

文章编号: 1001-1455(2003)01-0006-07

# 浅埋的圆柱形孔洞对 SH 波的散射与地震动\*

刘殿魁, 林 宏

(哈尔滨工程大学建筑工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 研究了浅埋的圆柱形孔洞对以任意方向入射的平面 SH 波的散射与地震动问题。利用复变函数和多极坐标方法构造了问题的位移解。当入射波的波长与圆孔的半径相比较小时, 地震动将受到较大的影响。影响地震动有三个主要参数: (1) SH 波的入射角  $\alpha_0$ ; (2) 入射波波数  $\eta$ , 即圆柱形孔洞的半径与入射波半波长之比; (3)  $h/R$ , 即圆柱形孔洞至表面的距离与圆孔半径之比。当  $\eta$  较大时, 地震动幅值变化激烈, 位移幅值可出现跳动和放大的现象。当  $h/R$  增大至 10~12 时, 位移幅值变化恢复至半空间的情况, 表明圆柱形孔洞的影响可被忽略。

关键词: 固体力学; SH 波散射; 地震动; 浅埋圆柱形孔洞; 多极坐标

中图分类号: O231; O347 国标学科代码: 130°15 文献标志码: A

## 1 引言

对强震时的地震加速度记录进行分析, 是地震工程学研究的重要问题之一。强震记录又与震源的类型、地震波传播的路径以及地面的几何形状有重要的关系。这些因素最终都将反映到记录中去, 而影响到对它们所进行的分析和工程应用<sup>[1-4]</sup>。

近 20 年来, 在地面几何形状对地震动影响的研究工作中, 已经积累了一定数量的研究成果, 例如研究了凹陷与凸起地形对地震动的影响。这些成果不但促进了强震记录研究与分析工作, 而且扩大了地震科学中关于大陆边缘上的表面波和不规则表面反射等方面的研究工作<sup>[1-2, 4-13]</sup>。

在本文中, 研究在地震波传播过程中, 当其接近地表面时, 平面 SH 型地震波对一个圆柱形孔洞的散射问题, 并确定其对地震动的影响。若将浅埋圆柱形孔洞视为“隐蔽地形”, 则问题可与凹陷、凸起地形研究归为一类, 属于地形影响范畴。因此本问题是一个具有理论意义和应用前景的研究工作。考虑到本文中处理的边界条件具有的一些特点, 可采用复变函数和多极坐标的方法, 来构造该问题的位移解。在理论上定量地说明了浅埋圆柱形孔洞, 即隐蔽“圆形地形”对地震动影响的一般性规律, 为深入研究地面运动提供参考资料。

## 2 问题的物理模型

研究浅埋的圆柱形孔洞对 SH 波的散射与地震动, 其物理模型可简化为一个含圆柱形孔洞的弹性半空间中 SH 波的入射问题, 如图 1 所示。R 为圆孔半径, h 为圆孔中心至地表面的距离。并假定半空间中的介质是弹性、各向同性和均匀的。而材料的性质由弹性剪切模量  $\mu$  和剪切波波速  $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$  表示。当  $x/R = \pm 1$  时, 其位置对应着圆柱形孔洞上左、右二个边缘诸点在水平面上的投影位置。x/R

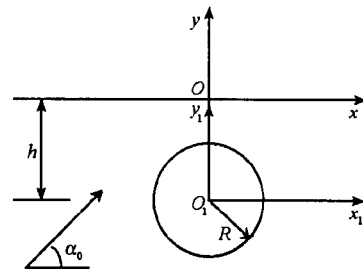


图 1 SH 波作用于浅埋圆形结构的模型  
Fig. 1 The shallow fill circular structure model impacted by incident SH-wave

\* 收稿日期: 2001-11-12; 修回日期: 2002-03-12  
基金项目: 国家自然科学基金项目(59578003)  
作者简介: 刘殿魁(1937—), 男, 硕士, 教授, 博士生导师。

