

文章编号: 1001-1455-(2002)04-0289-06

球壳结构馈通增长的瑞利-泰勒不稳定性*

林其文

(中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理实验室, 四川 绵阳 621900)

摘要: 利用小扰动分析法, 导出不可压缩球壳结构的馈通增长方程, 数值模拟了高压气体驱动外表面有初始扰动的明胶球壳的瑞利-泰勒不稳定性模型。计算结果表明: 对于低波数扰动, 外表面比较稳定, 内表面的馈通增长较快, 具有比较明显的三个演化阶段和波形反转现象。高波数扰动的增长恰好与低波数相反。球壳会聚结构比柱壳会聚结构的界面稳定性要好些。

关键词: 球壳; 会聚结构; 瑞利-泰勒不稳定性; 馈通增长; 扰动

中图分类号: O357.41 文献标识码: A

1 引言

会聚结构中的流体动力学不稳定性因在激光惯性约束聚变(ICF)、超新星爆发等过程中起重要作用而受到广泛重视, 它也是 ICF、内爆动力学等需解决的关键技术问题之一。在会聚结构中的不稳定性问题有三个因素必须考虑: 首先, 较轻的流体加速较重的流体, 即可形成瑞利-泰勒(RT)不稳定性; 其次, “薄壁”效应, 它通过外部 RT 不稳定性表面扰动的馈通, 使扰动出现在聚爆球壳的内表面。这些内表面扰动是极不希望出现的, 因为它们影响球壳的压缩性能; 最后, 会聚作用, 随着球壳聚爆, 扰动幅度和球壳厚度都在变化, 从而使外部扰动对内表面扰动的耦合和影响发生变化。

本文中拟研究球壳在高压气体驱动会聚下馈通增长的 RT 不稳定性。下面分别讨论扰动增长的耦合方程、弹性球壳运动方程及数值计算等问题。

2 扰动增长的耦合方程

采用与 M.S.Plesset^[1]、K.O.Mikaelian^[2] 相似的小幅度分析法来推导球形结构的扰动增长方程。考虑 N 层流体组成的球形结构。从里向外的流体密度依次为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, 界面平均半径为 $R_1, R_2, \dots, R_{N-1}, R_N (R_N = \infty)$ 。 R_i 是密度为 ρ_i 和 ρ_{i+1} 的两层流体的界面平均半径。因界面有扰动, 其半径与角度有关。假定具有扰动幅度 η_i 和波数的实际界面半径 r_i 可表示为

$$r_i = R_i + \eta_i Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{1}$$

式中: Y_l^m 为球谐函数。对于线性分析, 假定

$$|\eta_i| \ll R_i \tag{2}$$

在密度为 ρ_i 的区域 i 内, 引进速度势 φ_i , 则该区域的流体速度 $u_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$ 。对不可压流体, $\nabla^2 \varphi_i = 0$ 。球形区域各层流体的速度势(包括零级量和扰动量两部分)为

$$\varphi_i = \frac{R_i^2 \dot{R}_i}{r} + B_i r^l Y_l^m + \frac{C_i Y_l^m}{r^{l+1}} \quad r_{i+1} \leq r \leq r_i \tag{3}$$

式中: B_i, C_i 与 r 无关, 是 l, R_{i-1}, R_i 等的函数, 由界面上径向速度连续条件确定。在界面 r_i 上, $u_i|_{r=r_i} = \dot{r}_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}|_{r=r_i}$, 代入公式(1)和(3)得到

* 收稿日期: 2001-07-03; 修回日期: 2001-09-03
作者简介: 林其文(1939—), 男, 副研究员。

$$\frac{R_i^2 \dot{R}_i}{r_i^2} - l B_i r_i^{l-1} Y_l^m + \frac{(l+1) C_i Y_l^m}{r_i^{l+2}} = \dot{R}_i + \dot{\eta}_i Y_l^m$$

