

文章编号: 1001-1455(2002)02-0119-07

# 复杂载荷作用下圆柱壳的弹塑性动力屈曲研究

刘 理, 刘土光, 张 涛, 李天匀

(华中理工大学船舶与海洋工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 对复杂载荷作用下圆柱壳的弹塑性动力屈曲问题进行了研究。基于 Hamilton 变分原理导出圆柱壳的运动方程, 本构关系采用增量理论, 借助增量数值算法求解动力方程组。结果表明, 均匀径向外压对圆柱壳的轴向冲击的过程或冲击性态有较大的影响, 并讨论了径向压力与轴向冲击载荷的幅值对结构临界动力屈曲载荷和临界动力失效载荷的影响。

关键词: 圆柱壳; 复杂载荷; 动力屈曲; 动力失效\*

中图分类号: O347.3 文献标识码: A

## 1 引 言

在工程实际中, 如在深水中受爆炸冲击载荷作用的潜艇、在深水中攻击目标的鱼雷、遭受飞行物撞击的原子能反应堆等结构, 在承受冲击载荷之前, 已经受到了其它类型载荷的作用, 因此它们与结构单独承受冲击载荷时的动力性态有较大的差异。R. C. Tennyson<sup>[1]</sup> 利用实验和计算的方法对飞行器、化学容器、核反应堆容器和导弹等圆柱壳模型在各种联合载荷作用下的弹性静力屈曲问题进行了研究。王仁、韩铭宝等<sup>[2]</sup> 对轴向冲击弹塑性圆柱壳的屈曲问题进行了研究, 提出了第二临界速度。之后, 韩铭宝等<sup>[3]</sup> 进一步考虑了在径向载荷和轴向冲击联合作用下的圆柱壳塑性稳定性问题, 认为复杂载荷下的圆柱壳同样存在着两种临界速度。但是上述的理论分析是基于小变形下进行的, 实际上, 薄壁圆柱壳在轴向冲击载荷作用下的屈曲问题属于大变形、大应变的范畴, 因此有必要对该类问题继续进行深入的研究。

江松青<sup>[4]</sup> 考察了环向加筋圆柱壳在复杂载荷作用下的弹塑性动力屈曲问题, 对均匀径向外压与轴向冲击载荷峰值之间的关系进行了定性的讨论, 并得到了一些有意义的结论。

在本文中, 我们对复杂载荷作用下圆柱壳的弹塑性动力屈曲问题进行了研究。运动方程由 Hamilton 变分原理导出, 弹塑性本构关系采用基于 Mises 屈服条件的增量理论, 借助增量数值方法求解运动方程组。讨论了圆柱壳在复杂载荷下的屈曲模态、临界动力屈曲载荷, 以及径向压力与冲击载荷幅值对结构临界动力屈曲载荷和动力失效载荷的影响。

## 2 理论分析

### 2.1 壳体运动方程

壳体在复杂载荷作用下的非轴对称变形运动方程为

$$\begin{cases} \rho h u_{x, u} = (N_{xx, x} + N_{xy, y})/R \\ \rho h u_{y, u} = (N_{xy, x} + N_{yy, y})/R \\ \rho h u_{z, u} = (M_{xx, xx} + 2M_{xy, xy})/R + M_{yy, yy}/R^2 - N_{yy}/R + \\ \quad [(N_{xx}u_{z, x} + N_{xy}u_{z, y})/R]_{, x} + [(N_{xy}u_{z, x} + N_{yy}u_{z, y})/R]_{, y}/R \end{cases} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2000-06-19; 修回日期: 2001-12-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(19972021)

作者简介: 刘 理(1970—), 男, 博士研究生。

式中:  $x, y, z$  分别表示轴向、周向、径向坐标;  $u_x(x, y, t), u_y(x, y, t), u_z(x, y, t)$  分别表示壳体中面沿  $x, y, z$  轴方向的位移;  $t$  为时间;  $\rho$  为圆柱壳的质量密度;  $h$  为壳壁厚;  $R$  为壳中面半径;  $p$  为径向均匀载荷;  $N, M$  为圆柱壳中面内力和内力矩。

$$\begin{cases} N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz & i, j = x, y \\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz & i, j = x, y \end{cases}$$

式中:  $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$  为应力分量, 它与应变分量  $\epsilon_{ij}(x, y, z, t)$  的关系可由增量流动理论加以描述。

