

二维弹塑性有限元程序全自动重分^{*}

李恩征, 张风国

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘要: 对二维弹塑性流体力学有限元计算中的非结构三角网格, 提出了一种简单、实用的全自动网格重分方法。并在 LITZ-2D 程序上编制了全自动重分模块, 重分使拉格朗日流体程序能计算包含大变形的一些问题。给出两个算例, 圆柱体撞击(Taylor 实验)和射流形成, 通过网格重分数值计算结果与实验和文献结果比较, 定性、定量均有较好的符合。

关键词: 拉氏有限元; 非结构三角网格; 守恒重映; 全自动重分

中图分类号: O241.82; O344.3 文献标识码: A

1 引言

网格重分, 国内外许多二维拉氏程序都被用来解决网格畸变问题。一般需两步完成, 生成新网格和守恒重映。在二维拉氏有限元弹塑性高速撞击程序(LITZ-2D)上实现全自动网格重分, 就是在上述两步之间增加对网格重分判据的研究(即判定何时、何地重分), 增加对重分区域边界自动重分的研究, 使网格重分的三个步骤中的每一步都由程序自动完成, 同时对物理量的重映、束缚条件、滑移线的改变也都由程序自动完成。所有这些不需要任何人为干预, 也不需要重新启动, 实现全自动的目标, 使拉氏程序精确地处理包含大变形的一些问题。

LITZ-2D 程序可采用非结构的三角网格, 由于它的拓扑关系的复杂性, 给计算中实现全自动网格重分带来方法和程序上的困难。因而国内外发表的文献并不多见, 据我们所知, 仅 W. J. Flis^[1] 有一篇文章发表。

我们给出了非结构三角网格全自动重分方法, 并确立了计算方案。

2 二维拉氏有限元程序非结构三角网格全自动重分

2.1 非结构三角网格重分区域的确定方法

我们希望能够给出一个判据, 对每个单元进行检测, 看是否需要重分, 以便确定重分时间和重分区域。重分区域肯定是在重分单元的周围, 但究竟怎样确定这个范围是需要研究的, 原则上应该使重分范围尽可能缩小, 以便更大限度减少由于网格重分所花的机时, 提高计算效率。简单说来, 就是研究判据, 判定何时、何地网格重分。为此, 首先定义有限元形状比 $\alpha = h/c$, c 为三角有限元最长的边长, h 为对应边的高, 如图 1。

在指定物质区内, 重分区域由以下三类单元的集合组成(如图 2):

(1) 坏元, 是指形状比不符合要求的单元, 即满足形状比 $\alpha \leq \beta$ (β 为常数, 例如 $\beta = 0.25$) 的所有单元, 图中用 B 标示。