无扰动时, (3) 式中的 B_i 、 C_i 都为零, 因此它们至少应与扰动量同量级。将 (1) 式代入上式时, 仅保留到 η_i 的一次项。对第一项, $r_i^{-2} = (R_i + \eta_i Y_l^m)^{-2} \approx R_i^{-2} (1 - 2\eta_i Y_l^m)$ 。对第二、第三两项, 因 B_i 、 C_i 与 η_i 同量级, 所以 r_i^{l-1} 和 r_i^{l+2} 仅保留零级项 R_i^{l-1} 和 R_i^{l+2} , 则

$$l B_i = (l+1) C_i R_i^{-2l-1} - R_i^{-l-1} \dot{S}_i \quad (4a)$$

式中: $S_i = R_i^2 \eta_i$ 。同样, 可得区域量 B_i 、 C_i 在界面 r_{i-1} 上的类似关系

$$l B_i = (l+1) C_i R_{i-1}^{-2l-1} - R_{i-1}^{-l-1} \dot{S}_i \quad (4b)$$

方程 (4a) 与 (4b) 联立, 解出 B_i 、 C_i 分别为

$$B_i = -\frac{R_i^{-l-1} \dot{S}_i}{l(1 - \phi_{i-1,i}^{2l+1})} - \frac{R_{i-1}^{-l-1} \dot{S}_{i-1}}{l(1 - \phi_{i-1,i}^{2l+1})} \quad (5a)$$

$$C_i(l) = B_i(-l-1) \quad (5b)$$

式中: $\phi_{i-1,i} = \frac{R_{i-1}}{R_i}$, $\phi_{i,i-1} = \phi_{i-1,i}^{-1}$ 。

为了得到理想界面半径 R_i 和扰动量 S_i 的运动方程, 应用区域 i 和 $i+1$ 的两层流体压力在界面半径 r_i 处是连续的条件, 即

$$P_i(t) + \rho_i \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \frac{(\nabla \varphi_i)^2}{2} \right] = P_{i+1}(t) + \rho_{i+1} \left[\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial t} - \frac{(\nabla \varphi_{i+1})^2}{2} \right] \quad r = r_i \quad (6)$$

式中: P_i 、 P_{i+1} 是伯努利积分常数。将 (3) 式代入上式, 且在展开式中仅保留到 η_i 的一次项。并考虑到流体层的不可压关系 $R_{i+1}^2 \dot{R}_{i+1} = R_i^2 \dot{R}_i$, 最后可得到零级量 R_i 及扰动量 S_i 的运动方程

$$P_i - P_{i+1} = (\rho_i - \rho_{i+1}) \left[R_i \ddot{R}_i + \frac{3 R_i^2}{2} \right] \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

$$(\rho_{i+1} - \rho_i) \frac{d(R_i S_i)}{dt} = R_i^{l+2} (\rho_{i+1} \dot{B}_{i+1} - \rho_i \dot{B}_i) + R_i^{-l+1} (\rho_{i+1} \dot{C}_{i+1} - \rho_i \dot{C}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (8)$$

界面平均半径 R_i 的运动方程 (7) 在下节还要详细讨论。从方程 (8) 可见, 界面 r_i 的扰动幅度 η_i 与相邻界面 $r_{i\pm 1}$ 的 $\eta_{i\pm 1}$ 相关, 所以 N 层球壳结构的 $N-1$ 个界面的扰动方程需要联立求解。当 $r \rightarrow 0$ 或 $r \rightarrow \infty$ 时, 速度势取有限值, 所以要求 $C_1 = B_N = 0$ 。同时, (8) 式中的 B_i 、 C_i 分别为

$$B_i = \frac{R_i^{-l-1}}{l(1 - \phi_{i-1,i}^{2l+1})} \left[-\dot{S}_i + \left[\frac{(l+1)R_i}{R_i} - \frac{(2l+1)\phi_{i-1,i}^{2l+1} A_{i-1,i}}{1 - \phi_{i-1,i}^{2l+1}} \right] \dot{S}_i + \phi_{i-1,i}^l \dot{S}_{i-1} - \phi_{i-1,i}^l \left[\frac{(l+1)R_{i-1}}{R_{i-1}} - \frac{(2l+1)A_{i-1,i}}{1 - \phi_{i-1,i}^{2l+1}} \right] \dot{S}_{i-1} \right] \quad (9a)$$

$$C_i(l) = B_i(-l-1) \quad (9b)$$

式中: $A_{i-1,i} = \frac{R_{i-1}}{R_i} - \frac{R_i}{R_{i-1}}$, $A_{i,i-1} = -A_{i-1,i}$ 。

