

文章编号: 1001 鬩 1455 (2003)01 鬩 0067 鬩 07

# 一类冲击振动系统在强共振条件下的亚谐分叉与 Hopf 分叉\*

罗冠炜<sup>1</sup>, 谢建华<sup>2</sup>

(1. 兰州铁道学院机械工程系, 甘肃 兰州 730070;

2. 西南交通大学应用力学与工程系, 四川 成都 610031)

摘要: 通过理论分析和数值仿真, 研究了一类二维冲击振动系统在一种强共振条件下的 Hopf 分叉与亚谐分叉。分析并证实了该类系统在此共振条件下可由稳定的周期 1-1 振动分叉为周期 4-4 振动或概周期振动, 讨论了亚谐振动和概周期振动向混沌运动的演化过程。

关键词: 振动与波; 冲击振动; 映射; 强共振; Hopf 分叉; 亚谐分叉; 混沌

中图分类号: O322 国标学科代码: 130°2020 文献标志码: A

## 1 引言

冲击振动问题在机械、车辆和核反应堆工程等领域中经常遇到, 当振动系统中某个元件的振幅超过给定限值或运动部件相互接触时将发生冲击。在含间隙机械系统的动力学优化设计、高速列车动力学分析、核反应堆的可靠性及降低噪声等方面, 冲击振动问题的研究具有重要的意义。冲击导致强非线性和不连续性, 冲击振动研究在理论上提出了一系列新的问题, 形成了非线性动力学的一个新的研究方向。目前, 国内外学者已开始研究冲击振动系统和含间隙、弹性约束系统的复杂分叉(奇异性<sup>[1-2]</sup>、高余维分叉与概周期分叉<sup>[3-7]</sup>)和混沌控制问题<sup>[8-9]</sup>。关于冲击振动系统 Hopf 分叉问题的研究, 目前仍主要限于数值仿真, 但理论分析也取得了一些进展<sup>[5-7]</sup>。C. Budd 等<sup>[4]</sup> 研究了一类单自由度冲击振动系统, 证明了当碰撞恢复系数小于 1 时, 冲击振子的周期运动不存在 Hopf 分叉; XIE Jian-hua<sup>[5]</sup> 分析了具有单侧刚性约束的单自由度振子的余维二 Hopf 分叉现象; LUO Guan-wei 等<sup>[6]</sup> 建立了具有单侧刚性约束的两自由度振动系统在非共振与弱共振条件下 Hopf 分叉研究的一般方法, 分析了概周期振动向混沌运动的演化过程。XIE Jian-hua 等<sup>[7]</sup> 研究了冲击振动系统在强共振( $\lambda_0^3=1$ )条件下的亚谐分叉及其向混沌的演化过程。

非线性动力系统由周期运动到概周期运动的分叉通常是在非共振或共振条件下发生的, 其中共振情况分为弱共振情况和四种复杂的强共振情况<sup>[10]</sup>。本文中, 研究了一类冲击振动系统的强共振分叉, 该系统与弹跳球<sup>[11-12]</sup> 和冲击振动落砂机的力学模型类似。在冲击振动系统非共振、弱共振情况的 Hopf 分叉<sup>[6]</sup> 和强共振( $\lambda_0^3=1$ )条件下的亚谐分叉<sup>[7]</sup> 研究的基础上, 讨论了一类冲击振动系统在强共振条件( $\lambda_0^4=1$ )下周期振动的分叉问题, 分析了冲击振动系统在强共振点附近的动力学特性, 揭示了亚谐运动和概周期运动向混沌的演化过程。

## 2 冲击振动系统在共振点附近的动力学特性

冲击振动系统的力学模型如图 1 所示。质量为  $M$  的振动台由刚度系数为  $K$  的线性弹簧和阻尼系数为  $C$  的线性阻尼器联接于支承面,  $x$  和  $y$  分别表示振动台和质量为  $m$  的质块的位移。振动台在简谐

\* 收稿日期: 2001-09-18; 修回日期: 2002-04-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(10172042, 10072051); 教育部博士点基金项目(20010613001)

作者简介: 罗冠炜(1963—), 男, 博士, 教授。

激振力  $F = F_0 \sin(\omega t + \tau)$  作用下,与质块发生碰撞。碰撞后,质块与振动台分离,自由下落过程中质块再次与振动台发生碰撞,如此往复。

相邻两次碰撞间振动台与质块的运动微分方程为

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 \sin(\omega t + \tau) \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (1)$$