$\langle 1$  和  $x/R \rangle 1$  则分别代表着圆柱形孔洞表面上及其外部诸点在水平界面上的投影位置。

### 3 控制方程

#### 3.1 控制方程

在各向同性、均匀的弹性介质中研究弹性波对圆柱形孔洞的散射问题, 最简单的模型就是反平面剪切运动的 SH 波模型。在  $xy$  平面内, SH 波所表示的位移  $W(x, y, t)$  垂直于  $xy$  平面, 且与  $z$  轴无关。对于稳态情况, 位移  $W(x, y, t)$  应满足运动方程<sup>[13-14]</sup>

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0 \quad (1)$$

式中:  $W$  为位移函数, 位移函数与时间的依赖关系为  $e^{-i\omega t}$  (以下讨论略去谐和因子  $e^{-i\omega t}$ )。  $k = \omega c_S$ ,  $\omega$  为位移  $W(x, y, t)$  的圆频率;  $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $\rho$  为弹性介质的质量密度。

应力与应变的关系为

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2)$$

引入复变量  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , 在复平面  $(z, \bar{z})$  上, 式(1)和式(2)可分别表示为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \quad (3)$$

和

$$\tau_{xz} = \mu \left[ \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right], \quad \tau_{yz} = \mu \left[ \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right] \quad (4)$$

而在极坐标系中, 应力表达式(4)为

$$\tau_{rz} = \mu \left[ \frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right], \quad \tau_{\theta z} = i\mu \left[ \frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right] \quad (5)$$

#### 3.2 浅埋圆柱形孔洞引起的散射波

如图 1 所示的浅埋圆柱形孔洞所激发的散射波  $W^{(s)}$ , 除要求满足方程(1)和无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件之外, 还要求它能满足半空间的自由表面上应力自由的条件。利用这样的散射波  $W^{(s)}$ , 再进一步满足圆孔周边上的边界条件, 即可得到问题的解答。

在复平面  $(z, \bar{z})$  上, 可利用 SH 波散射的对称性和多极坐标的方法来构造界面附近圆孔的散射波  $W^{(s)}$ 。它可以写成

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[ H_n^{(1)}(k |z + ih|) \left| \frac{z + ih}{|z + ih|} \right|^n + H_n^{(1)}(k |z - ih|) \left| \frac{z - ih}{|z - ih|} \right|^{-n} \right] \quad (6)$$

而在复平面  $(z_1, \bar{z}_1)$  上

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[ H_n^{(1)}(k |z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^n + H_n^{(1)}(k |z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-n} \right] \quad (7)$$

式中:  $H_n^{(1)}(\cdot)$  为第  $n$  阶的第一类 Hankel 函数,  $A_n$  为待定的未知函数。

在极坐标系中, 散射波  $W^{(s)}$  所激发的应力为

$$\tau_{rz}^{(s)} = \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[ H_{n-1}^{(1)}(k |z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{n-1} e^{i\theta_1} - H_{n+1}^{(1)}(k |z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{n+1} e^{-i\theta_1} + \left[ -H_{n+1}^{(1)}(k |z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-(n+1)} e^{i\theta_1} + H_{n-1}^{(1)}(k |z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-(n-1)} e^{-i\theta_1} \right] \right] \quad (8)$$

$$\tau_{\theta z}^{(s)} = i \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[ H_{n-1}^{(1)}(k |z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{n-1} e^{i\theta_1} + H_{n+1}^{(1)}(k |z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{n+1} e^{-i\theta_1} + \left[ -H_{n+1}^{(1)}(k |z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-(n+1)} e^{i\theta_1} - H_{n-1}^{(1)}(k |z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-(n-1)} e^{-i\theta_1} \right] \right] \quad (9)$$

## 4 问题的解答

### 4.1 入射波与反射波

在一个不含圆柱形孔洞的弹性半空间中, 一个稳态的 SH 波  $W^{(i)}$  入射, 则在界面上就会产生一个反射的 SH 波  $W^{(r)}$ , 在复平面  $(z_1, \bar{z}_1)$  上可以表达成

$$W^{(i)} = W_0 \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \quad (10)$$

$$W^{(r)} = W_0 \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{-i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \quad (11)$$

