第 21 卷　第 3 期
2001 年 7 月
爆　炸　与　冲　击
EXPLOSION AND SHOCK WAVES
Vol.21, No.3
Jul., 2001

文章编号：1001-1455(2001)03-0215-08

OSTR 试验下感度分布参数的推断

田玉斌[1,2]，蔡瑞娇[3]，李国英[2]，严楠[3]
(1. 北京理工大学应用数学系，北京　100081；
2. 中国科学院数学与系统科学研究院，北京　100080；
3. 北京理工大学机电工程系，北京　100081)

摘要：研究了 OSTR 试验数据的统计处理方法。给出了推断感度分布参数的两种方法：条件推断与非条件推断方法。通过研究与模拟，得出条件推断方法适用于推断机械撞击作用火工品的一些 R 响应点的结论。

关键词：OSTR 法；感度试验；极大似然估计；条件推断；非条件推断

中图分类号：O643.2　　文献标识码：A

1　引　言

在确定火炸药感度、弹药和材料强度阈值等方面，感度试验起着非常关键的作用。美国陆军标准[1]和我国军标[2]推荐使用的序贯感度试验方法有升降法、Langlie 法和 OSTR(One Shot Transformation Regular)法。其中升降法和 Langlie 法的设计目的是估计 50％响应点，OSTR 法的设计目的是估计 R 响应点 x_R (在刺激水平 x_R 处产品响应的概率为 R)。当 R 较大(或较小)时，x_R 恰为对应于可靠度(或安全度) R 的水平。在对 OSTR 试验数据进行统计处理时，国外研究者[1,3]将试验用刺激水平视为已知量，应用本文第 2 节介绍的数据(1)求感度分布参数及 R 响应点 x_R 的极大似然估计。国内研究者[2]一般也将试验用刺激水平视为已知量，并基于本文介绍的数据(2)求感度分布参数及 R 响应点 x_R 的极大似然估计。由于两次总试验量相同的 OSTR 试验得到的刺激水平不一定完全一致，近些年来，国内一些研究者[4]认为将试验用刺激水平处理为已知量是不恰当的，应将其作为随机变量进行处理，但是其中涉及的概念与理论还不很清晰与完善。由于 OSTR 试验数据的统计处理方法还不完善，我国应用部门至今仍较少应用该方法。

目前，国内外有关 OSTR 试验数据统计处理的研究还存在以下问题：应用数据(1)或数据(2)估计感度分布的参数及 R 响应点 x_R 时，对估计的精度有什么影响；如何从理论上研究试验用刺激水平的随机性与非随机性问题；将试验用刺激水平作为已知量或随机量对感度分布的参数及 R 响应点 x_R 的估计精度有什么影响。

我们根据数量统计理论系统地研究了以上问题，提出了 OSTR 试验数据的条件推断与非条件推断两种方法。从理论上研究了试验用刺激水平的随机性。在此基础上分别给出了基于数据(1)和(2)推断感度分布参数及 R 响应点 x_R 的方法，对每种数据形式分别考虑了试验用刺激水平视为已知量和作为随机量的两种情形。我们还应用蒙特卡洛方法模拟比较了两种推断方法所得感度分布的参数及 R 响应点 x_R 的估计精度，最后讨论了两种推断方法的适用性与局限性。

2　OSTR 试验及试验数据

在做 OSTR 试验前需预先确定感度分布类形 $F(a_i, \theta)$[这里 $i=1, \cdots, N$, $\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_r)$为 r 维未知

* 收稿日期：2000-10-28；　修回日期：2000-01-31
基金项目：国家九五计划项目(H9602－2)
作者简介：田玉斌(1966－　)，女，博士，副教授。

参数] 和待估响应点 x_R。试验方案的内容主要包括:预估感度分布的全发火上限 x_U 和全不发火下限 x_L;确定试验停止规则;按以下公式确定用一刺激水平所做的最大试探次数 m

$$F^m(x_R,\ \theta) = 0.5$$

在该刺激水平处做逐次试探,只要一出现不响应,停止用此刺激水平的试验,记试验结果为 U,称其为“失败”;如果 m 发产品均响应,也停止用此刺激水平的试验,记试验结果为 D,称其为“成功”。