由碰撞动量守恒定律及碰撞恢复系数  $R$  的定义,得

$$M\dot{x}_- + m\dot{y}_- = M\dot{x}_+ + m\dot{y}_+ \quad (2)$$

$$\dot{x}_+ - \dot{y}_+ = -R(\dot{x}_- - \dot{y}_-) \quad (3)$$

式中:  $\dot{x}_-$  和  $\dot{y}_-$  分别为振动台  $M$  与质块  $m$  碰撞前的瞬时速度,  $\dot{x}_+$  和  $\dot{y}_+$  分别为振动台与质块碰撞后的瞬时速度。

令  $u = m/M$ , 由(2)~(3)式,有

$$\dot{x}_+ = \frac{1-uR}{1+u}\dot{x}_- + \frac{u(1+R)}{1+u}\dot{y}_-, \quad \dot{y}_+ = \frac{1+R}{1+u}\dot{x}_- + \frac{u-R}{1+u}\dot{y}_- \quad (4)$$

在适当的系统参数下,振动系统能够呈现出稳定的周期运动。用  $p-p'$  表示冲击振动系统的周期运动,  $p$  和  $p'$  分别表示力周期数及冲击次数。令  $\theta = \omega t$ , 选择 Poincaré 截面

$$\Sigma = \{(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{S}, x = y, \dot{x} = \dot{x}_+, \dot{y} = \dot{y}_+\} \quad (5)$$

建立 Poincaré 映射。谢建华等<sup>[13]</sup>建立了图1中冲击振动系统的1-1周期运动及其 Poincaré 映射,研究了1-1周期运动在非共振与弱共振条件下的 Hopf 分叉。这里着重考虑此系统的1-1周期运动在强共振情况下的 Hopf 分叉与亚谐分叉问题,将截面为  $\Sigma$  的周期1-1运动的 Poincaré 映射简要表示为

$$\Delta \mathbf{X}' = \tilde{f}(\nu, \mathbf{X}) - \mathbf{X}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}(\nu, \Delta \mathbf{X}) \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^4$ ,  $\nu \in \mathbf{R}^1$ ,  $\nu$  为控制参数,  $\mathbf{X} = \Delta \mathbf{X} + \mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{X}' = \Delta \mathbf{X}' + \mathbf{X}^*$ 。  $\mathbf{X}^* = (\dot{x}_+, x_0, \dot{y}_+, \tau_0)^T$  表示 Poincaré 截面  $\Sigma$  上的1-1不动点,  $\Delta \mathbf{X}' = (\Delta \dot{x}'_+, \Delta x'_+, \Delta \dot{y}'_+, \Delta \tau')^T$  和  $\Delta \mathbf{X} = (\Delta \dot{x}_+, \Delta x, \Delta \dot{y}_+, \Delta \tau)^T$  是不动点  $\mathbf{X}^*$  的扰动量。

令  $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ ,  $2q = C/M$ , 引入量纲一的量:  $\xi = q/\omega_0$ ,  $\beta = F_0/Mg$ ,  $\nu = \omega/\omega_0$ , 可以将映射方程(6)变换成量纲一的形式。

在临界值  $\nu = \nu_c$  的某个邻域内,映射方程(6)的不动点为  $\mathbf{X}^*$ 。在临界值  $\nu = \nu_c$  处,线性化映射矩阵  $Df(\nu, \Delta \mathbf{X})$  满足下列假设:

(1)  $Df(\nu_c, \mathbf{o})$  有一对复共轭特征根  $\lambda_1(\nu_c), \lambda_2(\nu_c)$ , 位于复平面的单位圆周 ( $|\lambda_1(\nu_c)| = |\lambda_2(\nu_c)| = 1$ ) 上, 其余特征根  $\lambda_3(\nu_c), \lambda_4(\nu_c)$  位于复平面的单位圆周内;

(2)  $d|\lambda_1(\nu_c)|/d\nu|_{\nu=\nu_c} > 0$

通常,非线性动力系统由周期运动到概周期运动的分叉是在非共振或共振条件下发生的。若映射方程(6)在分叉点满足假设(1)、(2)和  $\lambda_{1,2}^n(\nu_c) \neq 1$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , 则此映射可能发生非共振或弱共振情况下的 Hopf 分叉<sup>[10]</sup>; 若映射(7)在分叉点满足假设(1)、(2)和  $\lambda_{1,2}^n(\nu_c) = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , 则此映射可能发生强共振情况下的 Hopf 分叉<sup>[10]</sup>。本文中,着重讨论冲击振动系统在强共振情况 ( $\lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1$ ,  $\lambda_{1,2}(\nu_c) = \pm i$ ) 下的分叉问题。