式中:  $W_0$  为入射波的波幅,  $\alpha_0$  为入射角。  $W^{(i)}$  与  $W^{(r)}$  所产生的应力为

$$\tau_{r_1 z}^{(i)} = i \tau_0 \cos(\theta_1 - \alpha_0) \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \quad (12)$$

$$\tau_{\theta_1 z}^{(i)} = -i \tau_0 \sin(\theta_1 - \alpha_0) \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \quad (13)$$

$$\tau_{r_1 z}^{(r)} = i \tau_0 \cos(\theta_1 + \alpha_0) \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{-i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \quad (14)$$

$$\tau_{\theta_1 z}^{(r)} = -i \tau_0 \sin(\theta_1 + \alpha_0) \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{-i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \quad (15)$$

式中:  $\tau_0 = \mu k W_0$ , 为入射波产生的最大应力。

### 4.2 问题的解答

如图 1, 在半空间中的入射波、反射波和圆孔激发的散射波可写成式(10)、(11)和式(7)的形式, 则半空间界面上应力自由的边界条件会自动满足。而在复平面  $(z_1, \bar{z}_1)$  上, 圆柱形孔洞周边上应力  $\tau_{r_1 z}^{(t)}$  要满足自由的边界条件, 即在  $|z_1| = R$  上, 有

$$\tau_{r_1 z}^{(t)} = \tau_{r_1 z}^{(i)} + \tau_{r_1 z}^{(r)} + \tau_{r_1 z}^{(s)} = 0 \quad (16)$$

将式(12)、(13)和式(8)代入式(16), 则有

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \zeta_n = \zeta \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \zeta_n = & \frac{k\mu}{2} \left[ \mathbf{H}_{n-1}^{(1)}(k|z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{n-1} e^{i\theta_1} - \mathbf{H}_{n+1}^{(1)}(k|z_1|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{n+1} e^{-i\theta_1} + \right. \\ & \left. - \mathbf{H}_{n+1}^{(1)}(k|z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-(n+1)} e^{i\theta_1} + \mathbf{H}_{n-1}^{(1)}(k|z_1 - 2ih|) \left| \frac{z_1 - 2ih}{|z_1 - 2ih|} \right|^{-(n-1)} e^{-i\theta_1} \right] \\ \zeta = & -i \tau_0 \cos(\theta_1 - \alpha_0) \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] - \\ & i \tau_0 \cos(\theta_1 + \alpha_0) \exp \left[ i \frac{k}{2} ((z_1 - ih) e^{i\alpha_0} + (\bar{z}_1 + ih) e^{-i\alpha_0}) e^{-i\omega t} \right] \end{aligned}$$

用  $e^{-im\theta_1}$  乘方程(17)的两边, 并在区间  $(-\pi, \pi)$  上积分, 则得决定  $A_n$  的无穷代数方程组

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta_{m-n} = \zeta_m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

式中

$$\zeta_{m-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_m e^{-im\theta_1} d\theta_1, \quad \zeta_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta e^{-im\theta_1} d\theta_1$$

### 4.3 地面位移幅值

研究浅埋圆柱形孔洞对 SH 波散射对地震动的影响, 就要求给出水平面上任一观察点上地震动变化与 SH 波的波数和入射角  $\alpha_0$  的关系。对稳态 SH 波而言, 如果求得了观察点处的位移, 即可求出该点的加速度, 这对地震工程是至关重要的。

由于入射 SH 波的作用, 半空间中的总波场可写成

$$W^{(t)} = W^{(i)} + W^{(r)} + W^{(s)} \tag{19}$$

或

$$W^{(t)} = |W^{(t)}| e^{i(\omega t - \phi)} \tag{20}$$

式中： $|W^{(t)}|$  为位移幅值；而  $\phi$  为  $W^{(t)}$  的相位，同时有

$$\phi = \arctan \frac{\text{Im } W^{(t)}}{\text{Re } W^{(t)}} \tag{21}$$

而入射波的频率  $\omega$  可与圆柱形孔洞的半径组合成为一个入射波波数<sup>[4]</sup>，即入射波波数为

$$kR = \frac{\omega R}{c_s} \tag{22}$$

或

$$kR = \frac{2\pi R}{\lambda} \tag{23}$$

式中： $\lambda$  为入射波的波长，或写成

$$\eta = \frac{2R}{\lambda} \tag{24}$$

### 5 算例及结果分析

图 2 ~ 图 4 给出了具有不同波数  $\eta$  的入射 SH 波，以不同的入射角  $\alpha_0$  对埋深为  $h$ 、孔径为  $R$  的圆柱形孔洞入射时，水平面上位移幅值  $|W^{(t)}|$  的变化。

