

文章编号: 1001-1455(2003)01-0019-06

界面不稳定性的自适应欧拉数值计算*

柏劲松, 陈森华, 钟 敏

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621900)

摘要: 采用欧拉网格自适应算法数值模拟 Richtmyer-Meshkov 和 Rayleigh-Taylor 不稳定多介质流界面, 获得了高精度界面特征。对不同流体引入不同位标函数跟踪界面运动, 将位标函数方程与流体动力学方程耦合求解, 在笛卡儿坐标系中运用二阶精度有限体积算法, 保持流场守恒条件下, 通过采用多层网格级对笛卡儿网格嵌套细化, 从而实现多介质流体界面的高精度自适应跟踪。给出的方法逻辑简单, 可以大大节省 CPU 时间。

关键词: 爆炸力学; 多介质流; 自适应网格; 界面不稳定性

中图分类号: O354.5; O241.82 国标学科代码: 130°3520 文献标志码: A

1 引言

数值计算是研究非线性界面不稳定性发展的重要工具。Richtmyer-Meshkov 不稳定性就是首先由数值研究给出, 然后再经过实验证实的。非线性阶段中一些现象的阐明, 往往要借助于数值计算。用数值方法计算非线性界面不稳定性问题需要注意的是: (1) 要避免因计算方法的处理不当给有关问题的计算结果带来的歪曲; (2) 非线性界面不稳定性发展到后期, 界面会出现大的扭曲, 通常采用欧拉方法来描述界面大变形、扭曲甚至尖钉破裂和脱落, 只是需要很好地处理物质界面的计算, 而拉格朗日方法则不太适合。

在数值计算大变形一类问题的欧拉算法中, 介质界面的计算方法比较多, 如典型的流体网格方法^[1], HELP 程序中的示踪粒子界面跟踪方法^[2], YOUNGS 方法^[3], 以及近年发展起来的 LS (LEVEL SET) 方法^[4]等。本文在多介质流体非守恒律欧拉方程组的算法基础上^[5], 引入位标函数跟踪界面运动, 将位标函数方程与流体动力学方程组耦合求解, 采用二阶精度非维数分裂有限体积离散格式, 以位标函数为自适应判据, 采用自适应网格高精度计算物质界面。该方法不仅弥补了欧拉方法计算物质界面精度较低的缺点, 可以使物质界面达到较高的计算精度, 而且只是在细化网格区域采用小时间步长, 因此能够大大节省 CPU 时间, 同时还能够对局部参数急剧变化流场(如激波)进行自适应跟踪, 提高其分辨率。本文的自适应网格细化(Adaptive Mesh Refinement, 简称 AMR)算法运用点类聚和网格产生方法^[6], 将需细化的标志网格分成若干矩形子片区, 在每一个子片区内网格自动产生或融合, 在整个过程中物理量在粗细网格界面附近始终保持守恒。文中给出了几个典型的二维数值算例及其与统一网格计算结果的比较。

2 基本控制方程及其有限体积差分格式

对于大多数气体、液体和用冲击 Hugoniot 曲线描述的弹性密实介质, 可以采用“Stiffen gas”状态方程来描述这一类物质性质, 在混合单元中, 采用压力平衡速度一致假定。其二维无粘性、无热传导多介质流场非守恒律方程组为^[5]

* 收稿日期: 2001-10-03; 修回日期: 2002-07-04

作者简介: 柏劲松(1968—), 男, 博士研究生, 工程师。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \rho f_x \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = \rho f_y \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho E + p)u) + \frac{\partial}{\partial y}((\rho E + p)v) = \rho(uf_x + vf_y) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right) + u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\gamma-1}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right) + u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: ρ 、 u 、 v 、 p 分别表示密度、 x 方向的速度分量、 y 方向的速度分量和压力, f_x 、 f_y 分别表示质量力在 x 、 y 方向上的分量(对于 Richtmyer-Meshkov 界面不稳定性, f_x 、 f_y 均为零), E 表示单位质量的总能量, 若用 e 表示比内能, 则“Stiffen gas”状态方程表示为

$$\rho e = (p + \gamma\pi)/(\gamma - 1) \quad (2)$$

式中: $E = e + u^2/2$, γ 为比热比($\gamma > 1$), π 为具有粘性张量量纲的材料常数, γ 和 π 在边界附近为连续可微函数, 在区域内部为该种物质的状态方程参数。