映射方程(6)经坐标变换  $\mu = \nu - \nu_c$  和  $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$  变换成

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(\mu, \mathbf{Y}) \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ ,  $\mathbf{P}$  是特征矩阵<sup>[6]</sup>。

对于映射  $\mathbf{F}(\mu, \mathbf{Y})$ , 存在一个中心流形  $W(z, \bar{z}, \mu)$ <sup>[14]</sup>, 在此中心流形上,此映射能够被降阶成一个二维映射,这个二维映射可表示为

$$\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z}) = \lambda(\mu)z + \sum_{i+j=2}^3 g_{ij}(\mu) \frac{z^i \bar{z}^j}{i! j!} + o(|z|^4) \quad (8)$$

式中:  $\lambda(\mu) = \lambda_0(1 + \mu \tilde{\lambda}_1 + o(|\mu|^2))$ ,  $\text{Re } \tilde{\lambda}_1 > 0$ ,  $\lambda_0 = \lambda(0)$ ,  $z = y_1 + iy_2$ ,  $\bar{z} = y_1 - iy_2$ 。映射(7)的

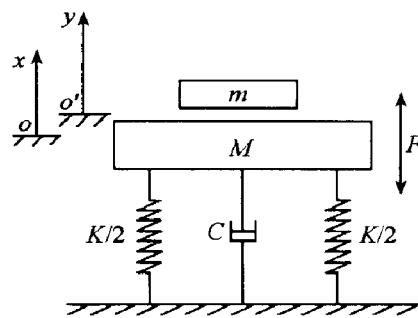


图1 冲击振动系统的力学模型

Fig.1 Scheme of the vibro-impact system

中心流形  $W(z, \bar{z}, \mu)$ 、 $g_{ij}$  和  $\tilde{\lambda}_1$  由 LUO Guan-wei 等<sup>[6]</sup> 给出。

根据中心流形定理<sup>[14]</sup>, 映射  $F(\mu, Y)$  在临界点的局部分叉特性与  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  在临界点的局部分叉特性是等价的。因此可以通过分析二维映射  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  的分叉特性了解  $F(\mu, Y)$  的分叉特性。因映射  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  是  $\mathbf{R}^2$  上含一个参数的微分同胚, 满足条件:

- (1)  $\tilde{\Phi}_\mu(0, 0)$  对所有  $\mu$  成立;
- (2)  $D\tilde{\Phi}_\mu(0, 0)$  有一对共轭特征值  $\lambda(\mu)$  和  $\bar{\lambda}(\mu)$ , 且  $\lambda(0) = i$ ;
- (3)  $d|\lambda(\mu)|/d\mu|_{\mu=0} > 0$ 。

在条件(1)~(3)下, 存在与  $\mu$  相关的坐标变换, 使  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  变成范式

$$\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z}) = \lambda(\mu)z + \alpha(\mu)z^2\bar{z} + \beta(\mu)\bar{z}^3 + o(|z|^2) \tag{9}$$

式中

$$\alpha(\mu) = \frac{g_{21}(\mu)}{2} + \frac{\bar{\lambda} |g_{02}(\mu)|^2}{2(\lambda - \bar{\lambda}^2)} + \frac{|g_{11}(\mu)|^2}{1 - \bar{\lambda}} + \frac{(\lambda + \bar{\lambda}\lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda^2\bar{\lambda})g_{11}(\mu)g_{20}(\mu)}{2(\lambda - \bar{\lambda}^2)(\lambda - \bar{\lambda}\lambda)} \tag{10}$$

$$\beta(\mu) = \frac{g_{03}(\mu)}{6} + \frac{(\lambda\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^3)g_{02}(\mu)g_{11}(\mu)}{2(\lambda - \bar{\lambda}\lambda)(\lambda - \bar{\lambda}^2)} + \frac{(\lambda - \bar{\lambda} + \lambda^2 - \bar{\lambda}^3)g_{02}(\mu)\bar{g}_{20}(\mu)}{2(\lambda - \bar{\lambda}^2)(\lambda - \bar{\lambda}^2)} \tag{11}$$

式中:  $\lambda = \lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\mu)$ 。

定义

$$a_1 = \frac{\alpha(0)}{\lambda_0}, \quad a_2 = \frac{\beta(0)}{\lambda_0} \tag{12}$$

引理<sup>[10]</sup>: 映射  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  是  $\mathbf{R}^2$  上含一个参数的微分同胚, 满足条件(1)~(3), 则存在与  $\mu$  相关的坐标变换, 使  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  变成范式  $\Phi_\mu(z, \bar{z})$ , 且有:

- (1) 如果  $\text{Re } a_1 \neq 0$ ,  $|a_2| < |\bar{\lambda}_1| |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)|$ ,  $\tilde{\Phi}_\mu$  从不动点 0 分叉出不变圈;
- (2) 如果  $|\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| > |a_2/\bar{\lambda}_1|$ , 则  $\tilde{\Phi}_\mu$  不能从不动点 0 分叉出稳定或不稳定的 4 阶不动点;
- (3) 如果  $|\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| < |a_2/\bar{\lambda}_1|$ , 对  $\mu > 0$ , 存在两簇含单参数的 4 阶不动点, 这两簇含单参数的 4 阶不动点是从不动点 0 分叉出来的。

由  $|\mu_1 + a_1/\bar{\lambda}_1| = |a_2/\bar{\lambda}_1|$  知,  $\mu_1$  有两个解  $\mu_1^{(1)}$  和  $\mu_1^{(2)}$  ( $\mu_1$  的定义见式(14))。如果  $|\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| < |a_2/\bar{\lambda}_1|$ , 则  $\mu_1^{(1)}$  和  $\mu_1^{(2)}$  为实数。如果  $|a_1| > |a_2|$ ,  $\mu_1^{(1)}\mu_1^{(2)} > 0$ , 则不动点 0 在  $\mu = 0$  的同一边分叉出两簇含单参数的 4 阶不动点, 并且其中至少有一簇是不稳定的; 如果  $|a_1| < |a_2|$ ,  $\mu_1^{(1)}\mu_1^{(2)} < 0$ , 则不动点在  $\mu = 0$  的两边分叉出两簇含单参数的 4 阶不动点, 并且这两簇 4 阶不动点都是不稳定的。

上述引理条件(3)中, 如果  $|a_1| > |a_2|$  且  $\mu_1^{(1)}\mu_1^{(2)} > 0$ , 则由范式(9)可分析两簇含单参数的 4 阶不动点的稳定性。由式(9)有

$$\Phi_\mu^4(z, \bar{z}) = (1 + 4\mu\bar{\lambda}_1 + o(\mu^2))z + 4a_1z^2\bar{z} + 4a_2\bar{z}^3 + o(|\mu| |z|^3 + |z|^4) \tag{13}$$

作以下变换

$$\mu = \mu(\epsilon) = \mu_1\epsilon^2 + o(\epsilon^3), \quad z = z^*(\epsilon) + z', \quad z^*(\epsilon) = \epsilon e^{2i\pi\varphi_0} + o(\epsilon^2) \tag{14}$$

式中:  $z^*(\epsilon)$  是一簇 4 阶不动点的某个不动点。关于  $z'$  的新映射方程可以写成

$$\begin{aligned} \Phi_\mu^4(z', \bar{z}') &= (1 + 4\mu_1\bar{\lambda}_1 + 8a_1 |z^*(\epsilon)|^2 + o(\epsilon^3))z' + \\ & (4a_1(z^*(\epsilon))^2 + 12a_2(\bar{z}^*(\epsilon))^2 + o(\epsilon^3))\bar{z}' + o(|z'|^2) \end{aligned} \tag{15}$$

$\Phi_\mu^4(z', \bar{z}')$  在原点的导数可由如下矩阵表示

$$\frac{\partial}{\partial z'} \Phi_\mu^4(0, 0) = \mathbf{I} + 4\epsilon^2 \mathbf{A} + o(\epsilon^3) \tag{16}$$

式中

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 \bar{\lambda}_1 + 2a_1 & a_1 e^{4i\pi\varphi_0} + 3a_2 e^{-4i\pi\varphi_0} \\ \bar{a}_1 e^{-4i\pi\varphi_0} + 3\bar{a}_2 e^{4i\pi\varphi_0} & \mu_1 \bar{\lambda}_1 + 2\bar{a}_1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$4\varphi_0 = -\frac{1}{2\pi} \arg \left[ -\frac{\mu_1 \bar{\lambda}_1 + a_1}{a_2} \right] \quad |1| \quad (18)$$

令  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  表示矩阵  $A$  的特征值, 则  $D\Phi_\mu(0, 0)$  的特征值可写成

$$\gamma_1 = 1 + 4\epsilon^2 \sigma_1 + o(\epsilon^3), \quad \gamma_2 = 1 + 4\epsilon^2 \sigma_2 + o(\epsilon^3) \quad (19)$$