试验方案确定后,OSTR 试验程序如下进行。在刺激水平 $a_1 = [x_L + P(x_U - x_L)]$ 处做第一组试验,记试验数据为

$$y_1 = \begin{cases} 1, \text{在试验水平 } a_1 \text{ 处的实验结果为 D} \\ 0, \text{在试验水平 } a_1 \text{ 处的实验结果为 U} \end{cases}$$

作完第 $i(i \geq 1)$组试验后,第 $i+1$ 组试验用刺激水平为

$$a_{i+1} = (a_i + a_j)/2$$

式中:a_{i+1}为第 $i+1$ 组试验用刺激水平,a_i 为第i 组试验用刺激水平,a_j 满足从第i 组试验往前数至第j 组试验,使得第一次出现 U 的个数与 D 的个数相等。如果不存在这样的 j,则取

$$a_j = \begin{cases} x_L, \text{在刺激水平 } a_i \text{ 处,实验结果为 D} \\ x_U, \text{在刺激水平 } a_i \text{ 处,实验结果为 U} \end{cases}$$

第 $i+1$ 组试验的试验数据记为

$$y_{i+1} = \begin{cases} 1, \text{在刺激水平 } a_{i+1} \text{ 处的实验结果为 D} \\ 0, \text{在刺激水平 } a_{i+1} \text{ 处的实验结果为 U} \end{cases}$$

试验停止后,得到两种形式的试验数据

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_N \\ & \cdots & \\ y_1 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中:N 为试验用刺激水平的个数。式(1)为 OSTR 试验的变换数据。

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_N \\ n_1 & \cdots & n_N \\ s_1 & \cdots & s_N \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中:n_i 为刺激水平a_i 处的试验发数,s_i 为响应发数。式(2)为 OSTR 试验的非变换数据。

OSTR 法通过 m 构造分布函数

$$G(a_i,\ \theta) = F^m(a_i,\ \theta)$$

式中:a_i 为某一刺激水平,$G(a_i,\ \theta)$称为变换感度分布。

在 R 响应点x_R 处,不难求得

$$G(x_R,\ \theta) = F^m(x_R,\ \theta) = 0.5$$

可见,x_R 为变换感度分布$G(a_i,\ \theta)$的 50%响应点。OSTR 法的思想是将原感度分布的 R 响应点x_R 转化为一变换感度分布的 50%响应点来估计。

3 刺激水平的随机性

OSTR 试验第一组用刺激水平 a_1 是已知量,第二组用刺激水平 a_2 由 a_1 和 a_1 处的试验数据 y_1 确定。由此类推,第 $i+1(i>1)$组用刺激水平 a_{i+1}由 a_1 和前 i 组试验的试验数据$y_1, \cdots, y_i$ 确定。由 OS-TR 试验规则,不难得到第 $i+1(i>1)$组用刺激水平和前 i 组试验的试验数据之间的关系。

引理 1 在 OSTR 试验下,若记 $A_i = \{l : \sum_{t=l}^{i} y_t = \sum_{t=l}^{i}(1-y_t)\}$,则第 $i+1$ 组用试验刺激水平 a_{i+1}可以表示为

$$a_{i+1}=\{a_i+[y_i x_L+(1-y_i)x_U](1-I_{A_i})+I_{A_i}a_{\max\{A_i\}}\}/2,\ i>1。$$

式中：A_i 为由元素 $l(1\leq l<i)$ 组成的集合，其中 l 满足从第 l 组试验数至第 i 组试验，试验结果 D 和 U 的个数恰好相等。若 A_i 不是空集，$\max\{A_i\}$ 为集合 A_i 中的最大元素；若 A_i 是空集，$\max\{A_i\}$ 等于 1 。

$$I_{A_i}=\begin{cases}1, A_i\neq\varnothing\\ 0, A_i=\varnothing\end{cases}$$，其中：$\varnothing$ 为空集。