图 2 表示当  $\eta=0.1, 0.25, 0.75, 1.25, h/R=1.1$ ，SH 波以不同入射角  $\alpha_0$  入射时，在水平面上位移幅值的变化。这相当于研究一个浅埋的圆柱形孔洞对地面位移的影响。 $\eta=0.1$  相当于低频、准静态情

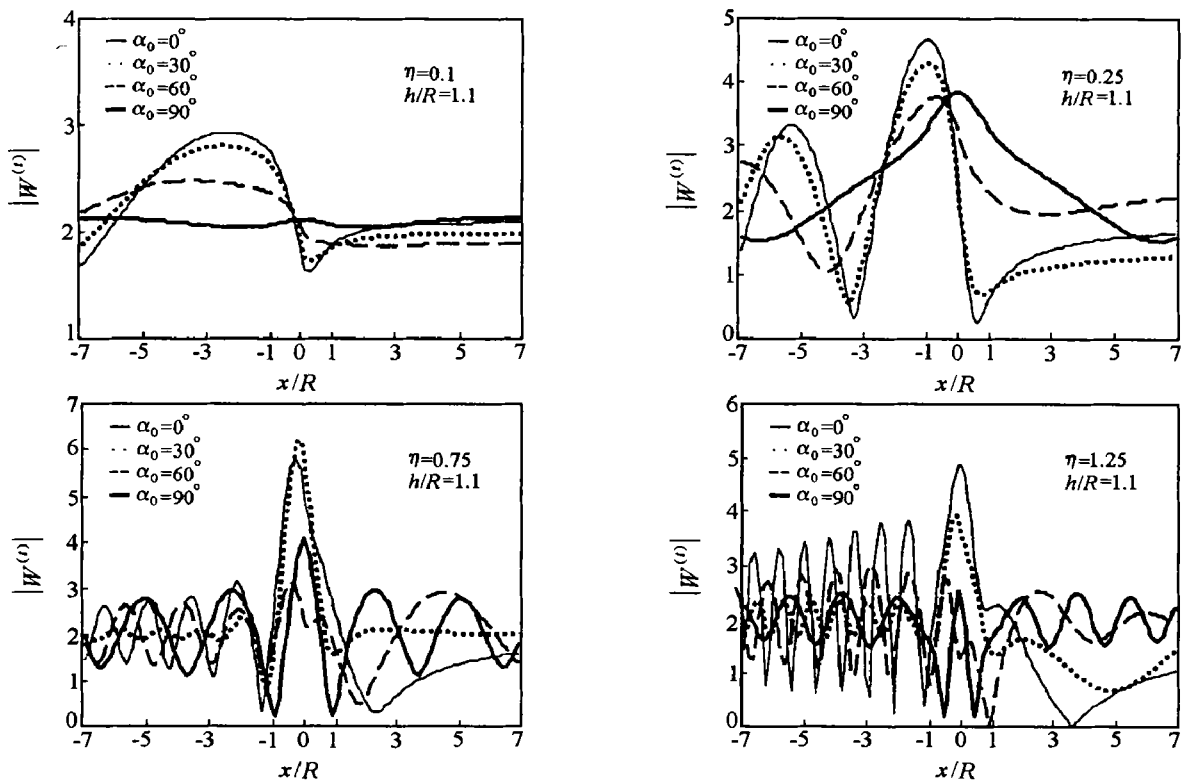


图 2 水平地表面的位移幅值随位移的变化 ( $h/R=1.1$ )

