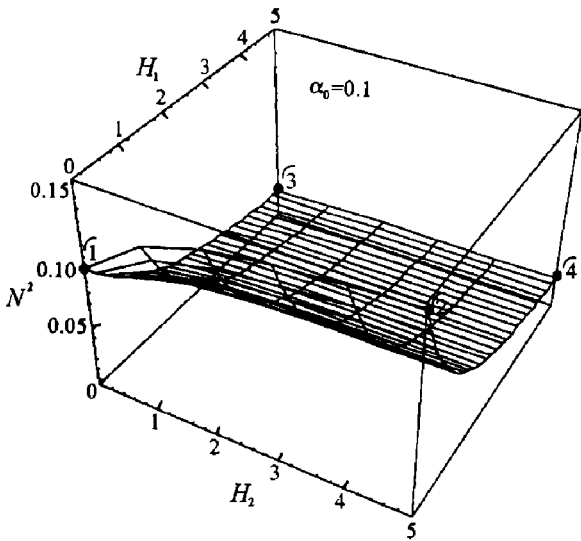


图 1 $N^2 - H_1 - H_2$ 关系曲面图
Fig. 1 $N^2 - H_1 - H_2$ relationship surface

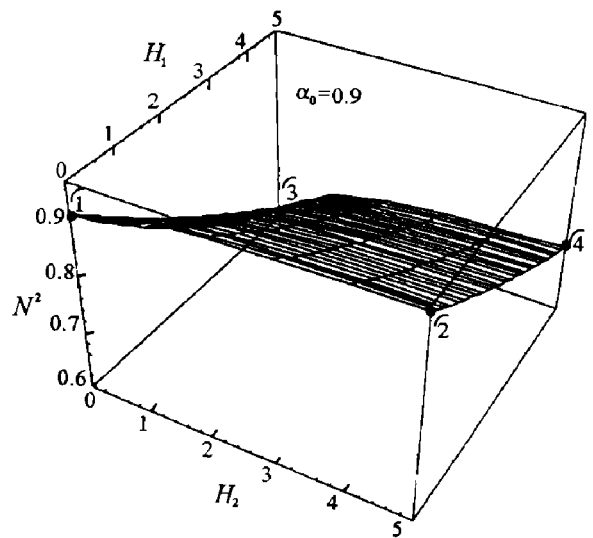


图 2 $N^2 - H_1 - H_2$ 关系曲面图
Fig. 2 $N^2 - H_1 - H_2$ relationship surface

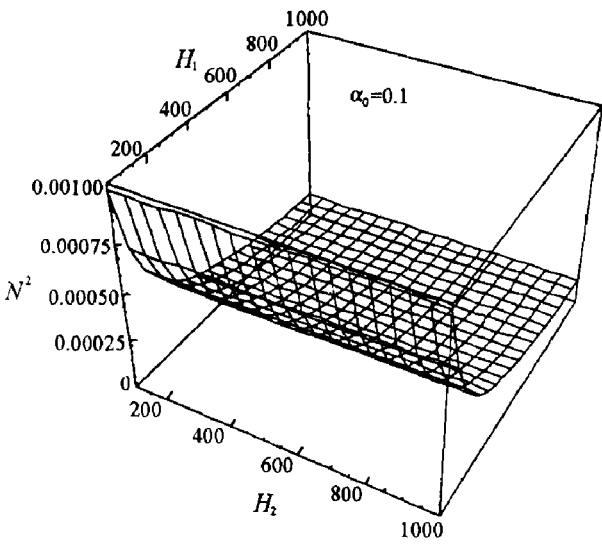


图 3 $N^2-H_1-H_2$ 关系曲面图
Fig. 3 $N^2-H_1-H_2$ relationship surface

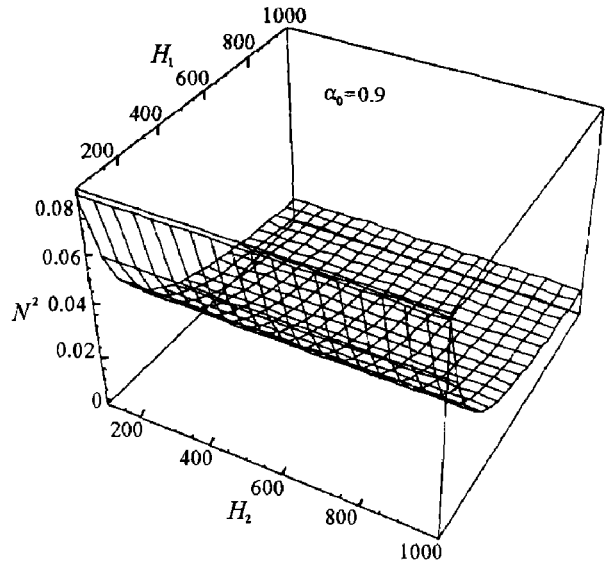


图 4 $N^2-H_1-H_2$ 关系曲面图
Fig. 4 $N^2-H_1-H_2$ relationship surface

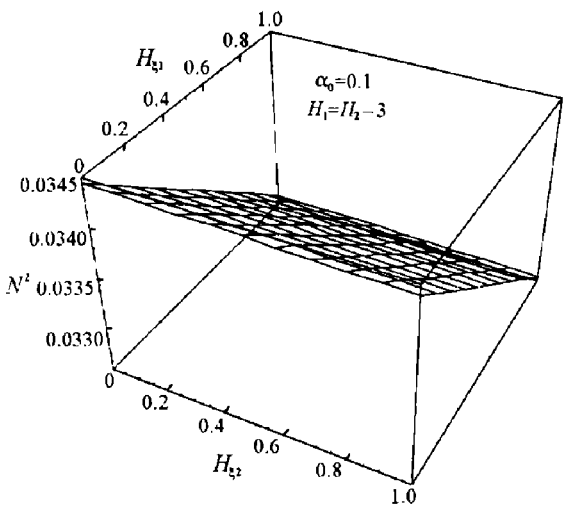


图 5 $N^2-H_{\xi_1}-H_{\xi_2}$ 关系曲面图
Fig. 5 $N^2-H_{\xi_1}-H_{\xi_2}$ relationship surface

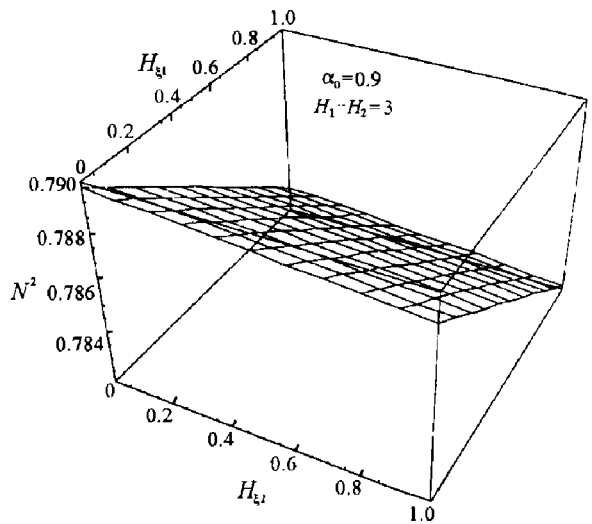


图 6 $N^2-H_{\xi_1}-H_{\xi_2}$ 关系曲面图
Fig. 6 $N^2-H_{\xi_1}-H_{\xi_2}$ relationship surface

6 可压缩性的作用

流体可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定性的影响,可以体现在两个方面。一是流体可压缩性在重力场作用下形成的密度分布,它是致稳因素;另一方面,流体可压缩性在运动过程中显示的压缩膨胀效应,是不稳定因素。流体可压缩性对界面不稳定性的影响是上述两个相互矛盾因素的综合结果。由 α_1 表达式可知,这两个相矛盾因素的综合效果是:如果上层重介质的可压缩性较下层轻介质的可压缩性好 ($C_1 < C_2$),则可压缩性的总体效应起稳定作用,反之,起不稳定作用。重力 g 沿 y 方向减少是稳定性因素。

在状态方程取文献[6~8]中的形式时,本文结果可自然演化为文献的结果。使用等温状态方程 $p = C^2 \rho$ 时,由于界面上压力平衡,有 $C_2^2/C_1^2 = \rho_1/\rho_2 > 1$,即上层流体较下层流体易于压缩。流体可压缩性是稳定因素。这是文献[8]的结论,也是本文结果的特例。

参考文献:

- [1] MATHEWS W G, BLUMENTHAL G R. Rayleigh-Taylor Stability of Compressible and Incompressible Radiation-Supported Surfaces and Slabs: Application to QSO Clouds [J] . *Astrophys*, 1977, 10: 1214.