如果矩阵  $A$  的特征值为实根, 由式(19)可见, 当满足条件  $|a_1| \triangleright |a_2|$  和  $\mu_1^{(1)} \mu_1^{(2)} > 0$  时, 一簇 4 阶不动点的稳定性完全由矩阵  $A$  的特征值  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的符号确定。

如果映射(6)满足假设条件(1)~(2)和  $\lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1$ , 则二维映射方程(8)将满足引理条件(1)~(3)。在  $\mu = 0$  的某个邻域内, 映射(6)在中心流形上的局部性态和二维映射(8)的局部行为是等价的。借助引理, 可以判断当分叉参数  $\nu$  穿越  $\nu_c$  时, 映射(8)在强共振情况 ( $\lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1$ ) 下 Hopf 分叉和亚谐分叉的存在及稳定性。

### 3 数值计算

#### 3.1 Hopf 分叉值与横截条件算例

选取系统参数(1):  $\xi = 0.0895703, \beta = 0.6, u = 0.5, R = 0.9, \nu \in [2.5, 3.5]$ 。  $Df(\nu, \mathbf{o})$  的特征值变化过程如图 2(a)所示。当  $\nu \in [2.5, 2.8668)$  时,  $Df(\nu, \mathbf{o})$  的特征值都在单位圆周内。当  $\nu = \nu_c = 2.8668$  时,  $Df(\nu, \mathbf{o})$  有一对复共轭特征值  $\lambda_1(\nu_c)$  和  $\lambda_2(\nu_c)$  在单位圆周上, 且  $\lambda_{1,2}(\nu_c) = \pm i$ , 其余特征值  $\lambda_3(\nu_c)$  和  $\lambda_4(\nu_c)$  仍然在单位圆周内。当  $\nu$  穿越  $\nu_c$  时, 复共轭特征值  $\lambda_1(\nu_c)$  和  $\lambda_2(\nu_c)$  分别从强共振点  $(0, \pm i)$  处穿越单位圆周, 其余特征值仍然保持在单位圆内。在分叉值  $\nu_c$  处有:  $\lambda_{1,2}(\nu_c) = 0.00000076 \pm 1.00000019i, \lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1, d|\lambda_1(\nu)|/d\nu|_{\nu=\nu_c} = d|\lambda_1(\mu)|/d\mu|_{\mu=0} = 0.2761, a_1 = 0.77485 + 3.33297i, a_2 = 0.97546 + 2.87623i, \bar{\lambda}_1 = 2.23757 - 0.91246i, |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| = 1.398242, |a_2/\bar{\lambda}_1| = 1.256851, |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| \triangleright |a_2/\bar{\lambda}_1|, |a_2| = 3.03714, |\bar{\lambda}_1| |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| = 3.37881, |a_2| \ll |\bar{\lambda}_1| |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)|$ 。

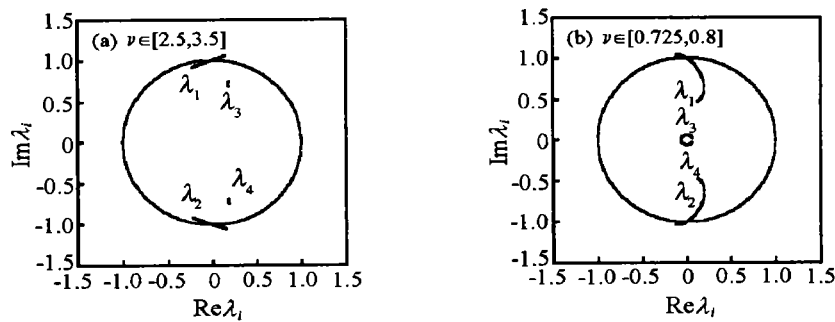


图 2 特征值在强共振点横截单位圆周的过程

Fig. 2 The conjugate pair of eigenvalues intersecting the unit circle at strong resonance points

二维映射  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  满足条件(1)~(3)和引理条件(1), 在系统参数(1)下, 当  $\nu$  穿越  $\nu_c = 2.8668$  后, 图 1 所示冲击振动系统的周期 1-1 运动可能分叉出概周期冲击振动。