(2) 相邻元, 是指与坏元邻近、但形状比正常的元, 图中用 N 标示。所谓邻近元是指共坏元结点的元, 但不包括坏元。

(3) 相关元, 是指三个结点均是相邻元的结点的那些元, 图中用 3 表示。

* 收稿日期: 2000-12-19; 修回日期: 2001-03-20

作者简介: 李恩征(1939—), 男, 研究员。

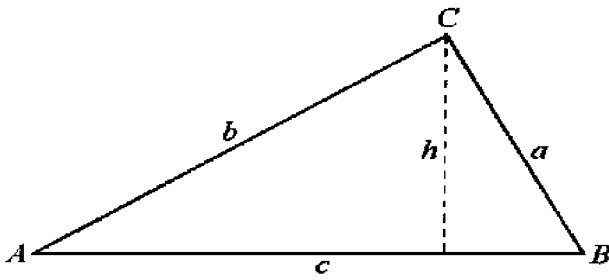


图 1 三角形单元

Fig.1 Triangular element

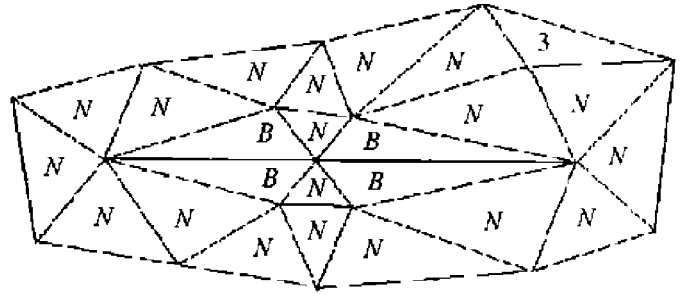


图 2 重分区域

Fig.2 Rezone region

2.2 关于重分区域边界点的自动重分

重分区域边界是由首尾相连的有向折线段集合构成,在保持边界形状基本不变的前提下,对边界重分(包括合并与加密)并使其边界点尽可能少且均匀分布,这是下一步用简易前沿推进法生成内部网格并使其保持均匀分布的基础。为此,在这个集合中,找出长度最小的为标准尺度,去度量该集合中其它折线段。也就是视这个集合中的每个折线段是标准尺度的多少倍;取整数倍,如果此倍数不超过 1,则该线段不再分割,保持原来的;如倍数超过 1,则以此倍数分割该线段,并求出每个分割点的坐标。这样,该线段就被分割成若干段首尾相连的有向小线段。将所有边界线段分割后的有向线段以及不需要分割的边界线段集合起来,便形成一个有向线段集合,它们按逆时针顺序并首尾相连。

2.3 非结构三角网格生成技术及网格光滑技术

在二维时,非结构三角网格的生成方法中比较常用的有:规则划分法、Delaunay 法^[2]、前沿推进法^[3-4]。规则划分法最简单,针对比较规则的区域;Delaunay 法针对已给定的一组平面点集,用这些已知的点作为顶点,在平面上构造三角网格;前沿推进法针对已给定区域的边界,在区域内生成网格。我们综合规则划分法、Delaunay 法、前沿推进法的优点,提出更简单、实用的生成方法,称作简易前沿推进法。此方法基本以前沿推进法为基础,不受区域复杂性的限制,同时避免了 Delaunay 法中的边界穿透问题。

所谓三角形网格的光滑技术是指,对于已经生成好的三角形网格,如果对其中的部分单元形状或者结点分布不满意,可以对网格的结点坐标略做调整。我们采用的是一种简单的三角形网格的光滑技术,这种方法是一个迭代过程,逐步使网格尺度在边界的限制下,尽量能够连续均匀地分布。

考虑三角形网格中任意一个内部结点 P ,假定它周围有 N 个点,首先计算出这 N 个点的平均位置 Q ,然后把 P 点移动到线段 PQ 的中点。此过程对所有的内部结点实施,经若干步后,网格尺寸逐渐均匀。每经历一步这个过程,相当于迭代一次。

2.4 设计任意两个三角形相交区域的算法

任意两个三角形的相交的计算,是守恒重映问题解决的基础技术。它的关键是,如何针对任意可能的情况,计算出两个三角形的相交多边形。



图 3 三角形顶点排序

Fig.3 Compositor of triangular vertex

在二维平面上有两个三角形 A 和 B , $A = a_1 a_2 a_3$, $B = b_1 b_2 b_3$, 其中 $a_i, b_i (i = 1, 2, 3)$ 分别是三角形 A 和 B 的顶点, 并按逆时针排序(如图 3)。

两个三角形 A 和 B 的交集 $C = A \cap B = c_1 c_2 \dots c_m$, $0 \leq m \leq 6$ 。显然, 两个三角形的交集是凸多边形, 边数最大为 6。

当 $m = 0$ 时, A 和 B 不相交。

当 $m = 1$ 时, A 和 B 有一个公共点。

当 $m = 2$ 时, A 和 B 有一条公共线段。

而当 $m \geq 3$ 时, A 和 B 有公共重叠面积, 其算法是: (1) 找出所有处于三角形 B 内的 A 的顶点, 得到集合 $D_1 = \{a'_1, \dots, a'_l\}$, $0 \leq l_1 \leq 3$; (2) 找出所有处于三角形 A 内的 B 的顶点, 得到集合 $D_2 = \{b'_1, \dots, b'_l\}$, $0 \leq l_2 \leq 3$; (3) 找出三角形 A 的每条边和三角形 B 的每条边的交点, 得到集合 $D_3 = \{c'_1, \dots, c'_l\}$, $0 \leq l_3 \leq 6$; (4) 令 $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, 把 D 中重复的点(包括坐标比较接近的点)去掉, 合而为一, 可得以集合 $D = \{d_1, \dots, d_l\}$, $l \leq l_1 + l_2 + l_3$; (5) 把 D 中的点重新按逆时针排序, 使 D 构成一个凸多边形, 此即为所求的相交多边形 C 。