至此, 如果给出 N 层介质的 $N-1$ 个界面的平均半径 R_i 的运动状态, 原则上由方程 (8) 可解出各界面扰动幅度的发展情况。我们感兴趣的是高压气体驱动明胶球壳的不稳定性问题, 所以 $N=3$, 扰动方程中只有两个平均界面半径 R_1 和 R_2 , 又因球壳外层和内层空间的气体密度远比明胶密度低, 可近似取 $\rho_1 = \rho_3 \approx 0$ 。这样方程 (8) 可简化为

$$R_i^{l+2} \dot{B}_2 + R_i^{-l+1} \dot{C}_2 = \frac{d(R_i S_i)}{dt} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

借助(9a)和(9b)的关系, 将 $B_2(S_1, S_2)$ 、 $C_2(S_1, S_2)$ 代入上式, 联立解出 \ddot{S}_1 、 \ddot{S}_2 。经过化简, 可得到 S_1 和 S_2 的二阶微分方程组

$$\begin{cases} \ddot{S}_1 = G_{11}\dot{S}_1 + G_{12}S_1 + G_{13}\dot{S}_2 - G_{14}S_2 \\ \ddot{S}_2 = G_{21}\dot{S}_2 - G_{22}S_2 + G_{23}\dot{S}_1 + G_{24}S_1 \end{cases} \quad (11)$$

式中: $G_{i1} = \frac{\dot{R}_i}{R_i}$, $G_{i2} = \frac{[(l+1) + l\psi_{12}^{2l+1}]\dot{R}_i}{(1 - \psi_{12}^{2l+1})R_i}$, $G_{i3} = \frac{(2l+1)\psi_{12}^{+2-i}A_{12}}{1 - \psi_{12}^{2l+1}}$, $G_{i4} = \frac{(2l+1)\psi_{12}^{+2-i}R_i}{(1 - \psi_{12}^{2l+1})R_i}$, $i = 1, 2$ 。

(11)式就是描述球壳内外界面扰动增长的线性、共轭二阶微分方程。对于研究外界面扰动对内界面的贯通增长不稳定性, 其初始条件取为: $S_1 = \dot{S}_1 = \dot{S}_2 = 0$, $S_2 = R_{20}^2 \eta_{20}$ 。 R_{20} 和 η_{20} 分别为球壳外表面的初始平均半径和扰动幅度。

界面平均半径的运动方程(7)有两个不足之处, 一是伯努利积分常数 P_i 、 P_{i+1} 不易确定, 其次未考虑弹性。下节将用另外的方法讨论这个问题。

3 弹性球壳界面的径向运动

设内半径为 R_1 , 外半径为 R_2 的弹性球壳受到内外压力的作用, 发生会聚运动, 其径向应力边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_r(R_1) = -p_1 \\ \sigma_r(R_2) = -p_2 \end{cases} \quad (12)$$

由弹性球壳的不可压条件 $\frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} = 0$, 可得积分常数

$$D(t) = r^2 u \quad (13)$$

再将(13)式代入球壳的运动方程 $\rho u = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}$, 得到

$$\frac{D}{r^2} = 2 \frac{D^2}{r^5} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho r} \quad (14)$$

球坐标中, 应力、偏应力及偏应变有关系 $\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = 2G(\epsilon_r - \epsilon_\theta) = 2G(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r})$, G 为剪切模量。再由不可压条件 $\frac{\partial u}{\partial r} = -2\frac{u}{r}$, 得到 $\sigma_r - \sigma_\theta = -6G\frac{u}{r}$ 。所以, $\sigma_r - \sigma_\theta = -6G \int \frac{u}{r} dt = -6Gr^{-3} \int D(t) dt =$