壳体非线性变形的几何方程为

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = u_{x,x} + u_z^2/2 - zu_{z,xx} \\ \epsilon_{yy} = (u_{y,y} + u_z)/R + u_z^2/(2R^2) - zu_{z,yy}/R^2 \\ \epsilon_{xy} = [u_{x,y}/R + u_{y,x} + u_{z,x}u_{z,y}/R - 2zu_{z,xy}/R]/2 \end{cases}$$

式中:  $u_x, u_y, u_z$  分别为轴向、周向、径向位移

当轴向冲击载荷  $N(t)$  开始加载时, 其初始条件为

$$\begin{cases} u_i = 0 \\ u_{i,t} = 0 \end{cases} \quad i = x, y, z, \quad t = 0, \quad 0 \leq x < L$$

简支的边界条件为

$$\begin{cases} u_x = u_y = u_z = 0, \quad M_{xx} = 0 & t \geq 0, \quad x = 0 \\ u_y = u_z = 0, \quad M_{xx} = 0, \quad N_{xx} = -\bar{N}(t) & t \geq 0, \quad x = L \end{cases}$$

式中:  $\bar{N}(t)$  为轴向冲击加载函数。

## 2.2 增量数值解法

弹塑性变形中, 应变率  $\dot{\epsilon}_{kl}$  可由弹性应变率  $\dot{\epsilon}'_{kl}$  和塑性应变率  $\dot{\epsilon}''_{kl}$  表示, 其中弹性应变率  $\dot{\epsilon}'_{kl}$  表示为

$$\dot{\epsilon}'_{kl} = [(1 + \nu)\dot{\sigma}_{kl} - \nu\hat{q}_l\dot{\sigma}_{mm}]/E$$

式中: 下标  $k, l, m = x, y, z$ ;  $E, \nu$  和  $\hat{q}_l$  分别为杨氏模量、泊松比和 Kroneker 符号, 塑性应变率  $\dot{\epsilon}''_{kl}$  可以由 Drucker 公设 (塑性应变矢量总是垂直于加载面并指向其外法线矢量方向) 定义

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}''_{kl} = G(\partial f/\partial\sigma_{kl})(\partial f/\partial\sigma_{mn})\dot{\sigma}_{mn} & f = 0, \quad (\partial f/\partial\sigma_{mn})\dot{\sigma}_{mn} > 0 \\ \dot{\epsilon}''_{kl} = 0 & f < 0, \quad (\partial f/\partial\sigma_{mn})\dot{\sigma}_{mn} \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中

$$\begin{cases} G = [3/(4J_2)](1/E_t - 1/E) & f = 0, \quad (\partial f/\partial\sigma_{mn})\dot{\sigma}_{mn} > 0 \\ G = 0 & f < 0, \quad (\partial f/\partial\sigma_{mn})\dot{\sigma}_{mn} \leq 0 \end{cases}$$

设材料为各向同性硬化体, 加载函数  $f$  由 Mises 屈服条件确定, 即

$$f = J_2 - k^2 = (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2)/3 + \sigma_{xy}^2 - k^2 \quad (3)$$

式中:  $E$  为弹性模量;  $k = p_{cr}^k/p_{cr0}^k$ ,  $p_{cr}^k$  为均匀径向和轴向冲击时圆柱壳的临界屈曲载荷,  $p_{cr0}^k$  为均匀径向载荷单独作用时圆柱壳的静力屈曲载荷;  $J_2$  为第二类应力张量不变量; 当结构材料进入塑性变形状态, 塑性变形的切线模量  $E_t$  可由 Ramberg-Osgood 应力应变曲线求得。即

$$\epsilon = (\sigma/E_t)[1 + (3/7)(\sigma/F_{.7})^{\lambda-1}]$$

式中:  $\lambda \geq 2$  为形状材料硬化参数,  $F_{.7}$  为割线应力。

由式(2)和式(3), 圆柱壳的应力应变关系为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{xx} = f_{11}\dot{\epsilon}_{xx} + f_{12}\dot{\epsilon}_{yy} + 2f_{13}\dot{\epsilon}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{yy} = f_{12}\dot{\epsilon}_{xx} + f_{22}\dot{\epsilon}_{yy} + 2f_{23}\dot{\epsilon}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{xy} = f_{13}\dot{\epsilon}_{xx} + f_{23}\dot{\epsilon}_{yy} + 2f_{33}\dot{\epsilon}_{xy} \end{cases}$$