选取系统参数(2):  $\xi = 0.1260078, \beta = 4.4989589508, u = 0.61782199, R = 0.1687095, \nu \in [0.725, 0.8]$ 。  $Df(\nu, \mathbf{o})$  的特征值变化过程如图 2(b)所示, 在分叉值  $\nu_c = 0.75382525$  处引理条件(3)成立, 且有:  $\lambda_{1,2}(\nu_c) = 0.00000002 \pm 1.00000000i, \lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1, d|\lambda_1(\nu)|/d\nu|_{\nu=\nu_c} = d|\lambda_1(\mu)|/d\mu|_{\mu=0} = 3.9913, a_1 = 0.7538252 - 3.26561i, a_2 = -0.76393 + 3.95322i, |a_1| \triangleright |a_2|, |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| = 0.38664, |a_2/\bar{\lambda}_1| = 2.62673, |\text{Im}(a_1/\bar{\lambda}_1)| \triangleright |a_2/\bar{\lambda}_1|, \mu_1^{(1)} \mu_1^{(2)} = 1.37745, \sigma_1 = -1.234178, \sigma_2 = -10.32401$ 。

二维映射  $\tilde{\Phi}_\mu(z, \bar{z})$  满足条件(1)~(3)和引理条件(3), 并满足  $|a_1| \triangleright |a_2|, \mu_1^{(1)} \mu_1^{(2)} > 0$ 。因此,

在系统参数(2)下,当  $\nu$  穿越  $\nu_c = 0.75382525$  后,图 1 所示冲击振动系统的周期 1-1 运动分叉出稳定的周期 4-4 冲击振动。

以上数值分析揭示了二维冲击振动系统在强共振条件 ( $\lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1$ ) 下的全局分叉过程,下面将进行数值计算,可以发现,数值计算结果与理论分析完全吻合。

### 3.2 冲击振动系统在强共振条件下的全局分叉

图 1 所示冲击振动系统的 Poincaré 截面是 4 维的,将 Poincaré 截面在  $(x, \dot{x})$  等平面的投影称为投影 Poincaré 截面,这些投影 Poincaré 截面图能够表明冲击振动系统在共振点附近的动力学特性。

取系统参数(1)时,冲击振动系统在强共振条件下的全局分叉过程如图 3 所示。计算中取冲击振动系统相应控制参数  $\nu$  的 1-1 解析不动点<sup>[13]</sup> 作为初始映射点。当  $\nu \in [2.5, 2.8668)$  时,图 1 所示冲击振动系统具有稳定的周期 1-1 运动。当  $\nu$  穿越临界值  $\nu_c = 2.8668$  时,系统的周期 1-1 运动改变稳定性,分叉出稳定的概周期冲击振动,系统稳定的概周期运动在投影 Poincaré 截面上由吸引不变圈表示。 $\nu = 2.88$  时冲击振动系统在投影 Poincaré 截面  $(x, \dot{x})$  上的概周期吸引不变圈如图 3(a) 所示。随  $\nu$  进一步远离 Hopf 分叉值  $\nu_c$ ,吸引不变圈显著增大,如图 3(b) 所示。 $\nu$  继续增加,吸引不变圈上出现振荡波形,发生环面振荡 (oscillation of torus) 现象,如图 3(c)、3(d) 所示。K. Kuniyiko<sup>[15]</sup> 构造了一个满足强共振条件 ( $\lambda_0^4 = 1$ ) 的二维映射,发现此映射存在环振荡现象。当  $\nu = 4.86$  时,系统的概周期运动锁相于长周期多冲击轨道(图 3(e))。随  $\nu$  增加,系统的概周期冲击振动经锁相转迁到混沌。图 3(f) 为系统在投影 Poincaré 截面上由带状吸引子表示的混沌响应。