- [2] SCANNAPIECO A J. Atmospheric Type Mode in Laser Fusion Targets [J] . *Phys Fluids*, 1981, 24: 1699.
- [3] NEWCOMB W A. Compressibility Effect on Instability Growth Rates [J] . *Phys Fluids*, 1983, 26: 3246.
- [4] BAKER L. Analytic Theory of Ablator Layer Instability [J] . *Phys Fluids*, 1983, 26: 950.
- [5] NAYFEH A H. *Perturbation Methods* [M] . Wiley, New York, 1973.
- [6] BEMSTEIN I B, BOOK D L. Effect of Compressibility on the Rayleigh-Taylor Instability [J] . *Phys Fluids*, 1983, 26: 453.
- [7] PLESSET M S, HSICH Y Y. General Analysis of the Stability of Superposed Fluids [J] . *Phys Fluids*, 1964, 7: 1099.
- [8] LEZZI A M, PROSPERETTI A. Rayleigh-Taylor Instability for Adiabatically Stratified Fluids [J] . *Phys Fluids A*, 1989, 1(11): 1784.

Compressibility Effect on Rayleigh-Taylor Instability

QIN Cheng-sen, ZHANG Feng-guo, LI Yong

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

Abstract: A general formula of the dispersion relation of Rayleigh-Taylor instability for the ideal fluid with the state equation, which is an arbitrary pressure of density function is given. It shows that good compressibility of the upper fluid plays a stabilizing role, while good compressibility of the lower fluid has a destabilizing effect, the density distribution induced by the gravity is a stable factor. While fluid expanding and compressing effect is an instable factor.

Key words: Rayleigh-Taylor; compressibility; perturbation method