2.5 守恒重映

重映应具备某些基本特性, 如单调性、守恒性。也就是说, 重映过程不应引入新的极值。在实际的守恒重映计算中, 还经常会遇到各守恒量的协调问题, 即几个守恒量互相制约。根据我们以往的经验, 总是选择质量守恒、动量守恒、内能守恒。守恒重映方法可以采用一阶精度、二阶精度甚至高阶精度的算法。我们采用的是一阶精度的积分重映方法。一阶方法的最大优点是单调性, 缺点是连续重映时数值耗散可能较大。从实用的角度, 根据 LTZ-2D 程序的特点, 从总体上只能保持一阶精度, 因而在实施重映时, 没有必要在这个局部提高精度。而对于它的缺点, 可以通过较少的重映次数来降低数值耗散。根据这个思路, 可以看出关键在于动量守恒的算法。我们引进动量密度的概念, 较好地解决了这个问题。

关于动量守恒, 假设三角形 j , 其顶点是 $c_i (i = 1, 2, 3)$, 如图 4。显然结点 c_i 对三角元 j 的动量贡献为 $m_{ij} \mathbf{u}_i$, 其中 \mathbf{u}_i 为三角元 j 的三个结点的速度, m_{ij} 为三角元 j 的三个结点分别对三角元 j 的质量贡献(它与 LTZ-2D 程序中指明的三角元 j 对三个结点的质量分配原理相反)。

三角元 j 的动量为 $\sum_{i=1}^3 m_{ij} \mathbf{u}_i$, 可定义三角元 j 的动量密度为 $\sum_{i=1}^3 m_{ij} \mathbf{u}_i / \nabla_j$, 其中 ∇_j 是三角元 j 的体积。

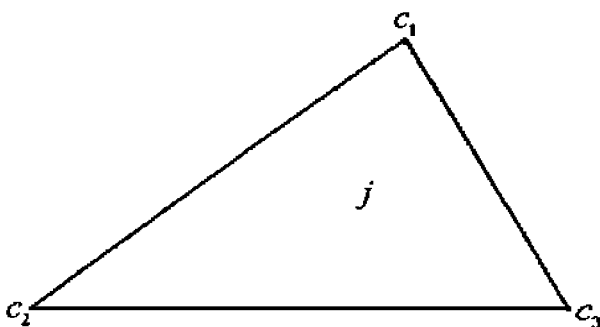


图 4 三角形单元

Fig.4 Triangular element

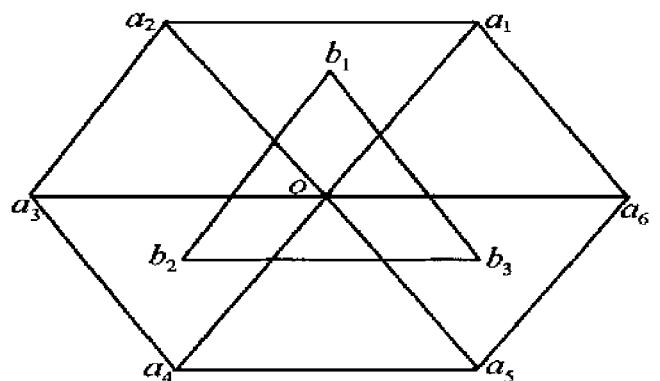


图 5 新、旧三角形相交图

Fig.5 Interaction graph of new and old triangular element

如图 5, 依动量密度定义, 假定 n 时刻旧三角元 $\Delta a_1 a_2 o$, $\Delta a_2 a_3 o$, \dots , $\Delta a_5 a_6 o$ 的动量密度分别为 $\hat{\rho}_1^n, \hat{\rho}_2^n, \dots, \hat{\rho}_6^n$, 那么新生成的三角元 $\Delta b_1 b_2 b_3$ 的动量为 $\sum_{i=1}^6 \hat{\rho}_i^n \nabla_i^n$ 。