方程组(1)采用 γ 和 π 描述多物质界面, 但是更一般、更广泛的自适应界面位置跟踪可引入位标函数方法, 即不同物质采用不同的位标 ψ 进行跟踪

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{D} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (3)$$

式中: $\mathbf{D} = (u, v)$, 将式(3)与式(1)耦合求解, 通过 $\nabla \psi$ 细化界面附近网格, 得到高精度界面位置。

将方程(1)、(3)写成拟线性矢量方程组形式为

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

式中: \mathbf{q} 为矢量, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为系数矩阵, 按特征值为正和负可以分别将矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 分成两个对应的矩阵 \mathbf{A}^+ 、 \mathbf{A}^- 和 \mathbf{B}^+ 、 \mathbf{B}^- , 显然 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-$ 。对于多介质流场 Euler 非守恒控制方程组(4), 其有限体积差分格式可以写成

$$\mathbf{q}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{q}_{i,j}^n + \Delta t_{i,j}^n - (\Delta t/\Delta x)(\mathbf{F}_{i+1,j}^n - \mathbf{F}_{i,j}^n) - (\Delta t/\Delta y)(\mathbf{G}_{i,j+1}^n - \mathbf{G}_{i,j}^n) \quad (5)$$

式中: $\mathbf{F}_{i,j}^n$ 、 $\mathbf{G}_{i,j}^n$ 分别为 x 、 y 方向流量的二阶修正项, 具体表达式见文献[7], $\Delta t_{i,j}^n$ 为 Godunov 型迎风计算格式, 其形式为

$$\Delta t_{i,j}^n = -(\Delta t/\Delta x)(\mathbf{A}^+ \Delta \mathbf{q}_{i,j} + \mathbf{A}^- \Delta \mathbf{q}_{i+1,j}) - (\Delta t/\Delta y)(\mathbf{B}^+ \Delta \mathbf{q}_{i,j} + \mathbf{B}^- \Delta \mathbf{q}_{i,j+1}) \quad (6)$$

3 自适应笛卡儿网格细化算法

自适应网格细化算法一般包括以下五个步骤: (1)误差计算。采用 Richardson 插值方法计算解的截断误差, 判断在当前网格下解是否满足给定的精度要求。(2)网格产生。运用网格点类聚方法, 将细化网格点分成若干矩形片区。(3)数据结构管理。对每一个矩形片区内的数据进行处理。(4)插值计算。对新产生的细网格赋初值, 为其积分计算提供边界条件。(5)流量校正。修正粗网格与其周围邻近细网格的值, 使得在粗细网格更替时流场保持守恒。这里主要对网格产生算法和流量校正进行讨论。

3.1 自适应网格产生算法

自适应网格产生算法在文献[6]中有详细叙述, 这里以二维情况为例, 采用一种比较有效的方法, 即“快速对分”方法(“Smart Bisection”), 如图 1 所示, 经过 3 步计算就可以产生满足要求的细化网格分区。在每一个片区内, 自适应网格细化算法使用若干级可嵌套的笛卡儿网格进行求解, 直到解的计算精度满足要求时为止。通常最粗的网格级取为 1(即 level=1), 第一级细化网格级为 2(即 level=2), 等等。根据不同的网格细化比率 r , 在同一网格级上产生的细网格数量不相同, 对于二维情况, 在网格级为 2 时“子网格”数为 r^2 个(如图 2 四种情况), 此时计算时间和空间步长变为 $\Delta t/r$ 和 $\Delta x/r$ 、 $\Delta y/r$ (这里 Δt