由引理 1 知，OSTR 法试验的刺激水平 a_{i+1} 是 a_1 和前 $i(i>1)$ 组试验的试验数据 $y_1, \cdots, y_i$ 的函数，$a_2, \cdots, a_N$ 是随机变量。根据数理统计理论，可将 $a_2, \cdots, a_N$ 视为固定量来推断参数 θ，称其为条件推断；也可以不附加“$a_2, \cdots, a_N$ 为已知量”这一条件，在考虑 $a_2, \cdots, a_N$ 的随机性时，对参数 θ 进行推断，称为非条件推断，此时将第 $i+1$ 组用刺激水平表达为 $a_{i+1}(y_1, \cdots, y_i)$，表示 a_{i+1} 是前 $i(i>1)$ 组试验的试验数据 $y_1, \cdots, y_i$ 的函数。

以下分别针对变换与非变换数据考虑参数的条件与非条件推断。

4　基于变换数据的参数的估计

4.1　条件估计

在固定 $a_1, \cdots, a_N$ 时，$y_1, \cdots, y_N$ 的条件似然函数为

$$L(\theta, y_1, \cdots, y_N \mid a_1, \cdots, a_N)=\prod_{i=1}^{N}\tilde{p}_i^{y_i}(1-\tilde{p}_i)^{1-y_i} \tag{3}$$

其中：$\tilde{p}_i=G(a_i, \theta)=F^m(a_i, \theta)$。此时 $y_i(1\leq i\leq N)$ 服从参数为 $\tilde{p}_i$ 的两点分布。

(3) 式含有未知参数 θ 的信息，将(3)式取对数并求导可求得参数 θ 的条件极大似然估计 $\hat{\theta}(y_1, \cdots, y_N \mid a_1, \cdots, a_N)$，简记为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})$，其中，$\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_N)$，$\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_N)$。

当感度分布 $F(a_i, \theta)$ 的参数 θ 的估计为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})$ 时，R 响应点的估计满足

$$F[\hat{x_R}, \hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]=R \tag{4}$$

式中：$\hat{x_R}$ 为由数据 $y_1, \cdots, y_N$ 所得感度分布 $F(a_i, \hat{\theta})$ 的 R 响应点估计。

当 n 较大时，$\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})$ 的分布近似于正态分布[5] $N\{\theta, \sum[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]\}$，而且

$$\sum[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]=\{\sigma_{ij}[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]\}=\left\{E\left[-\frac{\partial \ln L(\theta, y_1, \cdots, y_n\mid a_1, \cdots, a_n)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right]\right\}^{-1}\Bigg|_{\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})}$$

式中：矩阵 $\sum[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]$ 为估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})$ 的 $r\times r$ 近似协差阵，$\sigma_{ij}[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})$ 为矩阵 $\sum[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]$ 的第 i 行第 j 列元素。当 n 较大时，$\hat{x_R}$ 的分布也近似于正态分布 $N[x_R, V(\hat{x_R})]$ [5]，其中

$$V(\hat{x_R})=\sum_i\sum_j\frac{\partial x_R}{\partial\theta_i}\frac{\partial x_R}{\partial\theta_j}\Bigg|_{\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})}\times\sigma_{ij}[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{a})]$$

式中：$V(\hat{x_R})$ 为估计 $\hat{x_R}$ 的近似方差。

由以上近似分布不难求得

$$\hat{x}_{R_{\alpha L}}=\hat{x_R}-u_\alpha\sqrt{V(\hat{x_R})} \tag{5}$$

式中：$\hat{x}_{R_{\alpha L}}$ 为由数据 $y_1, \cdots, y_N$ 求得的 x_R 的近似置信下限；α 为置信水平；u_α 为标准正态分布的下侧 α 分位数。

4.2　非条件估计

由引理 1 可知,OSTR 试验的刺激水平 $a_2, \cdots, a_N$ 是随机变量。当考虑 $a_1, \cdots, a_N$ 的随机性时,$y_1, \cdots, y_N$ 的非条件似然函数为

$$L(\theta, y_1, \cdots, y_N) = p(y_1)p(y_2 \mid y_1)p(y_3 \mid y_1, y_2)\cdots p(y_N \mid y_1, \cdots, y_{N-1}) = \tilde{p}^{y_1}(1-\tilde{p}_1)^{1-y_1}\tilde{p}_2^{y_2}(y_1)[1-\tilde{p}_2(y_1)]^{1-y_2}\cdots\tilde{p}_N^{y_N}(y_1, \cdots, y_{N-1})[1-\tilde{p}_N(y_1, \cdots, y_{N-1})]^{1-y_N} \tag{6}$$