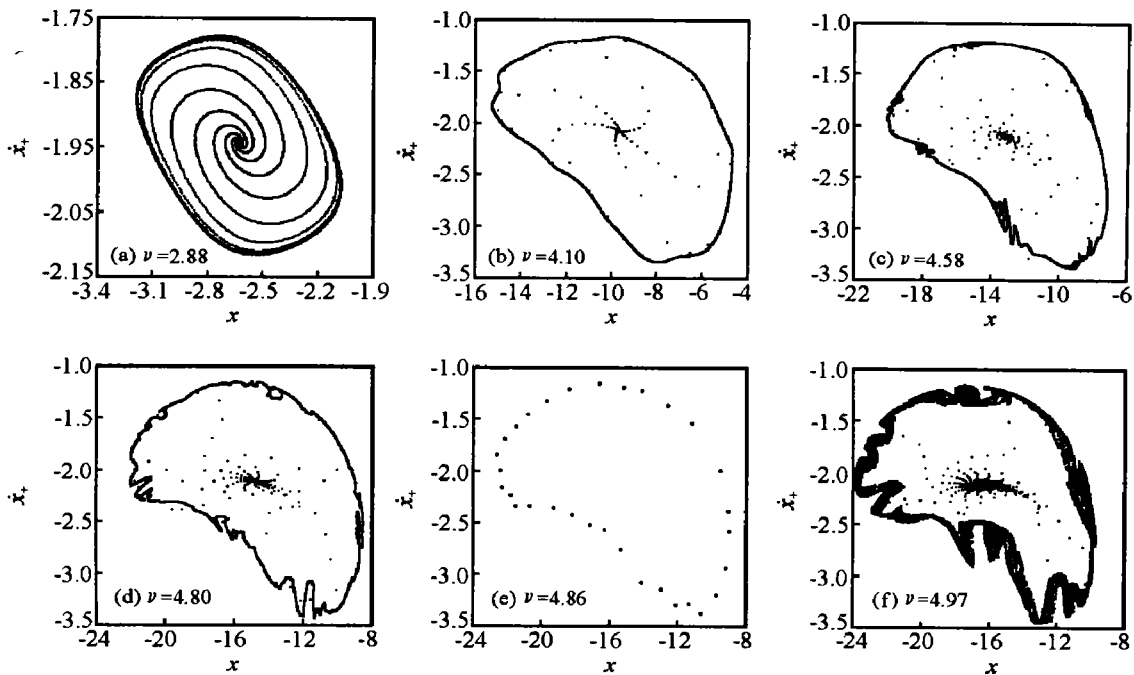


图 3 取系统参数(1)时的投影 Poincaré 映射图

Fig. 3 Projected Poincaré section with system parameters of (1)

取系统参数(2)时,冲击振动系统在强共振条件下的全局分叉过程如图 4 所示。当  $\nu \in [0.725, 0.75382525)$  时,冲击振动系统具有稳定的周期 1-1 运动,稳定的周期 1-1 运动在投影 Poincaré 映射图上由一个不动点表示。当  $\nu$  穿越临界值  $\nu_c = 0.75382525$  时,系统的周期 1-1 运动失稳分叉成稳定的 4-4 周期运动。取  $\nu = 0.7539$  时系统的解析 1-1 不动点作为初始映射点,经 5000 次冲击映射,在投影 Poincaré 映射图上获得稳定的周期 4-4 不动点,如图 4(a) 所示。随控制参数进一步增加,周期 4-4 运动将改变稳定性,系统经 4-4 周期运动的鞍结分叉而呈现出更高阶周期冲击运动。图 4(b) 为  $\nu = 0.75867$  时系统不稳定的 1-1 不动点  $\rightarrow$  不稳定的 4-4 不动点  $\rightarrow$  30-30 不动点的转迁过程。随着  $\nu$  继续增加,系统经长周期多冲击运动进入混沌,如图 4(c) 所示。从长周期多冲击运动到混沌的途径明显表明系统的冲击映射存在不连续性。在图 1 所示冲击振动系统中,存在振动台与质块以相同速度接触的擦边 (Grazing boundary)

现象, 即  $\dot{x} = \dot{y}$ ,  $x = y$ 。擦边造成冲击振动系统的映射出现奇异性和不连续性。映射的擦边不连续性可能是导致系统经长周期多冲击运动直接进入混沌的主要原因。G. S. Whiston<sup>[1]</sup> 和 HU Hai-Yan<sup>[2]</sup> 分别研究了具有固定刚性约束的单自由度冲击振动系统及单自由度含间隙弹性约束系统的擦边分叉问题。关于冲击振动系统部件间相互冲击的擦边分叉问题研究目前尚未有文献报道。

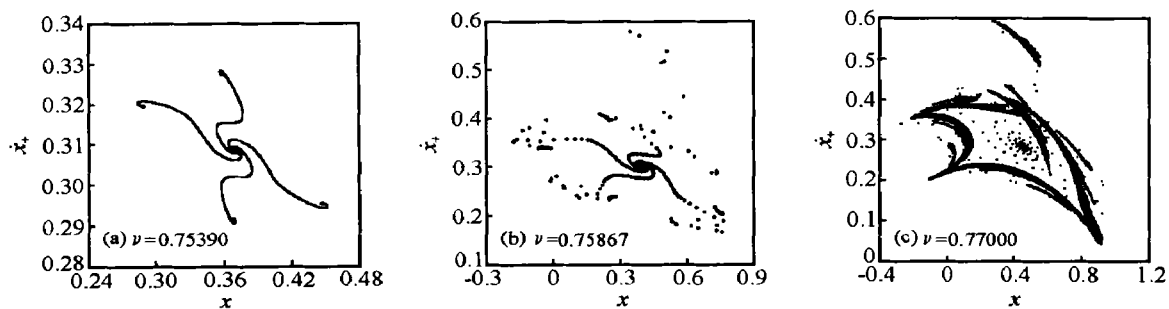


图 4 取系统参数(2)时的投影 Poincaré 映射图

Fig. 4 Projected Poincaré section with system parameters of (2)