有了新三角元的动量, 如质量分配原理, 将新元的动量分配给它的三个结点。如果对所有新生成的元都这样做, 就得到所有新元对其相应结点上的动量贡献。那么对结点来说, 它的动量是由该结点周围

的那些元对该结点动量贡献的和。有了结点的动量再除以该结点所携带的质量,就得到该结点的速度。

3 算 例

3.1 圆柱体撞击(Taylor 实验)

铁圆柱体撞击刚性表面是很典型的算例,文献[1]有实验和数值计算结果。我们采用的模型^[5]长度为 2.54cm,半径为 0.381cm,初速度为 203.2m/s,见图 6。终态 $t=50\mu\text{s}$ 时,弹体开始向上回跳。其时网格没有重分、全自动重分及仅有光滑化的计算结果,见图 7~图 9,计算结果与文献[5]的对比见表 1,这时平均速度都是向上的。

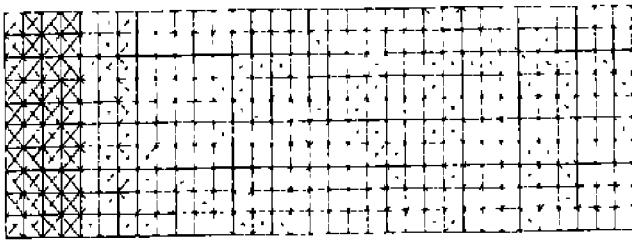


图 6 圆柱体撞击问题初始网格
Fig.6 Initial mesh in cylinder impact problem

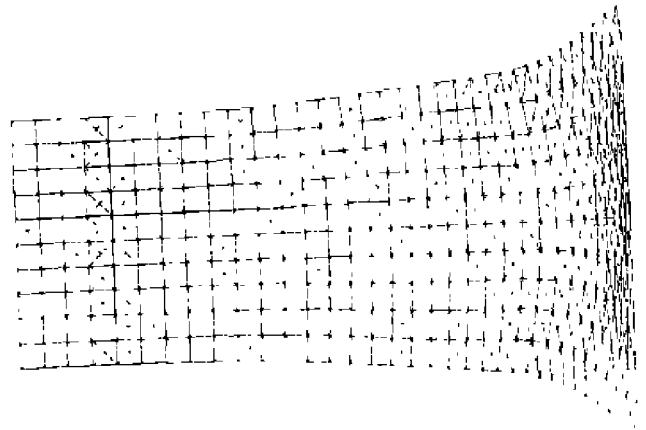


图 7 没有网格重分的圆柱体撞击计算结果
Fig.7 Results of cylinder impact computation without rezoning

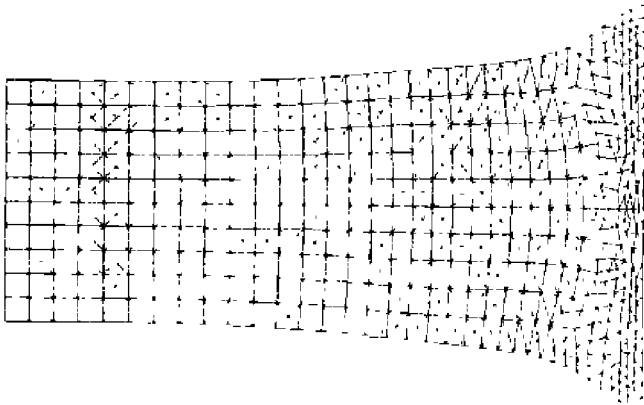


图 8 全自动网格重分的圆柱体撞击计算结果
Fig.8 Results of cylinder impact computation with fully automatic rezoning