式中:$p(y_i \mid y_1, \cdots, y_{i-1})$表示已知前 $i-1(i>1)$组试验的试验数据为 $y_1, \cdots, y_{i-1}$的条件下,第 i 组试验的试验数据为y_i 的条件概率;$\tilde{p}_i(y_1, \cdots y_{i-1}) = G[a_i(y_1, \cdots, y_{i-1}), \theta] = F^m[a_i(y_1, \cdots, y_{i-1}), \theta]$。

将(6)式取对数并求导可求得参数 θ 的非条件极大似然估计 $\hat{\theta}(y_1, \cdots, y_N)$,简记为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$。在已知 OSTR 的观测数据 $y_1, \cdots, y_N$ 时,参数的条件估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{a})$和非条件估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$的取值是相等的。但是条件估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{a})$与非条件估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$是不同的两个估计量。在非条件估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$中,$y_i(1 \leq i \leq N)$不服从两点分布;而在条件估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{a})$中,$y_i(1 \leq i \leq N)$服从参数为 $\tilde{p}_i$ 的两点分布。这一差别体现在 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{a})$和 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$的均方误差(MSE)上。

5 基于非变换数据的参数的估计

在 OSTR 试验中,非变换响应数据 $s_1, \cdots, s_N$ 与变换响应数据$y_1, \cdots, y_N$ 有如下关系

$$y_i = \begin{cases} 0, s_i < m \\ 1, s_i = m \end{cases} \tag{7}$$

应用 OSTR 试验的非变换数据,同样可以对参数进行条件推断和非条件推断。由于有关系(7)式,在非条件推断中,也将第 i 组用刺激水平$a_i(y_1, \cdots, y_{i-1})$等价地表达为 $a_i(s_1, \cdots, s_{i-1})$,表示 a_i 是已观测到的前$i-1(i>1)$组试验的试验数据 $s_1, \cdots, s_{i-1}$的函数。

5.1 条件估计

给定 $a_1, \cdots, a_N$ 时,各刺激水平下的响应发数 $s_1, \cdots, s_N$ 相互独立,且 $s_i(1 \leq i \leq N)$的分布律如下

表 1 $\boldsymbol{a_i}$ 处响应发数$\boldsymbol{s_i}$ 的条件分布律

Table 1 The conditional distribution of response s_i for a_i

s_i	0	1	2	…	l	…	m
p	q_i	q_ip_i	$q_ip_i^2$	…	$q_ip_i^l$	…	$q_ip_i^m$

其中:$p_i = F(a_i, \theta)$, $q_i = 1 - p_i$。

此时,$s_1, \cdots, s_N$ 的条件似然函数为

$$L(\theta, s_1, \cdots, s_N \mid a_1, \cdots, a_N) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i} q_i^{N_i - s_i} = \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i} q_i^{\operatorname{sgn}(m-s_i)} \tag{8}$$

(8)式含有未知参数 θ 的信息,可以由它求得 θ 的条件极大似然估计 $\hat{\theta}(s_1, \cdots, s_N \mid a_1, \cdots, a_N)$,简记其为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})$。其中:$\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_N)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_N)$。

同理,当感度分布 $F(a_i, \theta)$的参数 θ 的估计为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})$时,$R$ 响应点估计满足

$$F[\tilde{x}_R, \hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})] = R \tag{9}$$

式中:$\tilde{x}_R$ 为由数据$s_1, \cdots, s_N$ 所求得的R 响应点的估计。

当 n 较大时,估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})$的分布近似于正态分布 $N\{\theta, \tilde{\sum}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})]\}$,而且

$$\tilde{\sum}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})] = \{\tilde{\sigma}_{ij}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})]\} = \left\{E\left[-\frac{\partial \ln L(\theta, s_1, \cdots, s_n \mid a_1, \cdots, a_n)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right]\right\}^{-1}\Bigg|_{\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})}$$

式中:矩阵 $\tilde{\sum}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})]$ 为估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})$的 $r \times r$ 近似协差阵,$\sigma_{ij}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})]$ 为矩阵 $\tilde{\sum}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{a})]$ 的第 i 行