Fig.2 The amplitudes of the interface of half space with distance

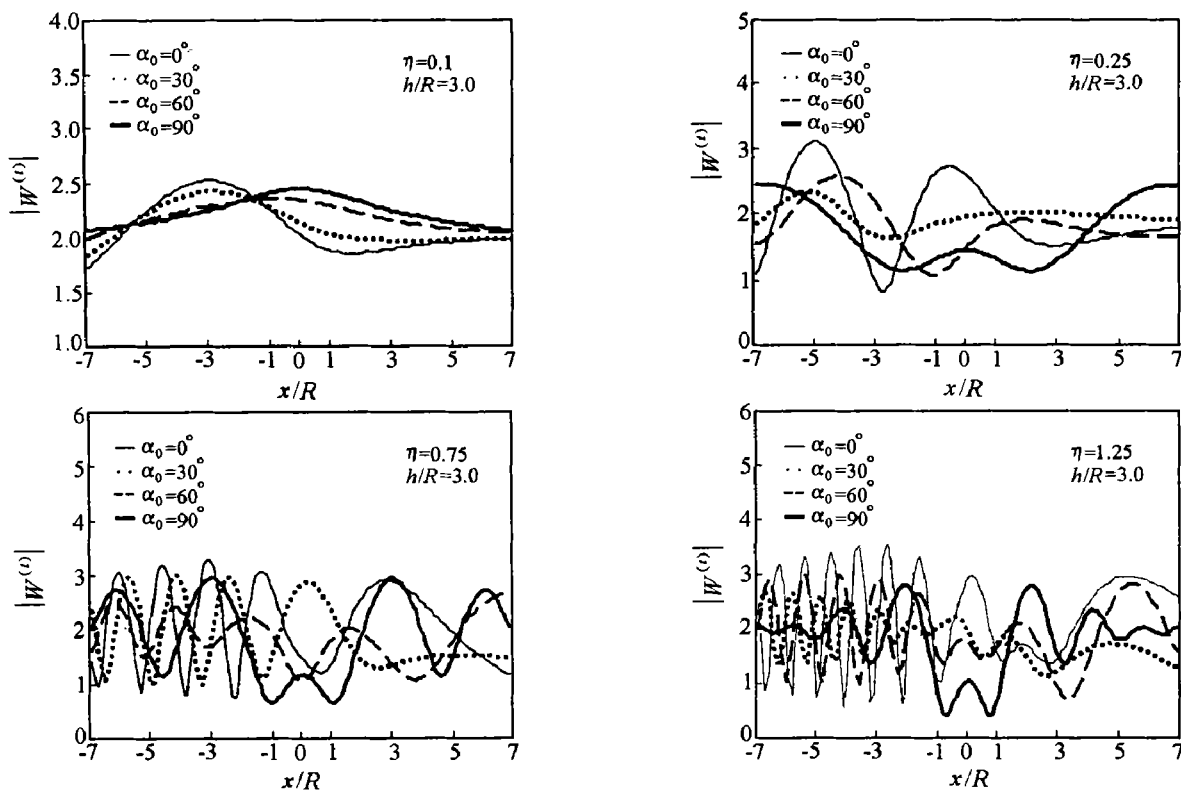


图 3 水平地表面的位移幅值随位移的变化 ( $h/R=3.0$ )