和 Δ_x, Δ_y 为上一级网格的计算时间和空间步长)。

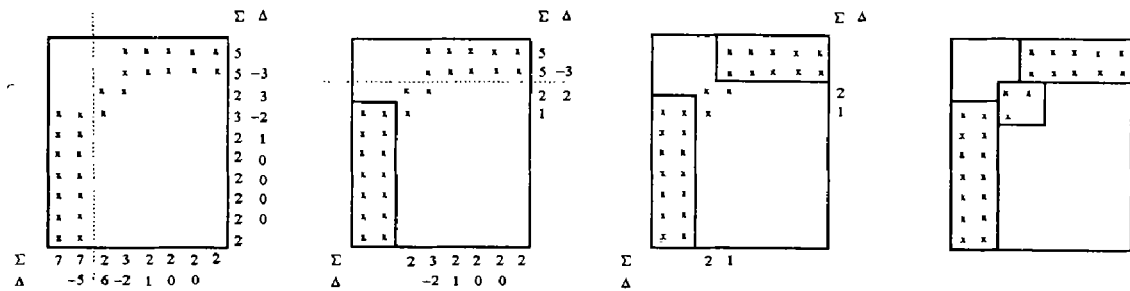


图 1 “快速对分”方法
Fig. 1 Bisection method

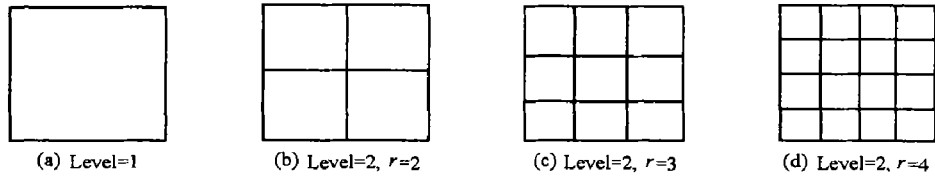


图 2 细网格划分示例
Fig. 2 Several examples for mesh refinement

3.2 多介质流中粗细网格界面处物理量守恒的校正算法

在多介质流的自适应算法中, 差分格式 (5) 在粗细网格更替时不仅要保持一致性, 同时还要使物理量在整个流场中保持守恒性, 因此必须对粗细网格界面处流量一阶项 $\mathbf{A}^- \Delta q_i + \mathbf{A}^+ \Delta q_i$ 和二阶修正项 $\mathbf{F}_{i,j}^n, \mathbf{G}_{i,j}^n$ 进行校正。

3.2.1 粗细网格界面处物理量守恒对 $\mathbf{F}_{i,j}^n, \mathbf{G}_{i,j}^n$ 的校正算法

这里首先给出物理量在粗细网格界面处保持守恒时流量的二阶修正项 $\mathbf{F}_{i,j}^n, \mathbf{G}_{i,j}^n$ 的校正算法。由于在一维、二维计算中粗细网格界面处流量守恒校正算法相同, 因此本文以一维情况对流量项 F_i^n 的校正为例来进行说明。

考虑一维多介质流中网格级和网格细化比率为 2 的简单情形, 如图 2 (b)。设粗网格空间、时间步长分别为 $\Delta x, \Delta t$, 粗网格级数为 1, 则细化网格时间和空间步长分别为 $\Delta \hat{t} = \Delta t / 2$ 和 $\Delta \hat{x} = \Delta x / 2$, 细网格级数为 2。图 3 (a) 表示 $x-t$ 平面上粗网格单个时间步长情况, 图 3 (b) 表示 $x-t$ 平面上细网格部分覆盖粗网格的情况。

在粗网格区域 (包括被细网格覆盖的区域和未被细网格覆盖的区域两部分), 用 q_i^n 表示粗网格上的物理量, 用 F_i^n 表示 t_n 时刻粗网格 i 和 $i-1$ 界面上的流量, 下标 i 表示粗网格编号, 下标 l 表示与细网格相邻的粗网格编号, 上标 n 表示 t_n 时刻, 上标 $n+1$ 表示 $t_n + \Delta t$ 时刻 (如图 3 (a))。采用流量差分算法计算 $t_n + \Delta t$ 时刻粗网格值 q_i^{n+1} 为

$$q_i^{n+1} = q_i^n - (\Delta t / \Delta x) (F_{i+1}^n - F_i^n) \tag{7}$$

在细网格区域, \hat{q}_m 表示细网格上的物理量, 各个界面的流量用 F 表示, 下标 m 为细网格编号, M 为细网格数量, 上标 n 表示 t_n 时刻, 上标 $n+1$ 表示 $t_n + \Delta \hat{t}$ 时刻, 上标 $n+2$ 表示 $t_n + 2\Delta \hat{t}$ 时刻 (如图 3 (b))。对于 $r=2$ 时计算一个粗网格时间步长需经过两个细网格时间步长, 采用流量差分算法计算细网格值 q_m^{n+1} 和 q_m^{n+2} 为

$$\begin{cases} q_m^{n+1} = q_m^n - (\Delta t / \Delta x)(F_{m+1}^n - F_m^n) \\ q_m^{n+2} = q_m^{n+1} - (\Delta t / \Delta x)(F_{m+1}^{n+1} - F_m^{n+1}) \end{cases} \quad (8)$$