$-2G \frac{R_2^3 - R_{20}^3}{r^3}$, 代入(14)式后得到 $\frac{D}{r^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2 \frac{D^2}{r^5} - 4G \frac{R_2^3 - R_{20}^3}{\rho r^4}$, 再将它对 r 积分, 并应用应力边界条件(12), 最后得到 D 的一阶微分方程

$$D = \frac{(p_1 - p_2)/\rho + D^2(R_1^{-4} - R_2^{-4})/2 + 4G(R_{20}^3 - R_2^3)(R_1^{-3} - R_2^{-3})/(3\rho)}{(R_1^{-1} - R_2^{-1})} \quad (15)$$

上式就是弹性球壳界面的运动方程, 将它与界面速度 $R_i = \frac{D}{R_i^2}$ 联立积分, 即可得到界面的运动方程。

加速度为 $\ddot{R}_i = \frac{D - 2D^2/R_i^3}{R_i^2}$ 。(15)式中, 等式右端第三项为弹性恢复项。压力 p_1 、 p_2 与模型结构具体尺寸、气体状态方程及初始条件等有关。

4 算例与讨论

计算模型为高压气体驱动明胶球壳, 结构为 0(空气) R_1 (明胶) R_2 (爆炸气体) R_3 (固定金属壳)。明胶球壳内外表面的初始半径 $R_{10} = 4\text{cm}$, $R_{20} = 5.5\text{cm}$, 密度 $\rho = 1.0\text{g/cm}^3$, 剪切模量 $G = 7\text{kPa}$, 空气

初始压力 $p_{10} = 10^5 \text{Pa}$, 固定金属壳内半径 $R_3 = 11 \text{cm}$. 明胶球壳与固定金属壳之间的空腔充入摩尔质量相同的氧气 - 乙炔混合气体 (压力 10^5Pa), 设该气体爆炸后在空腔中产生的平均压力 $p_{20} \approx 1.65 \text{MPa}$. 本模型的数据参考了 S. T. Weir^[3] 等的爆炸气体驱动明胶圆筒实验的数据. 明胶球壳会聚过程中, 设内外空腔中的气体压缩或膨胀都满足多方指数规律, 且空气绝热指数为 1.4, 爆炸气体绝热指数为 1.297. 爆炸气体驱动球壳内聚过程中, 金属内壳半径 R_3 与气体膨胀压力 p_2 有关, R_3 越大, p_2 降低越慢.

设明胶球壳外表面具有初始扰动, 且假定扰动波与方位角无关 (即 $m = 0$), 有 $r_2 = R_2 + \eta_2 P_l \cos \theta$, P_l 为勒让德多项式. 取初始扰动幅度为 $\eta_{20} = 0.1 \text{cm}$, 波数为 $l = 6$. 球壳界面的运动方程 (15) 和扰动增长反馈方程 (11) 采用龙格 - 库塔法积分.

主要计算结果如图 1、图 2 所示. 从图 1(c) 可见, 在 0.4ms 之前, 外表面和内表面都向内加速, 因此外表面是 RT 不稳定的, 内表面是稳定的. 0.4 ~ 0.58ms 之间, 外表面向外加速, 内表面仍向内加速, 两个界面都是稳定的. 在 0.58 ~ 0.62ms 之间, 内外表面都向外加速, 内表面变为不稳定的.

对球壳界面反馈增长方程组 (11) 的系数 G_{ij} 在不同的时间进行数值分析, 有助于深入理解扰动幅度的演变特点. 这种演变可粗略分为三个阶段:

(1) 强耦合段 ($t < 0.4 \text{ms}$).