Fig.3 The amplitudes of the interface of half space with distance

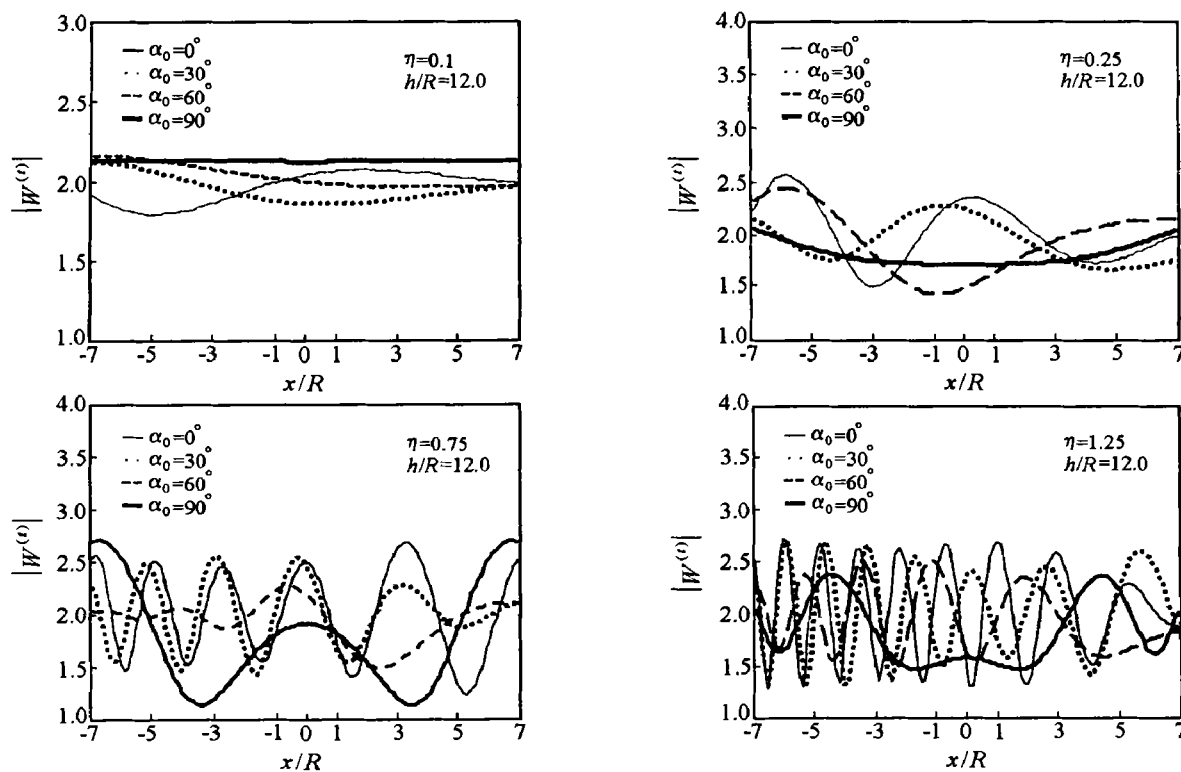


图 4 水平地表面的位移幅值随位移的变化 ( $h/R=12.0$ )

Fig.4 The amplitudes of the interface of half space with distance

况,地面左边的位移幅值有所提高,大约可达 3 左右,与无孔时地表位置量 2 相比,提高了 50%。而地面右边的位移幅值变化不大,趋近于 2。当  $\eta=0.25, 0.75, 1.25$  时,地面位移幅值与无圆孔的位移幅值相比,都会增加,最大值可以超过 4(当  $\eta=0.25$  时),提高二倍以上,而且均发生在  $-1 < h/R < 1$  这一区段附近。这表明地下浅埋的圆柱形孔洞对地面运动的影响与凹陷地形一样<sup>[4-6]</sup>,同样是重要的。

图 3 表示当  $\eta=0.1, 0.25, 0.75, 1.25, h/R=3.0$ , SH 波以不同入射角  $\alpha_0$  入射时,在水平面上位移幅值的变化。图 3 表明,随着  $h/R$  的增大,虽然地面位移幅值的增幅有所减小,但其影响仍不可忽视,与无孔洞的情况相比,仍可提高 1 倍左右,幅值高达 3.5~4。

图 4 给出了当  $\eta=0.1, 0.25, 0.75, 1.25, h/R=12.0$ , SH 波以不同入射角  $\alpha_0$  入射时,在水平面上位移幅值的变化。图 4 表明,此时的地面位移幅值变化平稳,幅值波动的最大量在 0.5 范围内,平均幅值接近于 2,相当于不考虑圆柱形孔洞影响的半无限空间的情况。这说明当  $h/R > 12.0$  时,可近似按不计圆柱形孔洞影响,用一个完整的半空间模型来计算,并认定它为“深埋”情况。但是,从圆柱形孔洞散射波表达式(6)可知,位移幅值按  $1/\sqrt{r}$  关系衰减,极为缓慢。大致在  $h/R > 200 \sim 250$  时,圆柱形孔洞对位移幅值的影响才能接近完全消除<sup>[13]</sup>,成为真正意义上的“深埋”圆柱形孔洞的情况。