式中：对称的系数矩阵  $f_{ij} = c_{ij}^{-1} (i, j = 1, 2, 3)$ 。

$$\begin{cases} c_{11} = 1/E + G(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/9 \\ c_{12} = -\nu/E + G(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/9, \\ c_{13} = G(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \circ 2\sigma_{xx}/3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_{22} = 1/E + G(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2/9 \\ c_{23} = G(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \circ 2\sigma_{xy}/3 \\ c_{33} = 2(1 + \nu)/E + 4G\sigma_{xy}^2 \end{cases}$$

在以增量形式表示的初边值条件约束下，将内力和内力矩的增量形式代入方程(1)的增量表达式中，即可得到关于未知位移增量  $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$  的偏微分方程。在空间域，采用有限差分法对壳单元离散；在时间域，采用变步长 Runge-Kutta 法对时间积分，从而求解关于  $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$  的运动控制方程。

根据上述理论，编制了 Fortran 计算程序。以流固冲击载荷为例，分析了复杂载荷作用下圆柱壳的弹塑性动屈曲性质。

### 3 算例与分析

通常，流固冲击载荷可以由下式表示

$$p(t) = \begin{cases} k_1 t^2 + k_2 t & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

式中： $k_1 = -4p_{max}/t_d^2, k_2 = 4p_{max}/t_d, p_{max}$  是载荷峰值， $t_d$  是载荷持续时间。

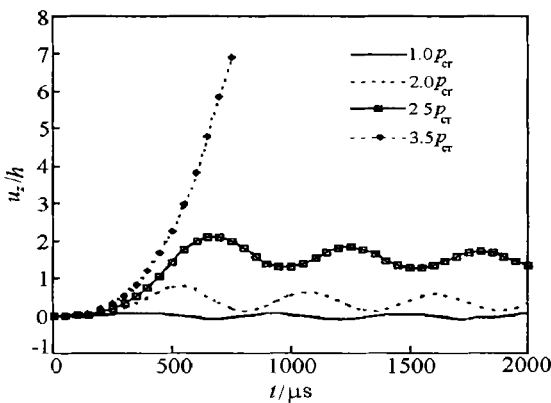
选取圆柱壳及流固载荷性能参数为： $h = 6.096\text{mm}; R = 100h; L = 3.0R; \rho = 7.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3; \nu = 0.3; t_d = 500\mu\text{s}; \lambda = 30, F_{.7} = 0.6027\text{GPa}; E = 205.8\text{GPa}; p_{cr} = 2.44\text{GPa}$  (结构的静屈曲压力)。

对于同时承受均匀径向外压和轴向冲击载荷的圆柱壳结构，人们通常关心的是这两种载荷的组合形式对圆柱壳发生动力屈曲和动力的影响。为考虑均匀径向外压与圆柱壳结构抗轴向冲击能力的关系，首先定义几个无因次载荷参数：无因次轴向冲击临界载荷峰值  $\lambda^* = p_{cr}^d/p_{cr}$ ， $p_{cr}^d$  为均匀径向载荷和轴向冲击载荷联合作用时圆柱壳的临界屈曲载荷， $p_{cr}$  为轴向冲击载荷单独作用时圆柱壳的轴向静力屈曲临界载荷。

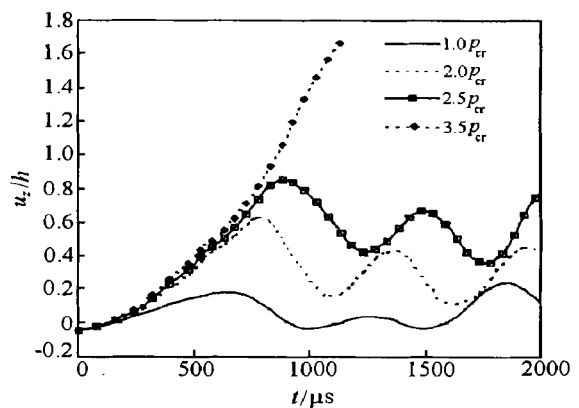
定义无因次端部平均伸长： $\Delta u_x = \left| \int_0^{2\pi} \int_0^L (\partial u_x / \partial x) dx d\theta \right| / (2\pi h)$ ，并将其作为分析的对象，采用 B-R 准则定性分析圆柱壳的动力屈曲特性，并且定义圆柱壳的临界动力屈曲载荷为  $p_{cr}^d$ ，临界动力失效载荷为  $p_{cr}^d$ 。