第j列元素。

当 n 较大时，$\tilde{x}_R$ 的分布也近似于正态分布$N[(x_R, V(\tilde{x}_R)]$

$$V(\tilde{x}_R) = \sum_i \sum_j \frac{\partial x_R}{\partial \theta_i} \frac{\partial x_R}{\partial \theta_j}\bigg|_{\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})} \times \tilde{\sigma}_{ij}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})]$$

式中：$V(\tilde{x}_R)$为估计 $\tilde{x}_R$ 的近似方差。

由 $\tilde{x}_R$ 的近似分布可求得

$$\tilde{x}_{R_{\alpha L}} = \tilde{x}_R - u_\alpha \sqrt{V(\tilde{x}_R)} \tag{10}$$

式中：$\tilde{x}_{R_{\alpha L}}$为由数据 $s_1, \cdots, s_N$ 求得的x_R 的近似置信下限。

5.2　非条件估计

OSTR 试验下，$s_1, \cdots, s_N$ 的非条件似然函数为

$$L(\theta, s_1, \cdots, s_N) = p(s_1)p(s_2|s_1)\cdots p(s_N|s_1, \cdots, s_{N-1}) = \prod_{i=1}^{N}[p_i(s_1, \cdots, s_{i-1})]^{s_i}[q_i(s_1, \cdots, s_{i-1})]^{\operatorname{sgn}(m-s_i)} \tag{11}$$

式中：$p(s_i|s_1, \cdots, s_{i-1})$表示已知前 $i-1$ 组试验的试验数据为 $s_1, \cdots, s_{i-1}$时，第 i 组试验的试验数据为 s_i 的条件概率($i>1$)；$p_i(s_1, \cdots, s_{i-1}) = F[a_i(s_1, \cdots, s_{i-1}), \theta]$。

由(11)式，可以求出参数 θ 的非条件极大似然估计 $\hat{\theta}(s_1, \cdots, s_N)$，简记为 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s})$。当已知 OSTR 的观测数据 $s_1, \cdots, s_N$ 时，参数的条件估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})$和非条件估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s})$的取值是相等的。但是，条件估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})$与非条件估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s})$是不同的两个估计量。同样，这一差别体现在估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})$和 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s})$的均方误差(MSE)上。

6　条件与非条件估计的模拟比较

6.1　参数估计及其近似标准差

应用蒙特卡洛方法，模拟正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$下的 OSTR 试验，分别得到试验的变换与非变换数据。

表 2　非变换数据下正态分布参数估计的近似标准差

Table 2　The approximate standard deviations of the estimators of parameters for a normal distribution based on non-transformed data

试验序号	均值 μ 的条件估计	方差 σ 的条件估计	μ 的条件估计的近似标准差	σ 的条件估计的近似标准差	0.99 响应点条件估计	0.99 响应点条件估计下限（置信水平 $\alpha=0.95$）
	$\hat{\mu}(\boldsymbol{s}\|\boldsymbol{a})$	$\hat{\sigma}(\boldsymbol{s}\|\boldsymbol{a})$	$\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{\mu}(\boldsymbol{s}\|\boldsymbol{a})]}$	$\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{\sigma}(\boldsymbol{s}\|\boldsymbol{a})]}$	$\tilde{x}_{0.99}(\boldsymbol{s}\|\boldsymbol{a})$	$\tilde{x}_{0.99_{\alpha L}}(\boldsymbol{s}\|\boldsymbol{a})$
1	9.788	1.120	0.200	0.223	12.39	11.74
2	10.191	0.648	0.104	0.113	11.70	11.37
3	10.261	0.635	0.096	0.110	11.34	11.42
4	10.107	0.657	0.113	0.116	11.63	11.29
5	10.198	0.753	0.114	0.136	11.95	11.56
15	9.866	1.132	0.191	0.226	12.50	11.85
16	10.160	0.792	0.122	0.144	12.00	11.59
19	9.009	1.229	0.337	0.260	11.87	11.00
22	10.076	0.887	0.140	0.166	12.14	11.66
24	9.879	0.694	0.142	0.125	11.49	11.10
28	10.330	0.696	0.096	0.123	11.95	11.60
35	10.064	0.927	0.145	0.175	12.22	11.72
$\hat{\mu}(\boldsymbol{s})$的平均估计(5000 组)		$\hat{\sigma}(\boldsymbol{s})$的平均估计(5000 组)	$\hat{\mu}(\boldsymbol{s})$的$\sqrt{\mathrm{MSE}}$(5000 组)	$\hat{\sigma}(\boldsymbol{s})$的$\sqrt{\mathrm{MSE}}$(5000 组)	$\hat{x}_{0.99}(\boldsymbol{s})$的平均估计(5000 组)	平均意义下$x_{0.99}$的置信下限
9.97602		0.831538	0.340358	0.304517	11.91	10.96