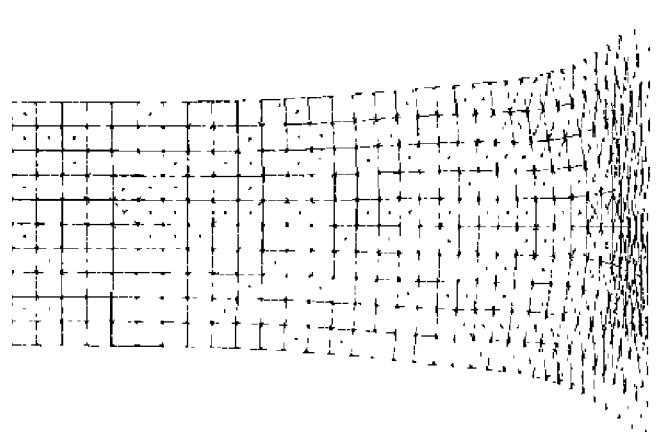


图 9 仅有网格光滑化的圆柱体撞击计算结果
Fig.9 Results of cylinder impact computation with mesh-smoothing only

表 1 圆柱体撞击计算结果

Table 1 Results of the computations of cylinder impact

网格处 理方式	变形长度/cm		最大半径/cm		总能/J		总内能/J		总动能/J		CPU 时间/s
	计算	文献	计算	文献	计算	文献	计算	文献	计算	文献	
没有重分	1.985	2.048	0.6530	0.6487	186.60	188.63	186.4	186.54	0.2575	0.2890	29.9
全自动重分	1.960	2.048	0.6432	0.6375	186.44	188.63	186.2	186.40	0.2545	0.3017	18.8
仅有光滑化	1.961	2.048	0.6428	0.6429	186.30	188.63	186.1	186.74	0.2544	0.2900	21.6

由表 1 可见, 三种网格处理方式的结果中, 变形长度、最大半径及总能、内能、动能都基本相等。

尽管没有网格重分也能算好这个模型, 但我们使用全自动网格重分计算达到了全面检验程序的作用, 证明了重分后正确的守恒性。特别是因为这个模型弹塑性效应比较强, 就更能检验在重映过程中一些与弹塑性有关的量。值得注意的是, 虽然全自动重分模块调用了五次, 但运算时间反而缩短了, 比没有重分快了约 60%, 比仅有光滑化快了约 38%。

3.2 射流形成

成型装药射流形成算例是对带半球形铜罩的战斗部数值模拟得到的, 也是很典型的算例。我们选取文献[5]中的模型, 见图 10, 具体的尺寸见文献。这个模型在 $51\mu\text{s}$ 时(见图 11)网格出现严重畸变, 由于稀疏波的影响, 网格沿着射流长度方向拉开, 而另一方向却紧缩, 以至于网格变形很大, 继续计算精度将大受影响, 不仅影响定性、定量结果, 甚至可能算不下去。文献中提到, 解决这一问题的办法是采用人工网格重分。

以往能精确地处理包括大变形的一些问题, 只能依靠这种使人厌烦的人工网格重分^[1]。机器要停下来, 而且使用者要通过人机对话或画图直接观察到重分区域的形状, 然而根据需要, 人为地再把区域分成若干部分。比如就这个具体模型来说分成六部分(见图 12), 对每一个部分再生成新网格, 即使能人机对话, 也必须给出各部分边界点坐标、分点数等。假若需要重复几次, 那就更麻烦了, 工作量很大, 甚至无法实现。

我们用全自动网格重分程序计算, 在 $51\mu\text{s}$ 重分(见图 13), 终态 $t=150\mu\text{s}$ 。计算结果见图 14。这个结果与文献[5]中同样时刻的计算结果比较, 不仅射流形成的形状符合得较好, 而且在定量上射流长度与宽度之比也是接近的。文献[5]中这个比值为 10, 我们计算的为 10.1。