#### 3.1 不同均匀径向外压时，轴向冲击圆柱壳的动态特性

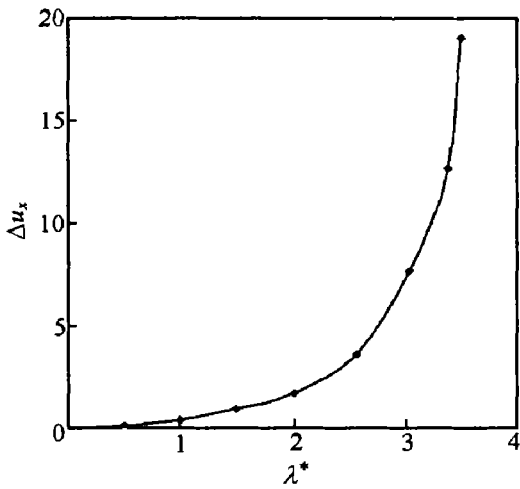
图 1 是当载荷无因次均匀径向载荷  $k=0.2$  时，圆柱壳的动力特性曲线。从图 1(a)和(b)中可以看出：当轴向冲击载荷峰值小于临界动力屈曲载荷  $p_{cr}^d$  时，无论是在冲击端附近还是在固定端附近，均匀



(a) 不同载荷下冲击端附近无因次径向位移的响应曲线  
(a) Non-dimension radial displacement nearby the end of impact under different loading

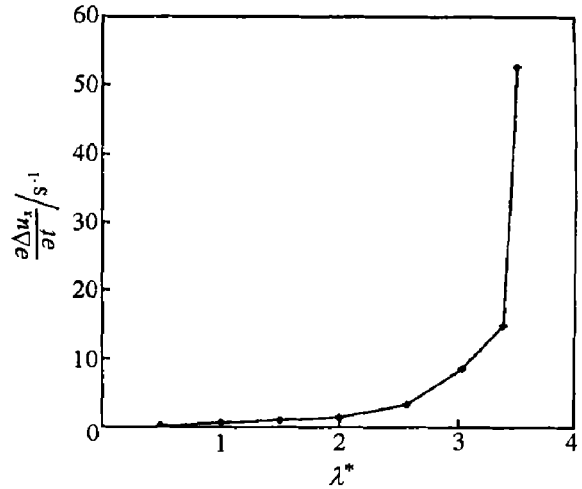


(b) 不同载荷下非冲击端附近无因次径向位移的响应曲线  
(b) Non-dimension radial displacement nearby the non-end of impact under different loading



(c) 无因次轴向平均位移  
随冲击载荷峰值的变化曲线

(c) Average value of non-dimension axial displacement vs. peak value of loading



(d) 无因次轴向平均位移的斜率  
随冲击载荷峰值的变化曲线

(d) Slope of average value of non-dimension axial displacement vs. peak value of loading

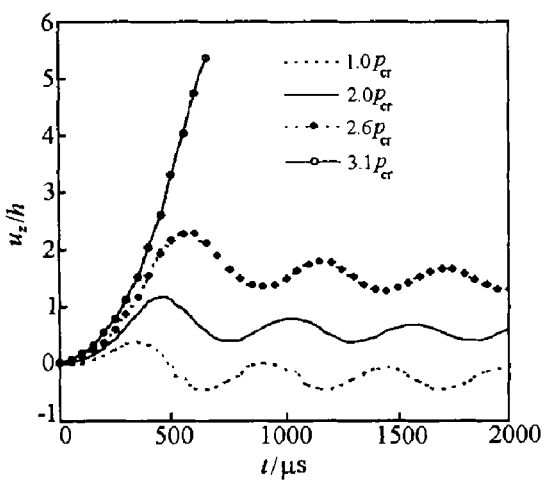
图1  $k=0.2$  时圆柱壳的动力特性曲线

Fig.1 Dynamic behavior of cylindrical shells while  $k=0.2$

径向外压都起着抑制结构的“外凸”变形,而促进结构发生“内凹”的变形,因此在一定程度上提高了圆柱壳抵抗屈曲变形的能力;而当轴向冲击载荷峰值接近动力塑性失效载荷时,结构发生非轴对称屈曲变形,局部发生“内凹”变形,均匀径向外压促进圆柱壳的“内凹”快速形成,并最终导致圆柱壳发生倒塌破坏。同时可以看出:在较小径向载荷作用下,圆柱壳结构的变形情形与单独承受轴向冲击载荷的圆柱壳有较大的相似性<sup>[5]</sup>,当轴向冲击载荷较小时,非冲击端的径向位移要大于冲击端的径向位移;随着冲击载荷幅值的增加,在冲击端附近逐渐形成塑性区域,并且塑性区域阻止屈曲沿着整个壳长的传播,在冲击端附近形成较大的局部变形。