式中: $m \leq M$ 。(8)式中为了计算细网格区域右边界的流量, 需要利用幻影网格来计算(图 3(c)), 幻影网格的值可以通过在粗网格值 q_i^n, q_i^{n+1} 的时间、空间插值计算得到。在细网格覆盖粗网格的区域 ($i \leq I-1$), 粗网格值用 q_i^{n+1} 相邻的两个细网格值代替

$$q_i^{n+1} = (q_{i-1}^{n+2} + q_{i+1}^{n+2})/2 \quad i \leq I-1 \quad (9)$$

(9)式的处理方法, 可以确保在细网格覆盖粗网格时物理量的守恒性, 同时能够保证当细网格被粗网格取代时细网格的全部信息进入粗网格, 确保计算格式的稳定。

自适应网格细化算法中为了使整个流场守恒, 在(9)式计算与细网格相邻的粗网格 I 的 q_i^{n+1} 值时, 用到的 I 网格左边界流量 F_I^n 必须与相邻细网格的值所确定的流量一致, 即用 $(F_{M+1}^n + F_{M+1}^{n+1})/2$ 代替 F_I^n , 因此在 $t_n + \Delta t$ 时刻粗网格 I 的值 q_i^{n+1} 需要通过这二者进行校正

$$q_i^{n+1} := q_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} ((F_{M+1}^n + F_{M+1}^{n+1})/2 - F_I^n) \quad (10)$$

式中: “:=”表示对它前面的内存变量赋值。

3.2.2 粗细网格界面处物理量守恒对 $A^- \Delta q_i + A^+$

Δq_i 的校正算法

这里讨论一维情况, 即 x 方向 $A^- \Delta q_i + A^+ \Delta q_i$ 的校正算法, y 方向校正算法与 x 方向相同。对于非守恒律方程组, 由于 $A^- \Delta q_i + A^+ \Delta q_i$ 不能写成流量差分形式, 因此不能采用式(10)来进行校正。

自适应多介质流计算中, 在粗网格和细网格区域分别将流场各物理量分段线性化, 通过求解 Riemann 问题来获得向左传播的波 $A^- \Delta q_i$ 和向右传播的波 $A^+ \Delta q_i$ 。但是为了保证整个流场守恒, 在粗细网格界面处需要对粗网格 I 的值 q_i^{n+1} 进行校正, 即在 q_i^{n+1} 中增加由于网格细化形成的多步间断引起的亏损。对于网格细化比率为 2 的情况(如图 4), 经过两步就可以实现对 q_i^{n+1} 的校正。

第一步, 从 $t_n \rightarrow t_n + \Delta t$, 在粗细网格界面处求解由细网格边界幻影网格 $M+1$ 和与之相交的粗网格 I 构成的 Riemann 问题, 其初值为 q_{M+1}^n 和 q_i^n , 时间步长为 Δt , 空间步长为 Δx , 将 Riemann 问题计算结果 $A^- \Delta q^n + A^+ \Delta q^n$ 增加到 q_i^{n+1} 中

$$q_i^{n+1} := q_i^{n+1} + (\Delta t / \Delta x)(A^- \Delta q_0 + A^+ \Delta q_0) \quad \Delta q_0 = q_i^n - q_{M+1}^n \quad (11)$$

第二步, 从 $t_n + \Delta t \rightarrow t_n + 2\Delta t$, 求解由 q_{M+1}^{n+1} 和 q_i^{n+1} 构成的 Riemann 问题, 校正 q_i^{n+1} 为

$$q_i^{n+1} := q_i^{n+1} + (\Delta t / \Delta x)(A^- \Delta q_1 + A^+ \Delta q_1) \quad \Delta q_1 = q_i^{n+1} - q_{M+1}^{n+1} \quad (12)$$