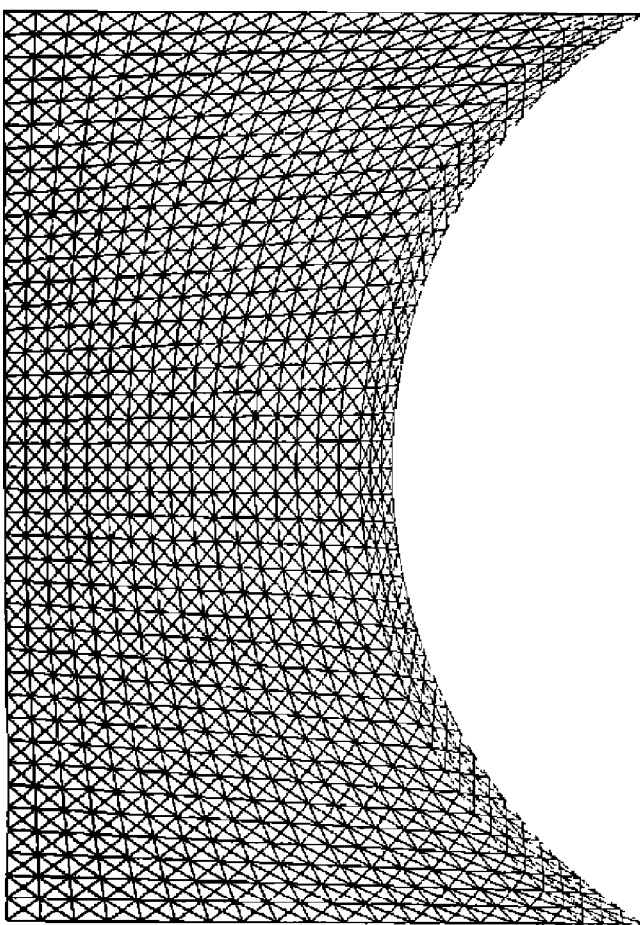


图 10 射流形成问题初始网格

Fig. 10 Initial mesh in jet formation problem

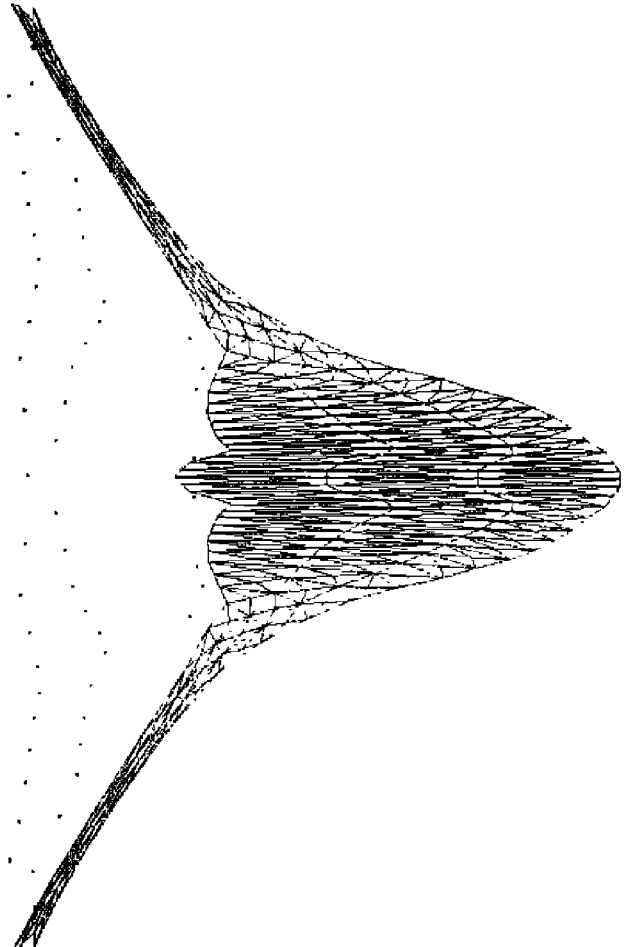


图 11 $51\mu\text{s}$ 时射流重分前网格

Fig. 11 Grid in the jet before rezoning at $51\mu\text{s}$

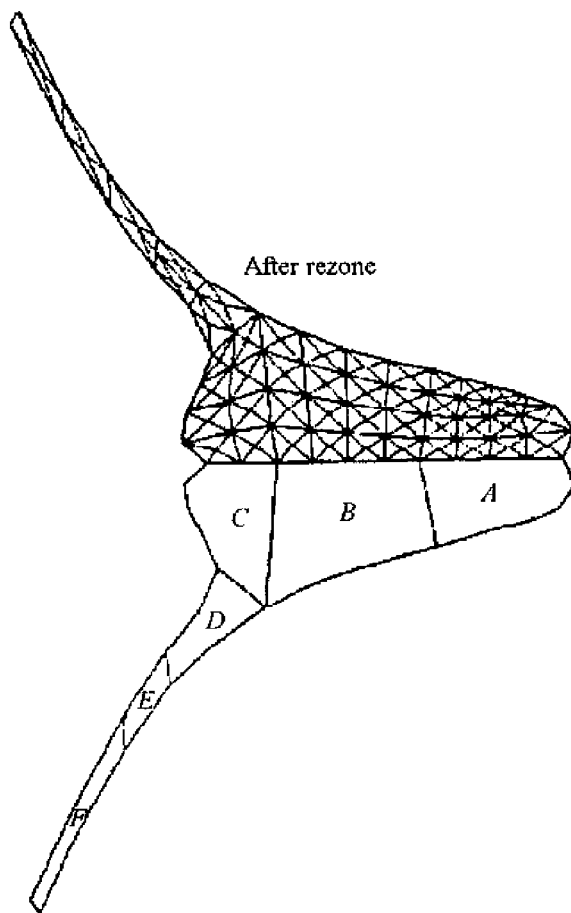