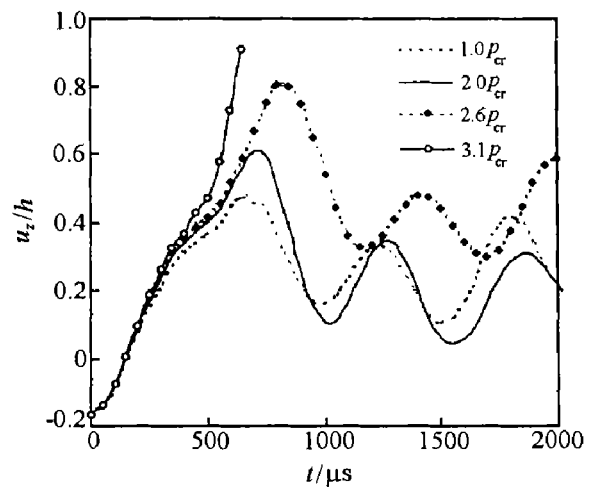
图1(c)和(d)分别给出了均匀径向外压  $k=0.2$  时,圆柱壳最大轴向平均位移随冲击载荷峰值的变化曲线、无因次轴向平均位移的斜率随冲击载荷峰值的变化曲线。根据 B-R 准则可以确定圆柱壳的临界动力屈曲载荷  $p_{cr}^d = 2.57$ , 临界动力失效载荷  $p_{cr}^d = 3.5$ 。

图2是当载荷无因次均匀径向载荷  $k=0.4$  时,圆柱壳的动力特性曲线。从图2(a)和(b)可以看



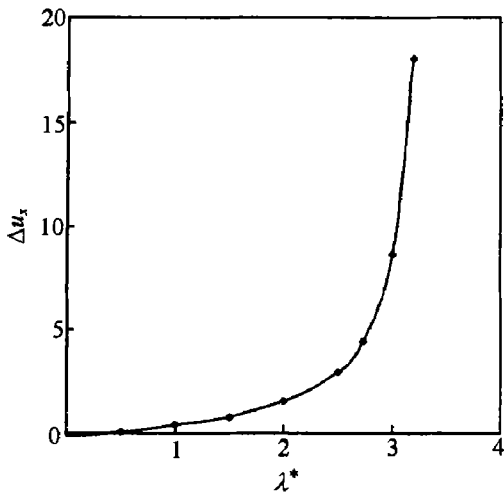
(a) 不同载荷下冲击端附近无因次  
径向位移的响应曲线

(a) Non-dimension radial displacement nearby the end of impact under different loading

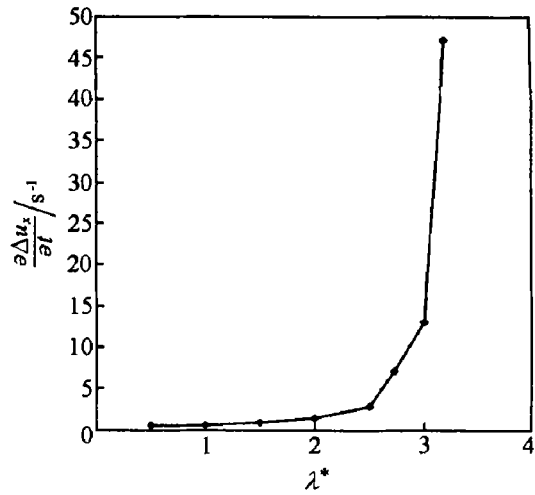


(b) 不同载荷下非冲击端附近无因次  
径向位移的响应曲线

(b) Non-dimension radial displacement nearby the non-end of impact under different loading



(c) 无因次轴向平均位移  
随冲击载荷峰值的变化曲线  
(c) Average value of non-dimension axial displacement vs. peak value of loading



(d) 无因次轴向平均位移的斜率  
随冲击载荷峰值的变化曲线  
(d) Slope of average value of non-dimension axial displacement vs. peak value of loading