### 参考文献:

- [1] 廖振鹏. 工程波动理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [2] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 北京: 地震出版社, 1998.
- [3] 胡聿贤, 周锡元. 地震工程跨世纪发展趋势[J]. 工程抗震, 1999(1): 3-9.  
HU Yi-xian, ZHOU Xi-yuan. Proceeding of earthquake engineering span century [J]. Engineering Precautions Against Earthquake, 1999(1): 3-9.
- [4] Trifunac M D. Scattering of plane SH-waves by a semi-cylindrical canyon[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1973(1): 267-281.
- [5] LIU Dian-kui, HAN Feng. Scattering of plane SH-waves by cylindrical canyon of arbitrary shape in anisotropic media [J]. Acta Mechanica Sinica, 1990, 6(3): 256-260.
- [6] LIU Dian-kui, HAN Feng. Scattering of plane SH-waves by a cylindrical canyon of arbitrary shape[J]. Int J Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 1991, 10(5): 249-255.
- [7] YUAN Xiao-ming, MEN Fu-lu. Scattering of plane SH-waves by a semi-cylindrical hill[J]. Earthq Eng and Struct Dynamics, 1992, 21: 1091-1098.
- [8] 崔志刚, 曹新荣, 刘殿魁. SH 波对半圆形凸起地形的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1998, 18(1): 140-146.  
CUI Zhi-gang, CAO Xin-rong, LIU Dian-kui. Scattering of SH-waves by semi-cylindrical hill[J]. Earthquake Eng and Engi Vibration, 1998, 18(1): 140-146.
- [9] 袁晓铭, 廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1996, 16(2): 1-13.  
YUAN Xiao-ming, LIAO Zhen-peng. Scattering of plane SH-waves by a semi-cylindrical hill of arbitrary shapes[J]. Earthquake Eng and Engi Vibration, 1996, 16(2): 1-13.
- [10] 刘殿魁, 刘宏伟. 曲线坐标在弹性波散射研究中的应用——SH 波对不等深度凹陷地形的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1996, 16(2): 14-24.  
LIU Dian-kui, LIU Hong-wei. The Application of curve coordinate to scattering of elastic waves[J]. Earthquake Eng and Engi Vibration, 1996, 16(2): 14-24.
- [11] 刘殿魁, 刘宏伟. P 波对具有不等深凹陷地形散射[J]. 固体力学学报, 1997, 18(4).  
LIU Dian-kui, LIU Hong-wei. Scattering of P-waves by canyons with variable depth-to-width ratio[J]. Acta Mechanica Solid Sinica, 1997, 18(4).
- [12] 刘殿魁, 曹新荣, 崔志刚. 多个半圆形凸起地形对平面 SH 波散射[J]. 固体力学学报, 1998, 19(4): 178-185.  
LIU Dian-kui, CAO Xin-rong, CUI Zhi-gang. Scattering of SH-waves by semi-cylindrical hills[J]. Acta Mechanica Solid Sinica, 1998, 19(4): 178-185.
- [13] 刘殿魁, 许贻燕. 各向异性介质中 SH 波与多个半圆形凹陷地形的相互作用[J]. 力学学报, 1993, 25(1): 93-102.  
LIU Dian-kui, XU Yi-yan. Interaction multiple semi-cylindrical canyons by plane SH-wave in anisotropic media[J]. Acta Mechanica Sinica, 1993, 25(1): 93-102.
- [14] 黎在良, 刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

## Scattering of SH-waves by a shallow buried cylindrical cavity and the ground motion

LIU Dian-kui, LIN Hong

(*Civil Engineering College, Harbin Engineering University,  
Harbin 150001, Heilongjiang, China*)

**Abstract:** The problem of scattering of SH-waves by a buried cylindrical cavity and the ground motion is investigated at arbitrary incident angle in this paper. The displacement solution is constructed by applying the methods of complex function and multi-polar coordinates system. When wavelength of the incident wave is smaller compared with radius of the cylindrical cavity, the ground motion will be influenced greatly. There are three main factors that influence the ground motion. The first one is incident angle  $\alpha_0$ , the second one is incident wave number  $\eta$ , i.e. the ratio of radius of the cylindrical cavity to the half wavelength of incident wave, and the last one is  $h/R$ , that is the ratio of the distance of the center of the cylindrical cavity from the horizontal interface to the radius of the cylindrical cavity. When  $\eta$  is larger, the amplitude of the ground motion varies fiercely and sometimes will leap and enlarge sharply. If the value of  $h/R$  increases to 10 ~ 12, the variation of amplitude of the displacement recovers to that of half space, which shows that the influence of cylindrical cavity can be ignored.

**Key words:** solid mechanics; scattering of SH-waves; ground motion; shallow buried cylindrical cavity; multi-polar coordinates