图 12 文献[5]中 $51\mu\text{s}$ 时射流重分前网格
Fig. 12 Grid in the jet before rezoning at $52\mu\text{s}$
in reference[5]

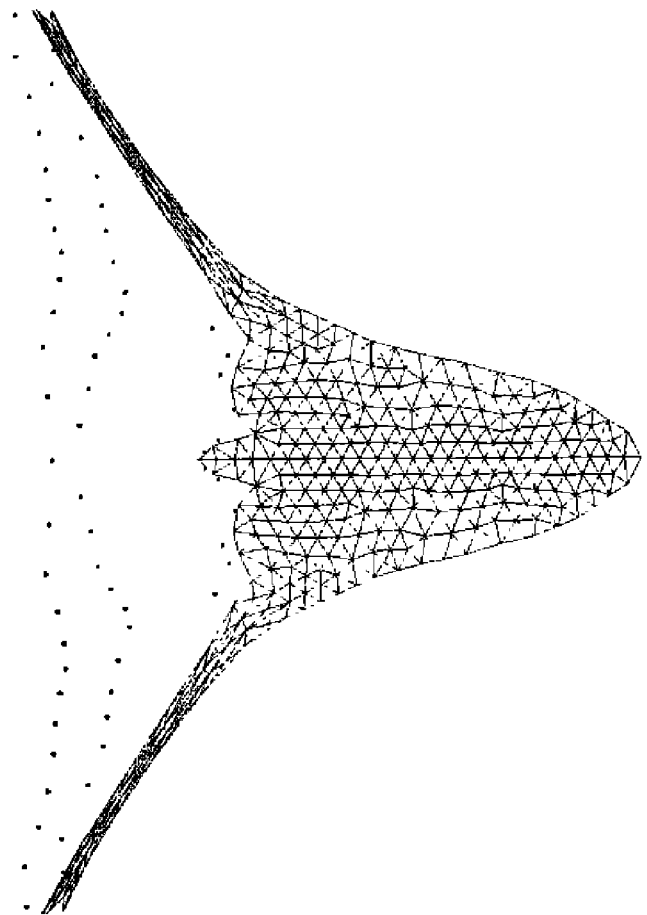


图 13 $51\mu\text{s}$ 时射流重分后网格
Fig. 13 Grid in the jet after rezoning at $51\mu\text{s}$