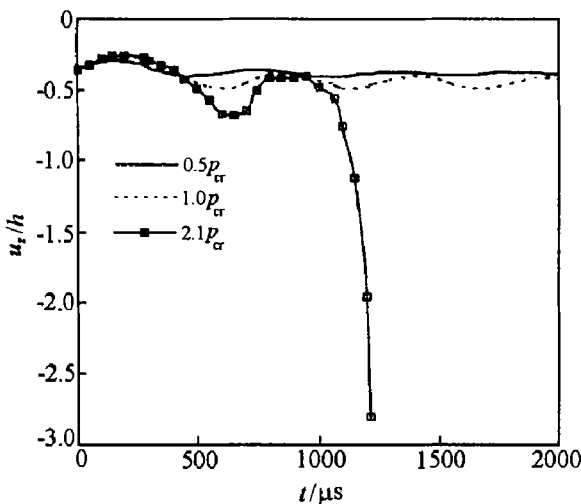
图 2  $k=0.4$  时圆柱壳的动力特性曲线

Fig.2 Dynamic behavior of cylindrical shells while  $k=0.4$

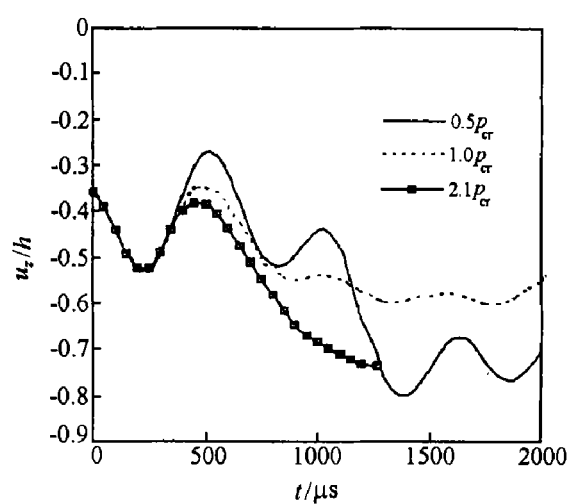
出：均匀径向外压对圆柱壳的动力响应有较大的影响。当轴向冲击载荷峰值  $\lambda=0.1$  时，其径向位移表现为负值（即“内凹”）；当载荷峰值继续增大，圆柱壳的径向位移开始转变为正值（即“外凸”），因此径向外压的增加提高了圆柱壳抵抗屈曲的能力，使其临界动力屈曲载荷增大；而当载荷峰值接近动力失效载荷时，径向外压的存在导致圆柱壳迅速发生破坏，失去继续承受外部载荷的能力。

图 2(c)和(d)分别给出了均匀径向外压  $k=0.4$  时，圆柱壳最大轴向平均位移随冲击载荷峰值的变化曲线、无因次轴向平均位移的斜率随冲击载荷峰值的变化曲线。从图中可以看出：根据 B-R 准则可以确定圆柱壳的临界动力屈曲载荷  $p_{cr}^d = 2.63$ ，临界动力失效载荷  $p_{cr}^d = 3.1$ 。同图 1 比较可以知道：径向外压的增大提高了复杂载荷作用下圆柱壳的临界动力屈曲载荷，但是降低了临界动力失效载荷。

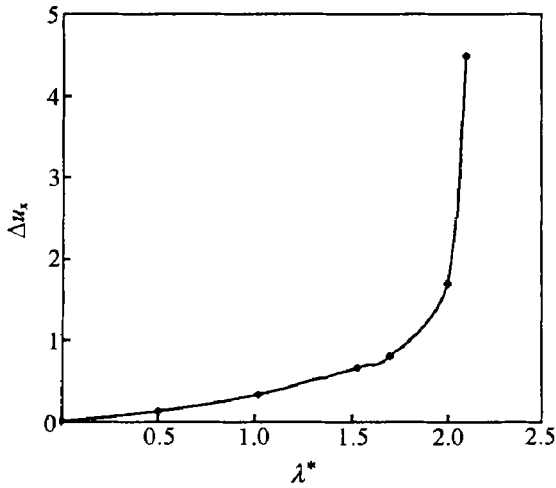
图 3 是当无因次均匀径向载荷  $k=0.6$  时，圆柱壳的动力特性曲线。从图 3(a)和(b)可以看出：由于存在较大的均匀径向外压，圆柱壳在轴向冲击载荷作用下始终表现为“内凹”的变形。当轴向冲击载荷峰值较小时，其径向位移表现为负值（即“内凹”）；随着载荷峰值的增大，圆柱壳的径向位移仍然保持