如果网格细化比率为 r , 则 q_i^{n+1} 的校正为 r 步校正之和, 第 r 步校正为

$$q_i^{n+1} := q_i^{n+1} + (\Delta t / \Delta x)(A^- \Delta q_{r-1} + A^+ \Delta q_{r-1}) \quad \Delta q_{r-1} = q_i^{n+1} - q_{M+1}^{r-1} \quad (13)$$

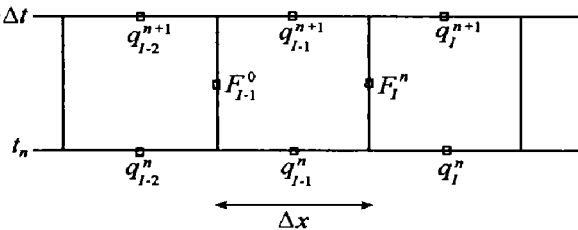


图 3(a) $x-t$ 平面上粗网格情况

Fig. 3(a) Coarse grid on the $x-t$ plane

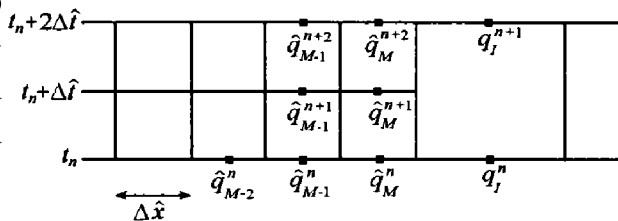


图 3(b) $x-t$ 平面上细网格部分覆盖粗网格情况

Fig. 3(b) Fine grid is overlaid by coarse on the $x-t$ plane

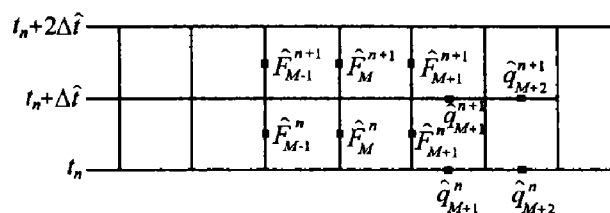


图 3(c) $x-t$ 平面上粗细网格界面情况

Fig. 3(c) The grid interface between fine and coarse grid on the $x-t$ plane

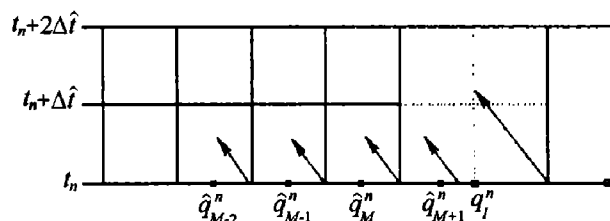


图 4 粗细网格界面处流量校正算法

Fig. 4 Correction algorithm for the flux between fine and coarse grid interface

4 数值算例

4.1 Richtmyer-Meshkov 不稳定性多介质流界面自适应跟踪

当激波在非线性物质表面上折射时, 物质界面获得一个有限加速度, 该界面上的扰动发展形成 Richtmyer-Meshkov 界面不稳定性。考虑气液两相流 Richtmyer-Meshkov 界面不稳定性问题, 设计算区域高度和宽度分别为 1 和 4, 两种不同流体初始时刻界面处扰动为

$$x = x_0 + A \cos(\omega k(y - y_0)) \quad x \in [0, 4], y \in [0, 1] \quad (14)$$

式中: 计算时取 $x_0=3.2, y_0=0.5, \omega=6.283, k=1, A=0.1$ 。两种流体初始计算参数取自文献[5-6], 从左到右为

$$(\rho, u, v, p, \gamma, \pi, \psi)_L = (1, 0, 0, 1, 1.4, 0, 2)$$

$$(\rho, u, v, p, \gamma, \pi, \psi)_M = (5, 0, 0, 1, 1.4, 1, 1)$$

$$(\rho, u, v, p, \gamma, \pi, \psi)_R = (7.093, -0.7288, 0, 10, 4, 1, 1)$$

右边液体中冲击波马赫数为 1.95, 界面位置为 3.325。采用自适应计算, 最大网格级为 3, 其中第一级网格为 50×200 , 第二、三级网格级数均为 2; 采用 200×800 的均匀网格计算, 可以获得与自适应计算相同的界面精度。计算至 $t=2$ 时刻, CPU 时间(奔四 1.5G 工作站)前者为 4297s, 后者为 33406s(约为前者的 7.8 倍)。计算给出 $t=1.8$ 时刻界面梯度 $\nabla\psi > 0$ 分布区域(界面位置)如图 5 所示。