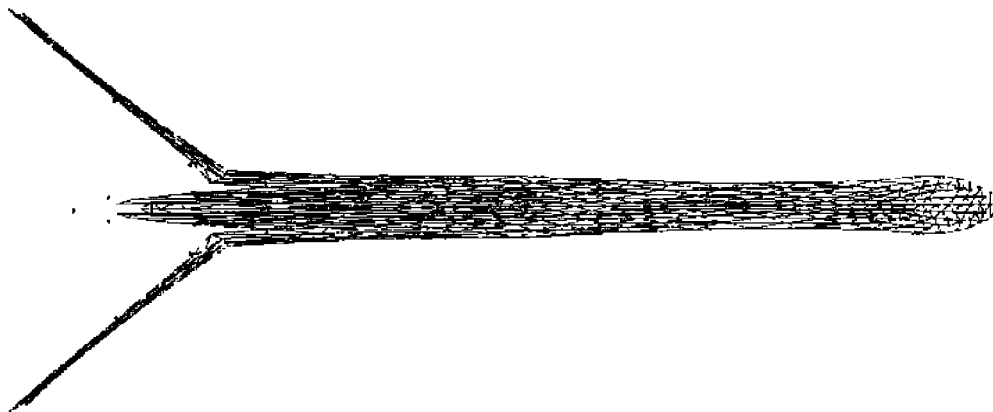


图 14 $150\mu\text{s}$ 时全自动重分射流形成计算结果
Fig. 14 Results of jet formation computation with fully automatic rezoning at $150\mu\text{s}$

4 结束语

我们对二维弹塑性流体力学拉氏有限元程序非结构三角网格全自动重分方法进行了研究。解决了几个关键技术,如:非结构三角网格重分区域的确定;非结构三角网格生成技术,提出简易前沿推进法;给出边界自动重分原则与方法;设计出任意两个三角形相交区域的算法;守恒重映中动量守恒算法的确立;重分程序设计中的总体构思和巧妙排序。

对圆柱撞击(Taylor 实验)和射流形成两个算例,通过全自动网格重分,其数值计算结果与实验和文献结果比较,定性、定量均有较好的符合,并且实现了全自动的目标。应该提出,通过全自动网格重分解决如此大变形的射流形成问题,是拉氏程序的一大突破。这样可以利用拉氏方法的长处研究射流形成的规律。网格重分适用于修复有限元、改善单元形状、增加计算的效率和精确度,然而由于全自动的要求,带来方法以及程序上一系列要研究的问题。这些问题的解决不仅会进一步提高了计算效率,而且程序使用会更方便。

总之,全自动网格重分的完成,使得 LTZ-2D 程序进一步扩大了使用范围,更精确、更方便地数值模拟多种常规兵器战斗部的工作原理。

参考文献:

- [1] Flis W J. Fully Automatic Rezoning for a Finite-element Hydrocode in 2D and 3D [A] . Niekirk C. Ballistics '98; 17th International Symposium on Ballistics [C] . Midrand, South Africa; International Ballistics Committee, 1998. 465—473.
- [2] Bowyer A. Computing Dirichlet Tessellations [J] . The Computer Journal, 1981, 24(2): 162—166.
- [3] Jin H, Wiberg N E. Two-dimensional Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refinement [J] . International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1990, 29: 1501—1526.
- [4] Jin H, Tanner R I. Generation of Unstructured Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique [J] . International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1993, 36: 1805—1823.
- [5] Johnson G R, Stryk R A. User Instructions for the EPIC-2Code [Z] . Edina; Honeywell Inc, 1986.

Fully Automatic Rezoning for Elastic-plastic Finite-element Program in 2D

LI En-zheng, ZHANG Feng-guo

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

Abstract: A simple and useful fully automatic grid-rezoning method, for unstructured triangular grids in the 2D finite-element computation of elastic-plastic-fluid mechanics, is presented. A new fully automatic rezoner algorithm is compiled based on the code LTZ-2D. Rezoning enables Lagrangian hydrocodes to compute problems involving larger deformations. Two examples for the computation of cylinder impact (Taylor test) and jet formation are provided. The results are in good agreement with both experiments and corresponding references qualitatively and quantitatively.

Key words: Lagrangian finite-element; unstructured triangular grid; conservative remapping; fully automatic rezoning