此阶段, 球壳较薄, ψ_{12} 较大, 内外扰动之间有显著的耦合作用 (即 G_{14} 和 G_{24} 相当大), 外部扰

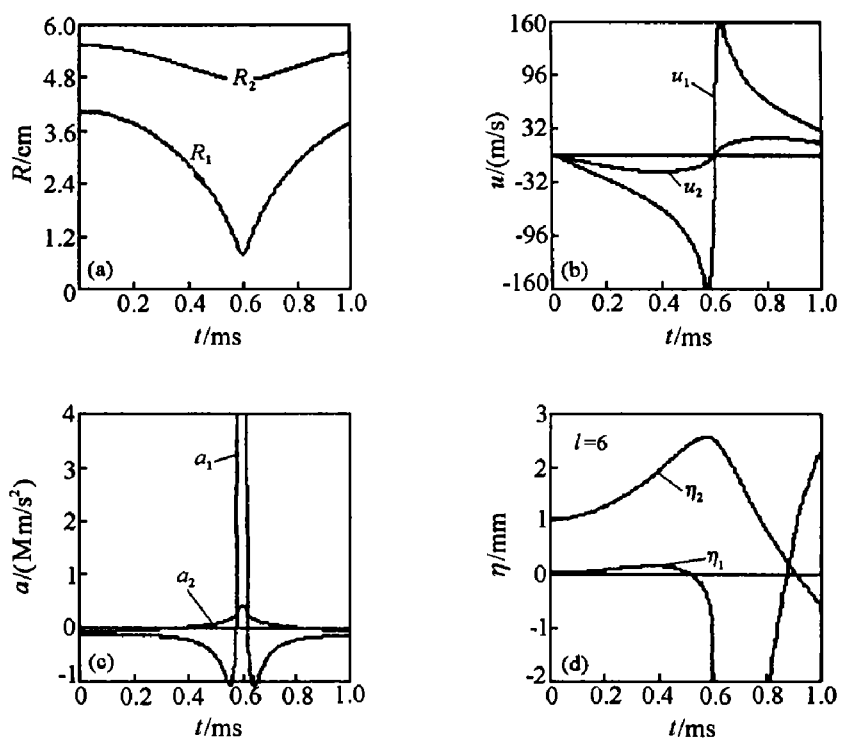


图 1 球壳半径 R 、速度 u 、加速度 a 、扰动幅度 η 随时间的变化曲线

Fig. 1 Spherical shell radiuses R , radial velocities u , radial accelerations a , perturbation amplitudes η vs time