4.2 Rayleigh-Taylor 不稳定性可压缩多介质流复杂界面跟踪

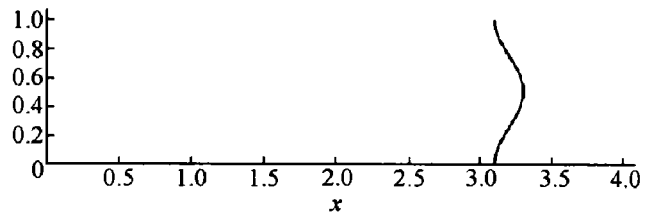
非线性界面隔离两种不同的可压缩流体, 当加速度方向由密度小的流体指向密度大的流体时, 就会出现 Rayleigh-Taylor 界面不稳定性现象。该算例假设非线性界面形状为

$$R(\theta) = R_0 + A \cos(\omega\theta) \quad (15)$$

式中: $\theta = \arctan(y/x), x \in [0, 0.9], y \in [0, 0.9], R_0=0.6, A=0.01, \omega=20$ 。初始时刻流体静止, 界面两边压力连续, 密度 ρ, γ, π, ψ 有间断, 其分布为

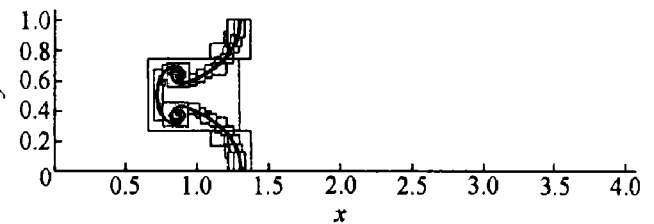
$$(\rho, \gamma, \pi, \psi) = \begin{cases} (0.5e^{-3R'}, 1.4, 0.0, 1.0) & 0 \leq R' \leq R(\theta) \\ ((0.5e^{-3R(\theta)} + 0.1)^{-6(R'-R(\theta))}, & \\ 1.8, 1.0, 2.0) & R' \geq R(\theta) \end{cases} \quad (16)$$

计算区域内的流体均受到向心质量力作用。在 $t > 0$ 时, 两种流体的界面出现 Rayleigh-Taylor 界面不稳定性现象, 计算至 $t=1.2$ 时刻, 给出该时刻界面梯度 $\nabla\psi > 0$ 分布区域(界面位置)如图 6 所示。其中采用三级自适应网格计算, 第一级网格为 90×90 , 第二、三级网格级数均为 2, 计算至 $t=1.2$ 时刻所用 CPU 时间为 5411s; 采用 360×360 的均匀网格计算, 所用 CPU 时间为 40856s(约为前者的 7.6 倍)。



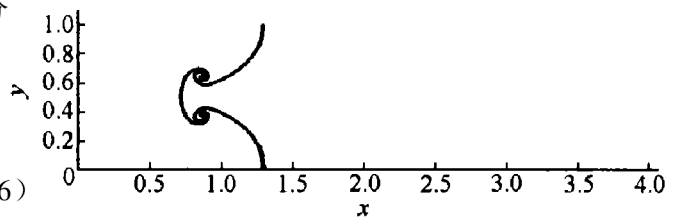
(a) $t=0$ 时刻界面的位置

(a) Interface positions at $t=0$



(b) $t=1.8$ 时刻三级自适应网格计算结果

(b) Three levels AMR grid result at $t=1.8$



(c) $t=1.8$ 时刻 200×800 均匀网格计算结果

(c) Uniform grid 200×800 result at $t=1.8$

图 5 Richtmyer-Meshkov 不稳定性多介质流界面梯度 $\nabla\psi > 0$ 分布区域

Fig. 5 Distribution of the interface region $\nabla\psi > 0$ in Richtmyer-Meshkov multi-fluid problem