## 4 结 论

(1) 在强共振条件 ( $\lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1$ ) 下, 冲击振动系统的周期 1-1 振动存在 Hopf 分叉和亚谐分叉, 系统的周期 1-1 振动可以分叉为概周期振动或周期 4-4 振动;

(2) 在强共振条件 ( $\lambda_{1,2}^4(\nu_c) = 1$ ) 下, 系统的亚谐振动经鞍结分叉和擦边分叉通向混沌, 概周期振动经环面振荡和锁相通向混沌;

(3) 在实际工程中, 严格的强共振条件在非线性系统中是不容易遇到的。但是非线性动力系统映射方程的特征值在强共振点附近穿越单位圆的情况是有可能发生的, 在这种情况下, 系统的动力学行为与强共振条件下的动力学行为是相似的。

## 参考文献:

- [1] Wiston G S. Singularities in vibro-impact dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 152(3): 427-460.
- [2] HU Hai-yan. Detection of grazing orbits and incident bifurcations of a forced continuous, piecewise-linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 187(3): 485-493.
- [3] Chatterjee S, Mallik A K. Three kinds of intermittency in a nonlinear mechanical system[J]. Physical Review E, 1996, 53(5): 4362-4367.
- [4] Budd C, Dux F, Cliffe A. The effect of frequency and clearance variations on single-degree-of-freedom impact oscillators[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 184(3): 475-502.
- [5] XIE Jian-hua. Codimension two bifurcations of an impacting vibrating system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1996, 17(1): 65-75.
- [6] LUO Guan-wei, XIE Jian-hua. Hopf bifurcations of a two-degree-of-freedom vibro-impact system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 213(3): 391-480.
- [7] LUO Guan-wei, XIE Jian-hua, SUN Xun-fang. Quasi-periodic and chaotic behaviour of a two-degree-of-freedom impact in a strong resonance case[J]. Acta Mechanical Solida Sinica, 1999, 12(3): 279-283.
- [8] HU Hai-yan. Controlling chaos of a periodically forced nonsmooth mechanical system[J]. Acta Mechanical Sinica, 1995, 11(3): 251-258.
- [9] 胡海岩. 力学系统混沌的主动控制[J]. 力学进展, 1996, 26(4): 453-463.  
HU Hai-yan. Active control of chaos of mechanical systems[J]. Advances in Mechanics, 1996, 26(4): 453-463.
- [10] Iooss G. Bifurcation of maps and applications[M]. Mathematics Studies 36. North-Holland Publishing Company, 1979.
- [11] Holmes P J. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table[J]. Journal of Sound and Vibrating, 1982, 84(2): 173-189.
- [12] XIE Jian-hua. Symmetry and horseshoe in the model of bouncing ball[J]. Chinese Science Bulletin[J], 1999, 44(4):

315-317.

- [ 13] 谢建华, 郑小武. 惯性式冲击振动落砂机周期运动的 Hopf 分叉[J]. 振动工程学报, 1999, 12(3): 297-303.  
XIE Jian-hua, ZHENG Xiao-wu. Hopf bifurcation of periodic motions in the inertial shaker[J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(3): 297-303.
- [ 14] Carr J. Application of center manifold theory[M]. Applied Math Sciences 35, Springer-Verlag, 1981: 33-36.
- [ 15] Kunihiko K. Oscillation and doubling of torus[J]. Progress of Theoretical Physics, 1984, 72(2): 202-215.

## Subharmonic and Hopf bifurcation of a vibra-impact system in a strong resonance case

LUO Guan-wei<sup>1</sup>, XIE Jian-hua<sup>2</sup>

(1. *Department of Mechanical Engineering, Lanzhou Railway Institute,  
Lanzhou 730070, Gansu, China;*

2. *Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, Sichuan, China*)

**Abstract:** Hopf bifurcation and subharmonic bifurcation of a vibro-impact system, in a kind of strong resonance case, are investigated by theoretical analyses and numerical simulations. It is demonstrated that the system can exhibit a stable 4-four period of impact motion or a quasi-periodic impact motion bifurcating from a 1-single period of impact motion in the strong resonance condition. Routes from subharmonic motion and quasi-1-single periodic motion to chaos are discussed.

**Key words:** vibration and wave; vibro-impact; map; strong resonance; Hopf bifurcation; subharmonic bifurcation; chaos