(a) 不同载荷下冲击端附近无因次  
径向位移的响应曲线  
(a) Non-dimension radial displacement  
nearby the end of impact under different loading

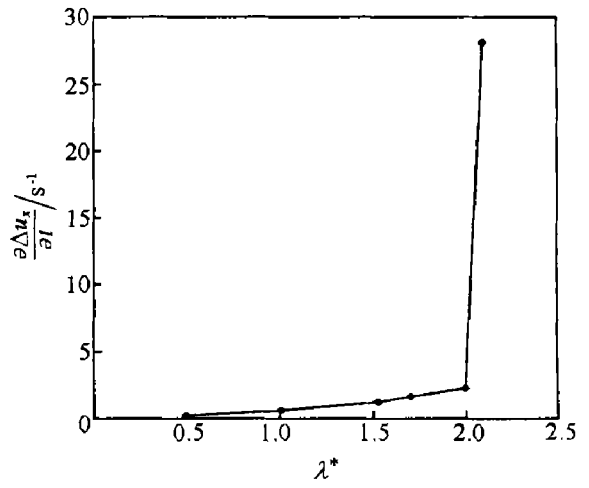


(b) 不同载荷下非冲击端附近无因次  
径向位移的响应曲线  
(b) Non-dimension radial displacement  
nearby the non-end of impact under different loading



(c) 无因次轴向平均位移  
随冲击载荷峰值的变化曲线

(c) Average value of non-dimension axial displacement vs. peak value of loading



(d) 无因次轴向平均位移的斜率  
随冲击载荷峰值的变化曲线

(d) Slope of average value of non-dimension axial displacement vs. peak value of loading

图 3  $k=0.6$  时圆柱壳的动力特性曲线

Fig.3 Dynamic behavior of cylindrical shells while  $k=0.6$

为负值；当冲击载荷接近临界动力屈曲载荷时，圆柱壳的冲击端附近迅速发生“内凹”变形。因此无因次均匀径向载荷  $k=0.6$  时，径向外压的存在导致圆柱壳只发生内凹变形，不但降低了临界动力屈曲载荷，也导致圆柱壳迅速发生破坏，失去继续承受外部载荷的能力。同时，由于此时圆柱壳承受较大的载荷，结构发生屈曲和破坏的临界时间较短，屈曲变形没有足够的时间发展，因而径向位移较小。

图 3(c)和(d)分别给出了均匀径向外压  $k=0.6$  时，圆柱壳最大轴向平均位移随冲击载荷峰值的变化曲线、无因次轴向平均位移的斜率随冲击载荷峰值的变化曲线。从图中可以根据 B-R 准则确定圆柱壳的临界动力屈曲载荷  $p_{cr}^d = 2.1$ ，动力失效载荷  $p_{cr}^d = 2.1$ 。

### 3.2 均匀径向外压对轴向冲击圆柱壳动态特性的影响

图 4 给出了圆柱壳的  $\lambda^*-k$  关系曲线，从图中可以看出：

当无因次均匀径向外压载荷幅值  $k < 0.4$  时，随着  $k$  的增加，结构发生动力屈曲的无因次轴向冲击临界载荷峰值  $\lambda^*$  增加，而结构发生动力失效的临界冲击载荷下降。这表明：当均匀径向外压较小时，随着压力幅值的增加虽然有助于结构抵抗轴向冲击屈曲的能力，但是导致结构失效的临界载荷减小。其原因是：在单独均匀径向外压作用下，圆柱壳往往发生轴向波数为 1 的屈曲变形。波长较长，而在单独轴向冲击载荷下的圆柱壳发生屈曲时，其轴向波数较多，波长较短，两种载荷之间的相关性不大。而当圆柱壳发生失效变形时，圆柱壳会发生局部的“内凹”变形，径向外压的增大促使结构迅速发生破坏，失去继续承载的能力。

当无因次均匀径向外压载荷  $k > 0.4$  时，随着  $k$  的增加，结构发生动力屈曲和动力失效的无因次轴向冲击临界载荷峰值  $\lambda^*$  都迅速下降，并且当  $k > 0.6$  时，其动力临界载荷和动力失效载荷趋近于相同。