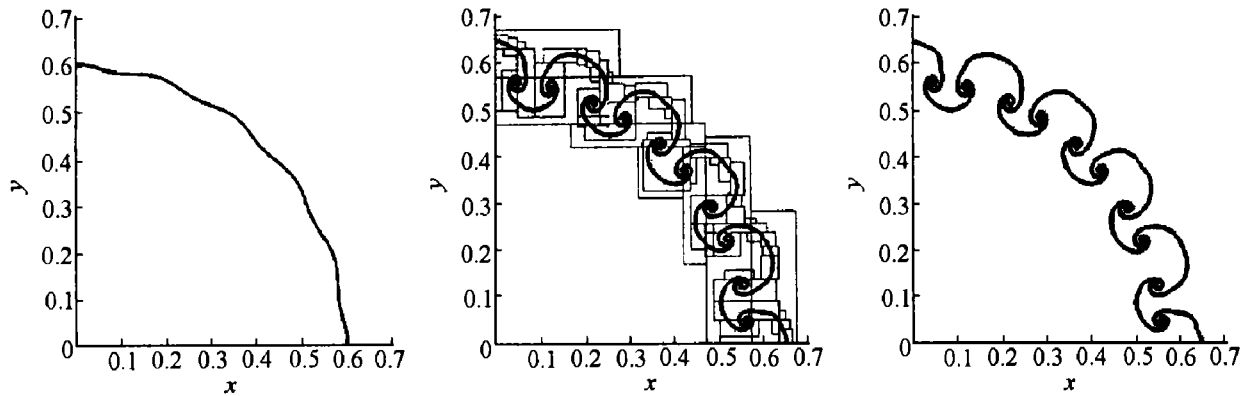


图 6 Rayleigh-Taylor 不稳定性多介质流界面梯度 $\nabla\psi > 0$ 的分布区域

Fig. 6 Distribution of the interface region $\nabla\psi > 0$ in Rayleigh-Taylor multi-fluid problem

参考文献:

- [1] Amsden A A. The particle-in-cell method for calculation of the dynamics of compressible fluids[R]. LA-3466. Los Alamos, UAS; Los Alamos Sci Lab, 1966.
- [2] Hageman L J, Wilkins D E, Sedgwick R T, et al. A multi-material eulerian program for compressible fluid and elastic-plastic flow in the two space dimensions and time[R]. SSS-R-75-2654, 1975.
- [3] Youngs D L, Time dependent multi-material flow with large fluid distortion[A]. Morton K W, Baines M J. Numerical Methods for Fluid Dynamics[M], 1982:277-285.
- [4] Karni S. Multicomponent flow calculations by a consistent algorithm[J]. Comput Phys, 1994, 112:31-44.
- [5] 柏劲松, 陈森华, 李平. 多介质流体非守恒律欧拉方程组的数值计算方法[J]. 爆炸与冲击, 2001, 21(4):265-271.
BAI Jing-song, CHEN Sen-hua, LI Ping. Numerical methods for multicomponent flows of non-conservative euler equations[J]. Explosion and Shock Waves, 2001, 21(4):265-271.
- [6] Berger M, Rigoutsos I. An algorithm for point clustering and grid generation[J]. IEEE Trans on Systemes, Man and Cybernetics, 1991, 21:1278-1286.
- [7] Leveque R J, Shyue K M. Two-dimensional front tracking based on high resolution wave propagation methods[J]. SIAM J Sci Comput, 1996, 123:354-368.

High resolution Eulerian adaptive algorithm for interfaces instability

BAI Jing-song, CHEN Sen-hua, ZHONG Min

(Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics,
Mianyang 621900, Sichuan, China)

Abstract: Richtmyer-Meshkov and Rayleigh-Taylor multi-fluid interface instability problems are simulated by using high resolution Eulerian adaptive algorithm. We applied Level Set (LS) function for capturing multi-fluid interfaces, and the different fluid corresponding for different level. These LS equations together with fluid dynamic Eulerian equations are solved dependently. An adaptive mesh refinement (AMR) method based on the Cartesian grids also discussed at the same time. This method can be automatically adaptive refinement grids and promotes the accuracy of the solution. Some examples are given by using this method, and save CPU greatly.

Key words: mechanics of explosion; multi-fluid; adaptive mesh refinement; interface instability