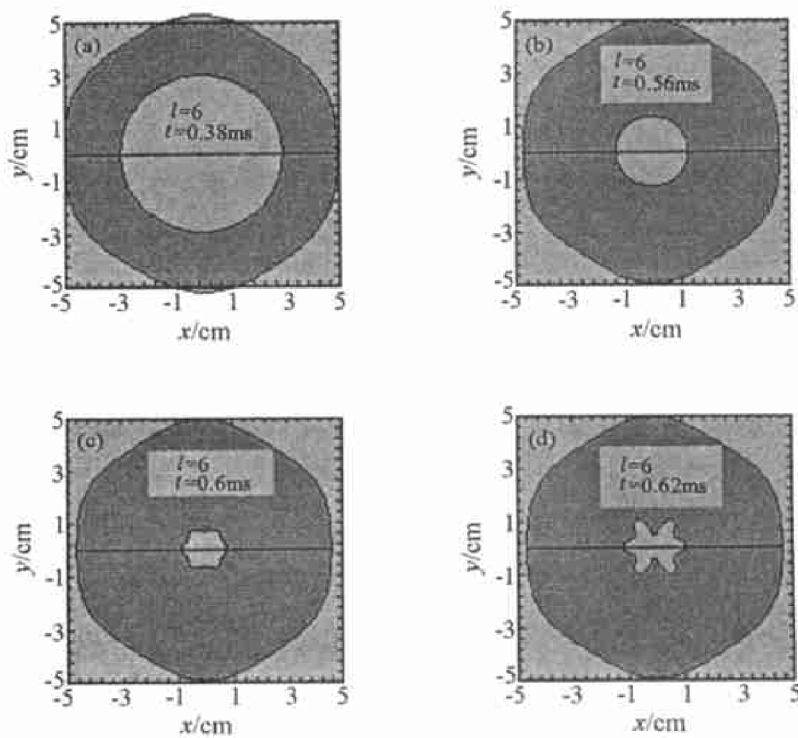


图 2 球壳轴截面的变形过程

Fig. 2 Spherical shell deformation vs time

动的 RT 发展强有力地激励内部馈通扰动的增长。此时, $\frac{\eta_1}{\eta_2} \propto \exp\left[\frac{-l(R_2 - R_1)}{R_2}\right]$, 如图 1(c)、图 2(a) 所示。

(2)退耦段 ($0.4\text{ms} < t < 0.58\text{ms}$)。此阶段, 随着球壳的会聚, ψ_{12} 变得很小, 内外扰动的交叉耦合系数 G_{14} 和 G_{24} 大大减小, 而系数 G_{12} 和 G_{22} 至少比其它系数大一个量级, 因此馈通增长方程组近似地描述两个几乎独立的简谐振子。此时, 外表面加速度为正, 其扰动变成 RT 稳定的, 幅度增长变缓。内部扰动开始变为近似于自由振荡, 且幅度减小 ($G_{12} < 0$), 如图 1(c)、图 2(b) 所示。

(3)减速段 ($0.58\text{ms} < t < 0.62\text{ms}$)。此阶段, 内表面加速度也为正, 球壳开始减速会聚, 然后反弹, 变成 RT 不稳定的, 从而使内表面扰动幅度呈指数快速增长, 并呈现明显的相位反转, 随着时间的发展, 可能导致湍流混合, 如图 2(c)、(d) 所示。 $t = 0.62\text{ms}$ 时, $|\eta_1| = 5.3\text{mm}$, $R_1 = 9.8\text{mm}$, $|\eta_1|/R_1 = 0.54$, 扰动发展开始偏离线性条件(2)式。作者认为, 图 2(d) 的计算值可能不够精确, 但还不会影响其物理概念, 它形象地证明了长波扰动的不稳定性及相位反转的性质。

取波数 $l = 20$ 进行了计算。我们发现, 对高波数扰动, 直到球壳聚焦后的较长一段时间内, 内外界面的扰动波形是同相位的, 并且内界面稳定性很好, 而外界面稳定性较差, 如图 3、图 4 所示。这个现象, 可从扰动方程的系数得到解释。当 l 较大时, 交叉耦合系数 G_{i4} 很小, 自生振动系数 G_{i2} 很大, 因此低波数馈通增长的三个演化阶段现在就不明显了, 而外扰动对内表面的馈通, 仅起诱导作用, 内外扰动的增长几乎按自身的振荡规律演化, 所以具有初始扰动幅度的外界面稳定性较差, 而内界面(无初始扰动)比较稳定。

球壳结构与相似的柱壳结构模型^[4]的馈通增长比较, 球壳的聚焦时间 (0.6ms) 较小, 聚焦半径 (7.7mm) 较大, 馈通增长比柱壳的发展慢些, 直到球壳聚焦, 内界面稳定性都较好, 基本保持球对称。