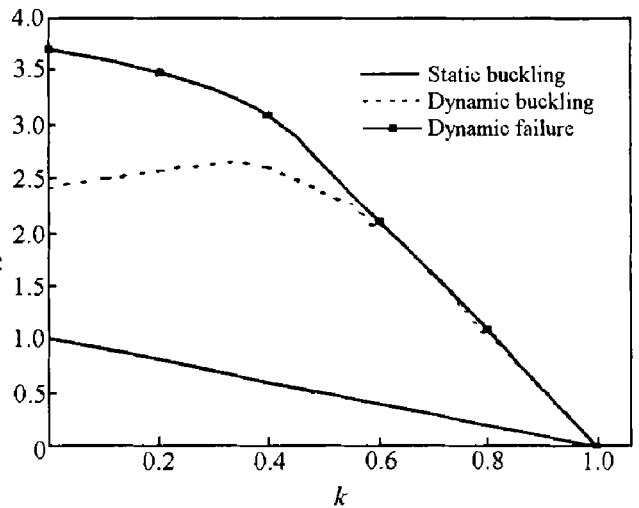


图 4 在均匀径向外压和轴向冲击联合作用下，无因次轴向冲击载荷峰值  $\lambda^*$  与无因次均匀径向位移的关系曲线

Fig.4 Peak value of impact loading  $\lambda^*$  pressure vs. non-dimension radial displacement under combined axial impact and uniform

这说明: 当均匀径向外压大于一定幅值后, 圆柱壳抵抗轴向冲击屈曲和破坏的能力都急剧下降, 特别是当无因次均匀径向外压  $k$  接近于 1.0 时, 即使较小的冲击载荷也会引起结构屈曲破坏。

## 4 结 论

通过计算和分析, 可以得到下面几点结论:

(1) 均匀径向外压对圆柱壳的轴向冲击屈曲过程或屈曲性态有较大的影响。主要体现在其前屈曲过程变得更加复杂, 而且, 均匀径向外压与轴向冲击载荷之间相互影响、相互制约, 共同决定圆柱壳的动力屈曲。

(2) 均匀径向外压对圆柱壳抵抗轴向冲击屈曲的能力有较大的影响。当均匀径向外压较小时, 随着外压的增加, 圆柱壳抵抗轴向冲击屈曲的能力增强; 当均匀径向外压大于一定值时, 结构抵抗轴向冲击屈曲的能力开始下降; 当均匀径向外压接近于径向临界静力屈曲载荷时, 圆柱壳抵抗轴向冲击屈曲的能力迅速下降, 即使很小的轴向冲击载荷也可能引起结构发生动力屈曲。

(3) 均匀径向外压对圆柱壳发生动力失效的临界载荷能力也有很大的影响。随着均匀径向外压的增大, 结构的临界动力失效载荷迅速下降, 并且当均匀径向外压大于一定值时, 结构发生动力屈曲和动力失效的临界载荷趋近于一致。

## 参考文献:

- [1] Tennyson R C. The Effect of Shape Imperfection and Stiffening on the Buckling of Circular Cylinders[A]. Buckling of Structures [C]. Budiansky B. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [2] 王仁, 韩铭宝, 黄筑平, 等. 受轴向冲击的圆柱壳塑性动力屈曲实验研究[J]. 力学学报, 1983, 15(5): 509—515.
- [3] 韩铭宝, 杨青春. 在径向载荷和轴向冲击联合作用下的圆柱壳塑性稳定性分析[J]. 应用力学学报, 1994, 11(2): 25—32.
- [4] 江松青. 复杂载荷下加筋板壳结构的动力响应和动力屈曲研究[D]. 武汉: 华中理工大学, 1999.
- [5] 刘理, 刘土光, 李天匀. 圆柱壳在轴压冲击载荷下的非对称屈曲分析[J]. 华中理工大学学报, 1999, 27(4): 95—97.
- [6] 杨桂通. 塑性动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1984.

## Elastic-plastic Dynamic Buckling of Cylindrical Shells under Combined Loading

LIU Li, LIU Tu-guang, ZHANG Tao, LI Tian-yun

(*Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,*

*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, Hubei, China*)

**Abstract:** The elastic-plastic dynamic buckling of cylindrical shells under combined loading is discussed. The basic equations of structure are derived from Hamilton variational principle and the constitution of material utilizes the increment theory. The increment numerical method is used to solve the kinetic equations. The results exhibit that radial external pressure play an important role on the shape and property of the cylinder under axial loading. The effects of value of radial external pressure and value of axial loading to the dynamic buckling behavior of cylinder are discussed.

**Key words:** cylindrical shell; combined loading; dynamic buckling; dynamic failure