模拟中取均值 μ 的真值为 10，标准差 σ 为 1，刺激水平下限 x_L 和上限 x_U 分别为 6cm 和 14cm。每次 OSTR试验中，试验总量为 100，共模拟 5000 次 OSTR 试验。在模拟数据下，由(3)式或(8)式求得 μ 和 σ 的条件估计，并由矩阵 $\Sigma[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{a})]$ 或 $\widetilde{\Sigma}[\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})]$ 计算估计的近似标准差。由(4)或(9)式计算 0.99 响应点估计 $\hat{x}_{0.99}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{a})$ 或 $\hat{x}_{0.99}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})$，由(5)或(10)式计算 0.99 响应点的下限估计。因为在相同的试验数据下，μ 和 σ 的条件估计与非条件估计值是一样的。所以，以下主要比较两种估计的近似标准差。其中，表 2 和表 3 选择了 5000 组试验中的 12 组试验结果。当感度分布为正态分布 $N(10, 1^2)$ 时，0.99 响应点的真值 $x_{0.99}=12.325$cm。

表 2 中，平均意义下 $x_{0.99}$的置信下限是将 $\hat{\mu}(\boldsymbol{s})$的平均估计，$\hat{\sigma}(\boldsymbol{s})$平均估计，$\hat{\mu}(\boldsymbol{s})$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$，$\hat{\sigma}(\boldsymbol{s})$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$分别代入(10)式所得结果。这里以 $\hat{\mu}(\boldsymbol{s})$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$代替 $\hat{\mu}(\boldsymbol{s})$的近似标准差，$\hat{\sigma}(\boldsymbol{s})$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$代替 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{s})$的近似标准差。

表 **3** 变换数据下正态分布参数估计的近似标准差

Table 3 The approximate standard deviations of the estimators of parameters for a normal distribution based on transformed data

试验序号	均值 μ 的条件估计	方差 σ 的条件估计	μ 的条件估计的近似标准差	σ 的条件估计的近似标准差	0.99 响应点条件估计	0.99 响应点条件估计下限(置信水平 $\alpha=0.95$
	$\hat{\mu}(\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{a})$	$\hat{\sigma}(\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{a})$	$\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{\mu}(\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{a}))}$	$\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{\sigma}(\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{a})]}$	$\tilde{x}_{0.99}(\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{a})$/cm	$\tilde{x}_{0.99_{\alpha L}}(\boldsymbol{y}\|\boldsymbol{a})$/cm
1	9.940	1.002	0.212	0.214	12.26	11.62
2	10.199	0.620	0.124	0.114	11.64	11.29
3	10.335	0.629	0.116	0.114	11.80	11.46
4	10.196	0.622	0.125	0.114	11.64	11.29
5	10.285	0.699	0.129	0.130	11.91	11.52
15	9.236	1.153	0.368	0.282	11.92	10.99
16	10.262	0.753	0.139	0.143	12.01	11.59
19	9.285	1.110	0.351	0.268	11.87	10.99
22	10.145	0.811	0.158	0.158	12.03	11.56
24	9.987	0.622	0.147	0.122	11.43	11.04
28	10.361	0.686	0.122	0.127	11.96	11.58
35	10.116	0.925	0.178	0.190	12.27	11.71
$\hat{\mu}(y)$的平均估计(5000 组)		$\hat{\sigma}(y)$的平均估计(5000 组)	$\hat{\mu}(y)$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$ (5000 组)	$\hat{\sigma}(y)$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$ (5000 组)	$\hat{x}_{0.99}(y)$的平均估计(5000 组)	平均意义下 $x_{0.99}$的置信下限
10.0721		0.766292	0.308954	0.311045	11.85	10.92