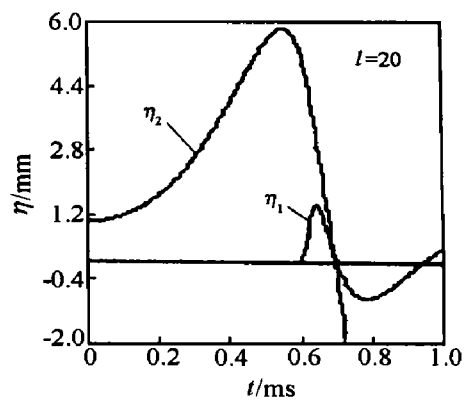


图 3 球壳 η 随时间的变化
Fig.3 Spherical shell η vs time

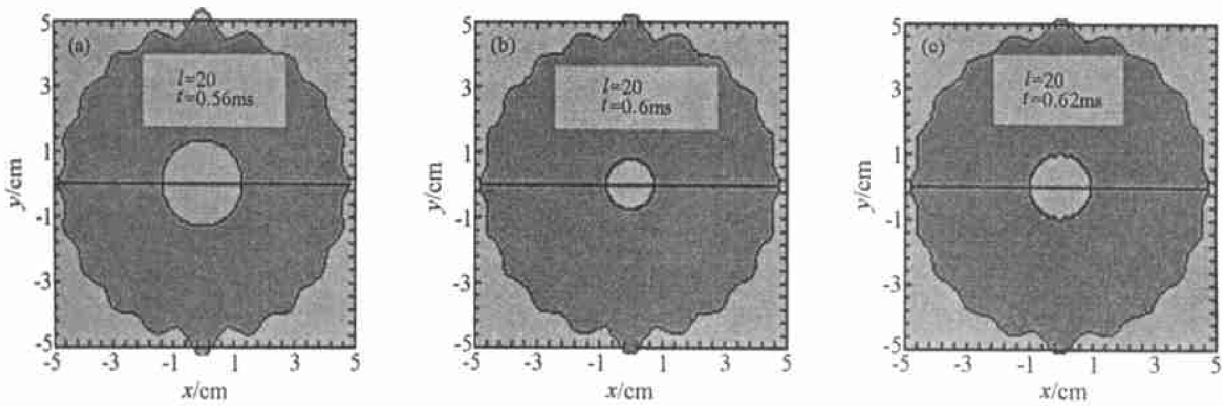


图 4 球壳轴截面的变形过程
Fig.4 Spherical shell deformation vs time

5 结束语

本文中建立的球壳结构的馈通增长方程及弹性球壳界面的运动方程, 能较好地模拟球壳馈通增长的 RT 不稳定性问题。计算结果表明, 低波数扰动的特点是: 外界面较稳定, 内界面的馈通扰动稳定性较差, 扰动增长有较明显的三个阶段以及波形反转现象。而高波数扰动的特点恰好与低波数相反。球壳比柱壳的界面的稳定性要好些。

参考文献:

- [1] Plesset M S. On the Stability of Fluid Flows with Spherical Symmetry[J] . J Appl Phys, 1954, 25(1): 96-98.
- [2] Mikaelian K O. Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov Instabilities and Mixing in Stratified Spherical Shells[J] . Phys Rev, 1990, A42(6): 3400-3420.
- [3] Weir S T, Chandler E A, Goodwin B T. Rayleigh-Taylor Instability Experiments Examining Feedthrough Growth in an Incompressible, Convergent Geometry[J] . Phys Rev Lett, 1998, 80(17): 3763-3766.
- [4] 林其文. 不可压结构聚合运动耦合增长的瑞利-泰勒不稳定性研究[J] . 爆炸与冲击, 2001, 21(1), 62-66.
LIN Qi-wen. Rayleigh-Taylor Instability of Feedthrough Growth in an Incompressible Convergent Geometry[J] . Explosion and Shock Waves, 2001, 21(1): 62-66.

Rayleigh-Taylor Instability of Feedthrough Growth in a Spherical Shell Geometry

LIN Qi-wen

(*Laboratory for Shock Wave and Detonation Physics Research,
Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang 621900, Sichuan, China*)

Abstract: Feedthrough perturbation growth equations in an incompressible spherical shell geometry were derived by small - amplitude perturbation analysis , and RT instability models on transparent gelatin spherical shell with initial perturbation on the outer surface were numerically calculated . This shell was imploded with high-pressure gases. The calculations show that in the low wave number band, the outer surface is stable , while the feedthrough growth on the inner surface is rapid , resulting in the observed phase inversion . The perturbation growth behavior in the high wave number band is opposite to that in the low wave number band. The interface stability of the spherical shell geometry is better than that of the cylinder.

Key words: spherical shell; convergent geometry; Rayleigh-Taylor instability; feedthrough growth; perturbation