同理，表 3 中平均意义下 $x_{0.99}$的置信下限是将 $\hat{\mu}(\boldsymbol{y})$的平均估计，$\hat{\sigma}(\boldsymbol{y})$的平均估计，$\hat{\mu}(\boldsymbol{y})$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$，$\hat{\sigma}(\boldsymbol{y})$的 $\sqrt{\mathrm{MSE}}$分别代入(5)式所得结果。

6.2 模拟结论

由以上模拟结果可得以下结论：

(1) 由表 2 和表 3 可知，使用 OSTR 试验的非变换数据或变换数据估计 μ 和 σ 时，均值 μ 的估计都是无偏的，标准差 σ 的估计比真值偏低，并且变换数据下的标准差估计较之非变换数据下的标准差估计要更偏低一些。因而，对 R 响应点估计 $\hat{x_R}=\hat{\mu}+\hat{\sigma}u_R$ 而言，变换数据下的估计和非变换数据下的估计均比真值 x_R 小，并且变换数据所得估计的这种偏小程度要大一些。

(2) 由公式 $\hat{x_R}=\hat{\mu}+\hat{\sigma}u_R$ 不难得到，在两种数据下，$\hat{x_R}$ 与 x_R(或 $\hat{x_R}$ 与 x_R)的绝对误差的量级一般为 10^{-1}(R 取值于 0.005~0.995)。由于机械撞击作用，火工品刺激水平的单位一般是 cm，因此这种误差在应用中是可以忽略的。

(3) 由表 2 和表 3 可知，在 OSTR 法试验不同的刺激水平 a_1，…，a_N 下，参数 μ 和 σ 的条件估计的近

似标准差波动性较大，它们与相应的 $\sqrt{\text{MSE}}$的最小差别为 10^{-2}，最大差别为 10^{-1}，这表明了在不同刺激水平下参数的估计精度不同。另外参数条件估计的近似标准差大多比相应的 $\sqrt{\text{MSE}}$要小，表明了条件推断技术高估了参数的估计精度。

（4）由（5）式和（10）式不难得到，在不同刺激水平下，$\hat{x}_{R_{\alpha L}}$之间（或 $\tilde{x}_{R_{\alpha L}}$之间）绝对误差的量级一般为 10^{-1}（R 取值于 0.005 ~0.995）。而且 $\hat{x}_{R_{\alpha L}}$与平均意义下 R 响应点的下限估计（或 $\tilde{x}_{R_{\alpha L}}$与平均意义下 R 响应点的下限估计）的绝对误差的量级一般也为 10^{-1}（R 取值于 0.005 ~0.995）。对于机械撞击作用火炸药品而言，这些量级的差别是可以忽略的。

（5）由表 2 和表 3 可知，使用变换前或变换后数据估计感度分布的参数及 R 响应点 x_R 时，所得估计的绝对误差的量级一般为 10^{-1}。对于机械撞击作用火炸药品而言，这些量级的差别是可以忽略的。

7　结　论

针对 OSTR 试验的变换数据与非变换数据，分别给出了推断感度分布参数的两种方法：条件推断和非条件推断方法。通过研究可得到如下结论：

（1）在相同的试验数据 $y_1, \cdots, y_N$（或 $s_1, \cdots, s_N$）下，感度分布参数及 R 响应点 x_R 的非条件估计值与条件估计值是相同的。

（2）感度分布参数的条件估计的近似标准差不能正确反映 OSTR 试验数据求得的参数估计的波动性，条件估计的近似标准差一般比非条件估计的近似标准差要小。一般而言，条件推断方法高估了感度分布参数及 R 响应点 x_R 的估计精度。

（3）对于机械撞击作用火工品，当需估计正态感度分布的 R 响应点 x_R 时（R 介于 0.005 ~0.995 之间），条件推断与非条件推断所得结果的差别可以忽略。此时可以应用条件推断方法估计感度分布的参数及 R 响应点 x_R。在这种情况下，视刺激水平 $a_1, \cdots, a_N$ 为非随机量，各刺激水平 $a_1, \cdots, a_N$ 下感度数据相互独立，参数估计的近似标准差由$\Sigma[\hat{\theta}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{a})]$ 或$\Sigma[\hat{\theta}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{a})]$ 计算。

（4）对于机械撞击作用火工品，在感度分布为正态分布时，可以使用变换前或变换后数据估计感度分布的参数及 R 响应点 x_R。

8　讨　论

在非条件推断方法中，OSTR 试验数据 $y_1, \cdots, y_N$ 和 $s_1, \cdots, s_N$ 均为非独立非同分布样本，非条件估计 $\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$[或 $\hat{\theta}(\boldsymbol{s})$] 的渐近正态性并非显然，此时需验证非独立非同分布样本所求得极大似然估计的渐近正态性的若干条件[6]。$\hat{\theta}(\boldsymbol{y})$[或 $\hat{\theta}(s)$] 的渐近正态性至今还没有从理论上得以证明。在这种情况下，参数估计的波动性只有用相应的均方误差（MSE）近似度量。

与（11）式比较，$s_1, \cdots, s_N$ 的似然函数也可以写为

$$L(\theta, s_1, \cdots, s_N) \propto \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i} q_i^{n_i - s_i} \tag{12}$$

在（12）式中，n_i 为 s_i 的函数，即

$$n_i = \begin{cases} s_i, & s_i = m \\ s_i + 1, & s_i < m \end{cases}$$

在国内，一些研究者认为 OSTR 法试验中，刺激水平 a_i 下的 n_i 发产品响应 s_i 发的所有可能情况有 $C_{n_i}^{s_i}$个，s_i 服从参数为 n_i, p_i 的二项分布。这样的观点值得进一步讨论。实际上，刺激水平 a_i 下 n_i 发产品响应 s_i 发的所有可能情况不是 $C_{n_i}^{s_i}$个，例如 $m=3$ 时，根据 OSTR 试验规则，在 a_i 处“2 发响应，1 发不响应”只包含（110）一种情况，而 OSTR 法试验不会出现（011）、（101）两种结果。这也就是说，s_i 不服从参数是 n_i, p_i 的二项分布。

本文仅对感度分布为正态分布的机械撞击作用火工品进行了模拟，模拟研究还需进一步推广。由于 50％响应点估计较稳健，作者认为，如果能够较准确地认定感度分布类型，可以使用变换前或变换后数据估计感度分布的参数及 R 响应点 x_R；在无法较好地认定感度分布类型时，使用变换以后数据所得估计要稳健一些。后者还需进一步模拟验证。

参考文献：

[1] MIL-STD-331B. Environmental and Performance Test for Fuze and Fuze Components [S].

[2] GJB/Z377A-94. 感度试验用数据统计方法 [S].

[3] BARRY A B, HENRY B T N. Extreme Quantile Estimation in Binary Response Models [R]. AD-A220150, 1990.

[4] 刘宝光. 敏感度数据分析与可靠性评定 [M]. 北京：国防工业出版社，1995. 113－123.

[5] LEHMANN E L. Theory of Point Estimation [M]. Beijing: World Publishing Crop, 1990. 75-153.

[6] MARTIN J C. Maximum Likelihood Estimation for Dependent Observation [J]. J R Statist Soc B, 1976, 38: 45－53.

Inference on Parameters of Sensitivity Distribution Based on OSTR Procedure

TIAN Yu-bin[1,2], CAI Rui-jiao[3], LI Guo-ying[2], YAN Nan[3]

(1. *Department of Applied Mathematics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*;
2. *Institute of Mathematics and System Science*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*;
3. *Department of Mechanical Engineering*, *Beijing Institute of Technology*, *Beining* 100081, *China*)

Abstract: The statistics methods for dealing with OSTR experiment data are studied. Two methods are proposed: the conditional and non-conditional inference techniques. Following the research and simulation, the conclusinon is that the conditional inference is adequate for estimating some quantiles of sensitivity distribution for mechanical initiated pyrotechnics.

Key words: OSTR procedure; sensitivity test; maximum likelihood estimators; conditional inference; non-conditional inference